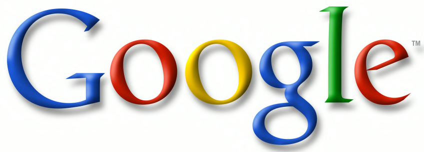
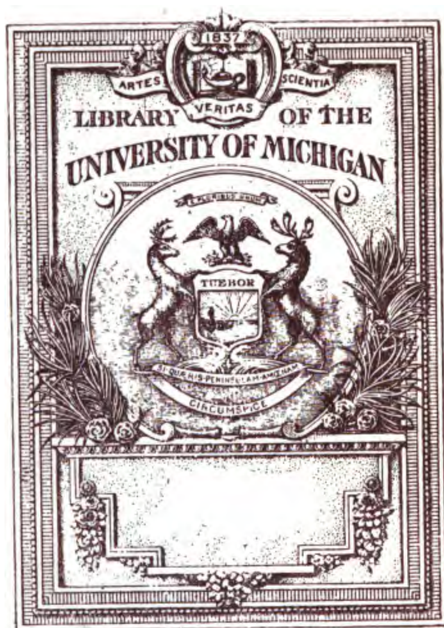



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

VERZAMELING
VAN
WISKUNDIGE
VOORSTELLEN,
DOOR DE
LEDEN
VAN HET
WISKUNDIGE
GENOOTSCHAP,
ONDER DE ZINSPREUK:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN;

ELKANDER TOT ONDERLINGE OEFENING OPGEGEVEN.



TWEEDE DEEL.

(Gedrukt voor Rekening van het Genootschap.)

Te AMSTERDAM, bij

H. WEIJTING, Boekverkooper, in de Kalverstraat, over de St. Luciënsteeg, N°. 209.

1823.

Gedrukt ter Boekdrukkerij van P. E. BRIËT te Amsterdam.

NAAMLIJST
DER
LEDEN
VAN HET
WISKUNDIGE GENOOTSCHAP,

Onder de Zinspreuk:

EEN ONVERMOEIDE ARBEID KOMT ALLES TE BOVEN,

Te Amsterdam.

Gerangschikt naar den tijd van hun Lidmaatschap,
Ao. MDCCCXX.

BESTUURDERS.

O. S. BANGMA, Examinator der Stuurlieden te Amsterdam, Lid van het Koninklijk Nederlandsch Instituut van Wetenschappen, Letterkunde en Schoone Kunsten, enz. enz.
G. E. BOSWEL.
A. VAN DER SWAN.
H. VAN WESSEM JACOBUSZ.
P. PREIJER.
J. C. VAN SETTEN.
} *te Amsterdam.*

I. R. SCHMIDT, 1e Secretaris, Lector in de Wiskunde, aan de Koninklijke Artillerie- Genie- en Marine-School, te Delft.

H. G. WITLAGE JR. 2e Secretaris.
C. TERMARS, Boekhouder.
} *te Amsterdam.*

Bui-

Buitengewone Leden van Verdienſten in het Wetenſchappelijke Vak.

U. HUGUENIN, Kolonel Directeur van de Koninklijke IJzer-Geſchutgieterij te Luik.

Zijne Exellentie de Lieutenant-Generaal C. R. T. KRAYENHOFF, Inſpecteur Generaal der Fortificatien, en van het Corps van de Genie, Pontonniers, Mineurs en Sappeurs, en Gouverneur der Stad Amſterdam, Lid van het Koninklijk Nederlandsch Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunſten.

J. H. VAN SWINDEN, Oud Hoogleeraar in de Wijsbegeerte, Wis-, Natuur- en Sterrekunde te Amſterdam, Lid van het Koninklijk Nederlandsch Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunſten, enz. enz.

J. H. VOET, Luitenant Generaal, Commandant en Directeur der Studien aan de Koninklijke Artillerie- Genie- en Marine-School, te Delft.

Jonkheer J. M. C. VAN UTENHOVE, Lid van het Koninklijk Nederlandsch Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunſten, te Jutphaas.

A. VAN DEN ENDE, Hoofd-Inſpecteur van het Middelbaar en Lager Onderwijs; Ridder van den Nederlandſchen Leeuw, Lid van het Koninklijk Nederlandsch Inſtituut van Wetenſchappen, Letterkunde en Schoone Kunſten, te Haarlem.

O. S. BANGMA, (zie boven.)

J. DE GELDER, Buitengewoon Hoogleeraar in de Wis- en Natuurkundige Wetenſchappen aan de Hooge School te Leyden.

Buitengewone Leden van Verdienſten in het Huishoudelijke Vak.

CHRISTOFFER MEIJLINK, te 's Gravenhage.

H. VAN WESSEM JACOBUSZ., te Amſterdam.

B. VAN HEIJNINGEN, te Amſterdam.

C. TERMARS, te Amſterdam.

Le-

Leden van de Wetenschappelijke Commissie.

O. S. BANGMA, (zie boven.)
J. DE GELDER, (zie boven.)
I. R. SCHMIDT, (zie boven.)
J. H. VOET, (zie boven.)
U. HUGUENIN, (zie boven.)
P. CURTEN, Directeur van het Genootschap der Proefondervindelijke Wijsbegeerte, te Rotterdam.
H. VAN WESSEM JACOBUSZ., te Amsterdam.

Bibliothecaris.

H. VAN WESSEM JACOBUSZ, (zie boven.)

Leden van Verdiensten der Tweede Klasse.

I. R. SCHMIDT, (zie boven.)
A. L. HECTOR, te Middelburg.
A. FOCK, te Amsterdam.
P. VAN EEGHEN, CHZ., te Amsterdam.
P. CURTEN, (zie boven.)
R. LOBATTO, te Brussel.

Gewone Leden.

P. HOUTTUIN Gz., te Hoorn.
L. KOOPS, te Amsterdam.
W. C. BAKKER, te Purmerland.
KLAAS SMIT, te Amsterdam.

P. CALIS, te Schermer.
D. BRAUBACH, te Bremen.
C. MARTENS, te Bremen.
A. VOLKERSE, te Monnikendam.
J. KERKHOVEN, te Amſterdam.
A. HARREBOMÉE, te Heemſtede.
A. HORSTMAN, te Amſterdam.
I. R. SCHMIDT, 1e Secretaris, (zie boven.)
J. H. THIERMAN, te Bremen.
W. J. VAN HEMERT, te Utrecht.
H. W. CASPARI, te Amſterdam.
J. H. NIEUWVEEN, te Leyden.
J. BUIS, te Amſterdam.
G. MOL JUNIOR, te Utrecht.
H. G. WITLAGE JUNIOR, 2e Secretaris, te Amſterdam.
A. L. HECTOR, te Middelburg.
J. C. VAN SETTEN, Beſtuurder, te Amſterdam.
A. VAN DER SWAN, Beſtuurder, te Amſterdam.
M. H. POS, te Amſterdam.
J. EISVELD, te Groningen.
C. TERMARS, Boekhouder, te Amſterdam.
G. BUIS, te Amſterdam.
L. VAN HEUSDEN, aan den Uithoorn.
C. J. VAN BRUSSEL, te Amſterdam.
D. H. WATERMAN, te Sapmeer.
M. LEMANS, te Amſterdam.
P. VAN EEGHEN CHZ., te Amſterdam.
W. VAN HAARST, te Sneek.
A. VAN DER SPUIJ, te 's Gravenhage.
J. P. BAUDET, te Leeuwarden.
M. TIELJARDT, te Amſterdam.
M. WOOD LEVENSTON, te Amſterdam.
F. J. MÉAN, te Surinamen.
P. ESAU, te Aarlanderveen.
A. DAHLHAUS, te Keulen.
C. LANTZ, te Amſterdam.

R. LOBATTO, te Brussel.
H. J. HEIJSTERMAN, te Amsterdam.
J. DEELEMAN BOM, te Amsterdam.
A. J. LUBLINK, te Amsterdam.
J. B. CANTOR, te Amsterdam.
A. F. DE PAUW, te Amsterdam.
S. J. MULDER, te Amsterdam.
A. D. ZILLESEN, te Arnhem.
Mr. D. FRANÇOIS, te 's Gravenhage.
G. S. LEENEMAN, te Amsterdam.
A. W. HUIDEKOPER, te Amsterdam.
A. TOLLUS, Architect en Landmeter te 's Gravenhage.
G. E. BOSWEL, Bestuurder te Amsterdam.
J. KONING, te Amsterdam.
H. F. FIJNJE, te Groningen.
J. VAN DER LINDEN, te Amsterdam.
J. A. BUIJN, te Amsterdam.
J. ARBON, Examinator der Stuurlieden te Rotterdam.
P. CURTEN, te Rotterdam, (zie boven)
D. BURGER, te Rotterdam.
G. VAN ROOIJEN, te Rotterdam.
J. VAN DER WALLEN VAN VOLLENHOVEN, te Rotterdam.
Mr. D. J. PRESBURG, te Amsterdam.
Mr. A. HEIJTING, te Rotterdam.
P. PREIJER, Bestuurder, te Amsterdam.
REINOUD CAREL VAN TUIJLL VAN SEROOSKERKEN, tot Hees en Leende, te Utrecht.
C. J. GLAVIMANS, Onder-Constructeur bij de Nederlandsche Marine, te Rotterdam.
H. P. KRETSCHMER, Directeur van het Wis- en Aardrijkskundig Instituut te Zutphen.
J. BRAAEX, Fabrijk- en Landmeter te Schieland.
P. DE LANGE, te Nijmegen.
B. DE JONGE MEIJERZ., te Amsterdam.
J. J. REEKERS, te Amsterdam.
J. PEEREBOOM, te Amsterdam.

J. C. BEIJER, Nederduitsche Taalmeester bij de Koninklijke Artillerie- Genie- en Marine-School, te Delft.
J. C. HECK DE BRUIJN, te Dordrecht
P. H VAN DEN BERG, te Rotterdam.
J. M. PAUW, 2e Luitenant, Ingenieur te Namen.
J. VAN WIJK ROELDZ., te Hattem.
C. J. BOLTEN, te Delft.
F. P. GISIUS NANNING, te Luik.
F. BAUD, Ingenieur der Eerste Klasse van den Waterstaat en der Publieke Werken, te Delft.
H. FOEKES BAKKER, te Amsterdam.
J. E. DUIJVENÉ, Luitenant Ingenieur, te Delft.
F. W. WESTINK, te Leeuwarden.
W. HORA SICCAMA, 1e Luitenant ter Zee en Ridder van de 4e Klasse van de Militaire Willems Orde der Nederlanden, te Groningen.
H. VAN KRAAIJENOORD, te Amsterdam.
R. VAN WIJK JACOBUSZ., te Hattem.
C. DE JONGH, te Deventer.
D. H. BOSKAMP, te Haarlem.
P. J. PRINSEN, Directeur en Onderwijzer van de Kweekschool voor Schoolonderwijzers te Haarlem.
S. KLIJNSMA, 1e Luit. bij het Bat. Pontonniers, Minneurs en Sappeurs, te Maastricht.
J. NICOLAIJ, Kapitein der Artillerie, Onder Directeur bij de Koninklijke IJzer-Geschutgieterij te Luik.
. . . VON GAGEREN, Kapitein bij den Generalen Staf te Dinant.
C. HOFFERS, te Haarlem.
M. B. JUNG, te Grijpskerke.
C. J. DE JONG, te Arnhem.
A. C. PIERSON, te Delft.
J. W. MARTINI, te Delft.
J. VAN DER STOK, te Delft.

P.

P. J. DELPRAT, Kapitein der Genie, te Delft.
J. FRANC, Instructeur der Marine; te Delft.
H. ROODHUIJZEN, te Elburg.
G. J. SARLET, te Haarlem.
F. W. SCHULD, te Elburg.
W. TOP Wz., te Elburg.
A. P. H. KUIPERS, te Leeuwarden.



WISKUNDIGE VOORSTELLEN

MET DEREZELVER

ONTBINDINGEN.

I. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Twee getallen te vinden, waarvan het verschil der quadraten een cubus is? (1)

OPGELOST *door* H. G. WITLAGE JR., R. LOBATTO, R. VAN WIJK JZ., M. B. JUNG, J. PEERSBOOM, H. ROODHUIJZEN, F. W. SCHULD, W. TOP WZ., H. FOKKES BAKKER en H. VAN KRAAIJENOORD.

OPLOSSING *van* H. G. WITLAGE JR.

Stel voor de twee getallen x en mx, dan moet, volgens het Voorstel, $m^2x^2 - x^2$ een cubus zijn. Stel den wortel van dezen cubus px, dan hebben wij de vergelijking

$$m^2x^2 - x^2 = p^3x^3,$$

waaruit

$$x = \frac{m^2 - 1}{p^3};$$

en bijgevolg zijn de gevraagde getallen,

$$x = \frac{m^2 - 1}{p^3} \text{ en } mx = \frac{m(m^2 - 1)}{p^3},$$

waarin nu voor m en p geheele of gebrokene getallen naar welgevallen kunnen worden genomen.

VOORBEELDEN. Nemende $p = 1$, en $m = 2$, dan zijn de getallen 3 en 6.

Nemende $p = 2$ en $m = 3$, dan worden de getallen 1 en 3, enz.

II.

(1) O. S. BANGMA, *Algebra*, *pag.* 261. N°. 18.

II. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Twee positieve getallen te vinden, zoodanig, dat indien men hun product optelt bij de som hunner quadraten, er een rationale cubus kome? (2)

OPGELOST *door* H. G. WITLAGE JR., R. LOBATTO, J. PEEREBOOM, H. FOEKES BAKKER, R. VAN WIJK JZ., H. VAN KRAAIJENOORD, F. W. SCHULD, W. TOP WZ., H. ROODHUIJZEN en M. B. JUNG.

OPLOSSING *van* H. G. WITLAGE JR.

Stel voor de getallen x en mx, en voor den wortel van den gevraagden cubus px, dan geeft het Voorstel ons de vergelijking

$$x^2 + m^2x^2 + mx^2 = p^3x^3,$$

waaruit

$$x = \frac{m^2 + m + 1}{p^3}.$$

De gevraagde getallen zijn alzoo:

$$\frac{m^2 + m + 1}{p^3} \quad \text{en} \quad \frac{m\,(m^2 + m + 1)}{p^3},$$

waarin nu voor m en p alle mogelijke geheele en gebrokene getallen kunnen worden genomen. Nemen wij bovendien deze waarden van m en p positief, dan is het klaar, dat ook de waarden van x en mx positief zullen worden.

VOORBEELDEN. Nemende $m = p = 1$, dan worden beide de getallen gelijk 3.

Nemende $m = 2$ en $p = 1$, dan worden de getallen 7 en 14, enz.

III. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK RZ.

Twee schepen A en B liggen op 28° 20′ noorderbreedte, en zeilen te gelijk van daar, te weten, A bewesten en B beoosten het zuiden, te zamen 27 mijlen, alwaar zij op gelijke breedte komen, zulks

(2) *Idem*, N°. 19.

zulks dat hunne veranderde breedte 8 minuten minder is, dan de gezeilde verheid van B, en zijn te zamen 21 mijlen van het middagrond geweken. Vrage op wat breedte zij gekomen zijn, en welke koers en verheid ieder gezeild heeft? (3)

OPLOSSING *door* J. VAN WIJK Rz.

Zij C *Fig.* 1. de plaats, waarvan de schepen zijn afgevaren, en A en B de plaatsen, waarop zij gekomen zijn, dan is AC + BC = 27 mijlen. Stellende dus BC = x, dan is AC = $27 - x$.

De veranderde breedte CD is 8 minuten, dat is 2 mijlen minder dan BC: bijgevolg is CD = $x - 2$. Daar nu, volgens het Voorstel, AB = 21 mijlen is, hebben wij:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \times BD,$$

of $$(27 - x)^2 = 21^2 + x^2 - 2 \times 21 \times BD:$$

dus $$BD = \frac{21^2 + x^2 - (27 - x)^2}{42} = \frac{9x - 48}{7},$$

waaruit $CD^2 = BC^2 - BD^2 = x^2 - \left(\frac{9x - 48}{7}\right)^2$; maar omdat CD = $x - 2$ is, zoo is $CD^2 = (x - 2)^2$, en deze twee waarden van CD^2 aan elkander gelijk stellende, verkrijgen wij de vergelijking

$$x^2 - \left(\frac{9x - 48}{7}\right)^2 = (x - 2)^2;$$

deze vergelijking met 49 vermenigvuldigd, en herleid, verandert in

$$81\,x^2 - 1060\,x + 2500 = 0,$$

waaruit $x = 10$ of $x = 3\frac{7}{81}$, en wij moeten dus deze gevallen ieder in het bijzonder onderzoeken.

Voor het eerste geval hebben wij BC = x = 10 mijlen en AC = $27 - x$ = 17 mijlen, waardoor de gezeilde verheden bepaald zijn. Hierdoor is CD = $x - 2$ = 8 mijlen of 32 minuten; de bekomene breedte is dus 28° 20′ − 32′ of 27° 48′. Voor de gezeilde koersen hebben wij eindelijk $Cos.\ BCD = \frac{CD}{BC}$ en

(3) J. A. VAN DAM, *Nieuwe Hoornsche Schatkamer. Besluit-Questien*, N°. 80.

en *Cos.* ACD $= \frac{CD}{AC}$, dus *Cos.* BCD $= \frac{8}{10} =$ *Cos.* 36° 52′ en *Cos* ACD $= \frac{8}{17} =$ *Cos.* 61° 56′, waardoor al het begeerde gevonden is.

Voor het tweede geval is BC $= x = 3\frac{7}{81}$ mijlen, dus AC $= 27 - x = 23\frac{74}{81}$ mijlen voor de gezeilde verheden; verder is CD $= x - 2 = 1\frac{7}{81}$ mijlen of 4′ 20″ ten naasten bij: de bekomene breedte is dus 28° 20′ − 4′ 20″ = 28° 15′ 40″. In dit geval vinden wij echter AD $= \frac{1935}{81}$ en DB $= -\frac{234}{81}$, zoodat hier DA − DB = 21 zou zijn; de schepen zouden alzoo niet beoosten en bewesten, maar beide bewesten het zuiden gezeild hebben, waaruit dan blijkt, dat alleen het voorgaande geval regtstreeks op de opgaaf toepasselijk is.

IV. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Wanneer men in den omtrek van eenen cirkel drie willekeurige punten P, Q en R aanneemt, Fig. 2, en door dezelve de regte lijnen PQ, QR en PR trekt, en men verder, uit eenig ander willekeurig punt F van den omtrek, loodlijnen FA, FB en FC op deze drie lijnen of derzelver verlengde trekt, zoo zijn de drie punten A, B en C in eene regte lijn gelegen. Men vraagt naar het bewijs?

OPGELOST *door* W. TOP WZ. en R. LOBATTO.

OPLOSSING *van* W. TOP WZ.

Vereenigen wij de punten A en B, en de punten B en C, dan zullen wij moeten bewijzen, dat de lijnen AB en BC ééne regte lijn uitmaken, en dit zal bewezen zijn, indien wij kunnen aantoonen, dat $\angle$ PBC $=$ $\angle$ RBA is.

Trekken wij te dien einde de lijnen FP, FQ en FR, dan is $\angle$ FPR $=$ $\angle$ FQR, omdat zij op denzelfden boog FR staan; maar $\angle$ FBP $=$ $\angle$ FAQ $= 90°$ zijnde, zoo is ook $\angle$ PFB $=$ $\angle$ QFA.

Op dezelfde wijze hebben wij, omdat $\angle$ PQF $=$ $\angle$ PRF en $\angle$ QFC $=$ $\angle$ FBR $= 90°$ is, $\angle$ CFQ $=$ $\angle$ BFR, en

trekkende van beide zijden den hoek BFQ af, zoo verkrijgen wij $\angle$ CFB $=$ $\angle$ QFR.

Trekkende verder van $\angle$ CFB $=$ $\angle$ QFR af $\angle$ PFB $=$ $\angle$ QFA, dan houden wij over $\angle$ CFP $=$ $\angle$ AFR.

Omdat nu de hoeken PCF en PBF beide regt zijn, zoo liggen de punten F, C, P en B in den omtrek van eenen zelfden cirkel, en omdat de hoeken CBP en CFP op dezelfde koorde CP van dezen cirkel ſtaan, zoo is $\angle$ CBP $=$ $\angle$ CFP.

Eveneens liggen de punten F, B, A en R in den omtrek van eenen zelfden cirkel, omdat de hoeken FBR en FAR beide regt zijn. In dezen cirkel ſtaan de hoeken ABR en AFR op dezelfde koorde AR, en dus is $\angle$ ABR $=$ AFR.

Wij hebben dan bewezen, dat $\angle$ ABR $=$ $\angle$ AFR, $\angle$ CBP $=$ $\angle$ CFP en $\angle$ AFR $=$ $\angle$ CFP is, waaruit dan noodzakelijk volgt: $\angle$ CBP $=$ $\angle$ ABR. De lijn BA is dus het verlengde van de lijn CB, hetgeen bewezen moest worden.

V. Voorstel.

Door U. Huguenin.

Wanneer men aan drie gegevene punten L, M en N, gelegen in eene parabool, de raaklijnen LR, PQ en RN trekt. Fig. 3, elkander in de punten P, Q en R doorſnijdende, zoo zijn deze doorſnijdingspunten met het brandpunt F in den omtrek van eenen zelfden cirkel gelegen. Men vraagt naar het bewijs.

Oplossing *door* I. R. Schmidt.

Trekken wij de voerſtralen FL, FM en FN, en trekken wij verder uit de raakpunten L, M en N lijnen evenwijdig met de as XY, dan zijn de hoeken, die in de figuur met p, q en r zijn aangeteekend, ieder in het bijzonder, aan elkander gelijk.

Trekken wij nu LG loodregt op de as, dan is, wanneer wij den parameter a ſtellen, uit de bekende eigenſchap van de parabool, FG $=$ FL $-\frac{1}{2}a = v - \frac{1}{2}a$; maar $\angle$ LFG $= 2p$ zijnde, is ook FG $=$ FL $Cos.\ 2p = v\ Cos.\ 2p$, en dit geeft ons de vergelijking $v - \frac{1}{2}a = v\,Cos.\ 2p$, of $v(1 - Cos.\ 2p) = \frac{1}{2}a$,

 waar-

waaruit $v = \frac{a}{2(1 - Cos. 2p)} = \frac{a}{4 Sin^2. p}$. Daar nu op gelijke wijze gevonden wordt $v' = \frac{a}{4 Sin^2. q}$, zoo hebben wij:

$$v : v' = \frac{a}{4 Sin^2. p} : \frac{a}{4 Sin^2. q} = Sin^2. q : Sin^2. p.$$

Dat is, *In elke parabool staan de voerstralen tot elkander in omgekeerde reden als de vierkanten der sinussen van de hoeken, welke deze voerstralen met hunne overeenkomstige raaklijnen maken.*

Trekken wij verder RF, en stellen wij alles zoo als in de figuur is aangewezen, dan hebben wij in de driehoeken RFL en RFN de volgende evenredigheden:

$$Sin. x : Sin. p = v : k$$
$$Sin. q : Sin. y = k : v'$$

en de overeenkomstige termen vermenigvuldigende,

$$Sin. q \,.\, Sin. x : Sin. p \,.\, Sin. y = v : v' = Sin^2. q : Sin^2. p;$$

deelen wij nu de voorgaande termen door $Sin. q$ en de volgende door $Sin. p$, dan komt er:

$$Sin. x : Sin. y = Sin. q : Sin. p,$$

dus $Sin. x + Sin. y : Sin. x - Sin. y = Sin. q + Sin. p : Sin. q - Sin\ p$,
dat is $Tang. \frac{1}{2}(x+y) : Tang. \frac{1}{2}(x-y) = Tang. \frac{1}{2}(q+p) : Tang. \frac{1}{2}(q-p)$

Het is nu uit de figuur klaar, dat, wanneer QH evenwijdig aan de as getrokken wordt, $\angle$ QRH $= p$ en $\angle$ PRH $= q$ is. Wij hebben alzoo $x + y = p + q$, en omdat hierdoor de voorgaande termen onzer laatste evenredigheid gelijk worden, moeten ook de beide volgende gelijk zijn, waardoor $x - y = q - p$; dit geeft ons bijgevolg $x = q$ en $y = p$.

Wanneer dus, uit een zelfde punt R, twee raaklijnen aan eene parabool getrokken worden en men uit dit punt ook eene lijn naar het brandpunt trekt, dan zal deze lijn met elke der raaklijnen eenen hoek maken, welke gelijk is aan den hoek, welke de andere raaklijn met haren overeenkomstigen voerstraal maakt.

Hieruit volgt verder nog deze stelling. *Wanneer uit eenig punt R, waaruit twee raaklijnen RL en RN aan eene parabool getrokken zijn, eene lijn RF naar het brandpunt getrokken wordt, en men uit R eene lijn RH trekt, welke met eene dezer raaklijnen eenen hoek maakt, gelijk aan den hoek, welke RF met de andere*

raak-

raaklijn maakt, dan zal deze laatste lijn RH evenwijdig met de as van de parabool loopen.

Het bewijs der opgegevene stelling heeft nu geene zwarigheid meer; want even als wij bewezen hebben dat ∠ QRF = *q* is, blijkt het ook, dat ∠ QPF = *q* moet zijn. Uit P zijn namelijk twee raaklijnen PM en PN aan de parabool, en eene lijn PF naar het brandpunt getrokken, en de hoek QPF, welke PF met de raaklijn PQ maakt, moet dus gelijk zijn aan den hoek *q*, welke de andere raaklijn met den toebehoorenden voerstraal FN maakt.

Daar dan de hoeken QRF en QPF aan elkander gelijk zijn, zoo liggen de punten R en P in een zelfde cirkel-segment, dat de hoek *q* bevat en op de koorde QF beschreven is. De punten P, R, Q en F liggen alzoo in den omtrek van eenen zelfden cirkel.

VI. VOORSTEL.

Door U. Huguenin.

Er zijn vier regte lijnen AB, BC, CD en DE Fig. 4. in stelling gegeven, welke elkander snijden in A, B, C, D en E. Men vraagt eene parabool te beschrijven, welke deze vier lijnen aanraakt?

Oplossing *door* I. R. Schmidt.

Wanneer men de voorgaande stelling, benevens de stellingen, welke wij in derzelver bewijs hebben ingevlochten, wel begrepen heeft, dan is de oplossing van ons vraagstuk zeer gemakkelijk.

Daar namelijk A, B en C de snijpunten van drie raaklijnen zijn, zoo laten wij door deze punten eenen cirkel gaan, en dan zal, volgens de voorgaande stelling, het brandpunt ergens in den omtrek van dezen cirkel gelegen zijn.

Beschrijven wij door C, D en E eenen cirkel, dan zal het brandpunt, om dezelfde reden, ook in dezen tweeden cirkel gelegen zijn. Het snijpunt F dezer twee cirkels zal dus het brandpunt van de gevraagde parabool wezen. Daar verder deze twee cir-

cirkels het punt C gemeen hebben, moeten zij elkander noodzakelijk nog in één ander punt snijden. Hieruit volgt, dat het Voorstel met meer dan ééne oplossing kan toelaten.

Trekken wij nu DF, en maken wij ∠ EDG = ∠ CDF, dan zal de lijn DG, ingevolge de laatste stelling, welke wij, in de oplossing van het voorgaande Voorstel, bewezen hebben, evenwijdig met de as der parabool loopen. Trekkende dus door F eene onbepaalde lijn XY evenwijdig aan DG, dan zal XY de as van de gevraagde parabool zijn.

De raakpunten van deze parabool met de vier gegevene lijnen worden nu ook gemakkelijk bepaald; want verlengen wij deze gegevene lijnen, tot zij de as snijden in P, P′, P″ en P‴ en maken wij FQ = FP, FQ′ = FP′, FQ″ = FP″ en FQ‴ = FP‴, dan zullen, uit hoofde van de bekende eigenschappen der subtangenten en der voerstralen, Q, Q′, Q″ en Q‴ de begeerde raakpunten zijn.

Om den top te bepalen, is het genoegzaam uit een der raakpunten Q‴ eene loodlijn Q‴R‴ op de as te laten vallen, en de subtangens R‴P‴ midden door te deelen in A, dan zal A de top zijn. De top en het brandpunt bekend zijnde, kan eindelijk de parabool door een der bekende middelen beschreven worden.

VII. VOORSTEL,

Door R. VAN WIJK Jz.

Een twaalfhoekig getal te vinden, dat gelijk is aan den cubus van zijnen wortel?

OPGELOST *door* R. VAN WIJK Jz., R. LOBATTO, H. ROODHUIJZEN, W. TOP Wz., F. W. SCHULD, G. J. SARLET, M. B. JUNG, H. VAN KRAAIJENOORD, H. FOEKES BAKKER en J. PERREBOOM.

OPLOSSING *van* R. VAN WIJK Jz.

Volgens de bekende formule wordt elk veelhoekig getal, waarvan de wortel x en het aantal der hoeken n is, voorgesteld door $\frac{1}{2}x((n-2)x-(n-4))$. De algemeene formule voor de twaalfhoekige getallen is dus $\frac{1}{2}x(10x-8)$ of $x(5x-4)$, en het Voorstel geeft ons alzoo de vergelijking: $x^3 = x(5x-4)$,

of

of $x^2 = 5x - 4$, dat is $x^2 - 5x = -4$, waaruit men vindt $x = 1$ of $x = 4$. Het twaalfhoekig getal, dat aan de vraag voldoet, is bijgevolg 1 (5 — 4) of 4 (20 — 4), dat is, er bestaan twee antwoorden, namelijk 1 of 64.

VIII. VOORSTEL.

Door R. van Wijk Jz.

Men vraagt twee getallen, wier ſom een rationale cubus en wier verſchil een rationaal quadraat is.

Opgelost *door* M. B. Jung, R. Lobatto, J. Peereboom, R. van Wijk Jz., F. W. Schuld, W. Top Wz., H. Roodhuijzen, H. Foekes Barker en H. van Kraaijenoord.

Oplossing *van* M. B. Jung.

Stel voor de getallen x en y. Daar derzelver ſom een cubus, en derzelver verſchil een quadraat moet zijn, zullen wij de wortels a en b noemen, en dan hebben wij:

$$x + y = a^3 \quad \text{en} \quad x - y = b^2.$$

Het Voorſtel is dus eigenlijk niets anders dan het vinden van twee getallen, waarvan de ſom en het verſchil gegeven is, en wij vinden:

$$x = \tfrac{1}{2}(a^3 + b^2) \quad \text{en} \quad y = \tfrac{1}{2}(a^3 - b^2),$$

waarin nu voor a en b alle mogelijke geheele en gebrokene getallen kunnen genomen worden.

Sluit men de negatieve getallen van de oplosſing uit, dan moet b^2 kleiner dan a^3 genomen worden.

Wil men voor x en y geheele getallen hebben, dan moeten er niet alleen voor a en b geheele getallen genomen worden, maar dan moeten daarenboven a en b beide even of beide oneven zijn.

IX. VOORSTEL.

Door R. Lobatto.

Van eenen driehoek gegeven zijnde de drie lijnen, welke uit de hoekpunten tot het midden der overſtaande zijden gaan, zoo wordt er

gevraagd den driehoek te bepalen, zoo door constructie als door berekening?

OPGELOST *door* R. LOBATTO, J. VAN DER STOK, W. TOP Wz., en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* R. LOBATTO.

Zij ABC, *Fig.* 5., de begeerde driehoek, en laten CD, AE en BF de drie gegevene lijnen zijn, welke de zijden AB, BC en AC midden door deelen. Stel CD $= a$, AE $= a'$, BF $= a''$, AB $= x$, BC $= x'$ en AC $= x''$, dan is, volgens de *Meetkunde* van DE GELDER. *Eerste druk* §. 232,

$$x^2 + x'^2 = \tfrac{1}{2}\, x''^2 + 2a''^2$$
$$x'^2 + x''^2 = \tfrac{1}{2}\, x^2 + 2a^2$$
$$x''^2 + x^2 = \tfrac{1}{2}\, x'^2 + 2a'^2$$

en door de termen over te brengen, en alles met twee te vermenigvuldigen,

$$2\,x^2 + 2\,x'^2 - x''^2 = 4a''^2 \quad . \; . \; . \quad (1)$$
$$-\,x^2 + 2\,x'^2 + 2\,x''^2 = 4a^2 \quad . \; . \; . \quad (2)$$
$$2\,x^2 - x'^2 + 2\,x''^2 = 4a'^2 \quad . \; . \; . \quad (3)$$

waarvan de som is,

$$3\,(x^2 + x'^2 + x''^2) = 4\,(a^2 + a'^2 + a''^2)$$

en hieruit leeren wij al aanstonds, *dat, in elken driehoek, de som der vierkanten van de zijden in reden staat tot de som der vierkanten van de lijnen, die uit de hoekpunten tot het midden der overstaande zijden gaan, als* 4 *tot* 3.

Vermenigvuldigt men nu de vergelijkingen (1), (2) en (3) ieder met 3, en trekt elk in het bijzonder van tweemaal de laatste vergelijking af, dan verkrijgen wij:

$$9\,x^2 = 8a'^2 + 8a''^2 - 4a^2$$
$$9\,x'^2 = 8a^2 + 8a''^2 - 4a'^2$$
$$9\,x''^2 = 8a'^2 + 8a^2 - 4a''^2$$

waaruit dan gevonden wordt:

$$x = \tfrac{2}{3}\sqrt{(2a'^2 + 2a''^2 - a^2)}$$
$$x' = \tfrac{2}{3}\sqrt{(2a^2 + 2a''^2 - a'^2)}$$
$$x'' = \tfrac{2}{3}\sqrt{(2a^2 + 2a'^2 - a''^2)}$$

welke formulen de zijden door berekening doen kennen.

Om door deze formule tot eene gemakkelijke constructie te ko-

komen, merken wij op, dat indien wij uit de vergelijkingen (1), (2) en (3) de waarden van a, a' en a'' afzonderen, voor dezelve gevonden wordt:

$$a = \tfrac{1}{2} \sqrt{(2x'^2 + 2x''^2 - x^2)}$$
$$a' = \tfrac{1}{2} \sqrt{(2x^2 + 2x''^2 - x'^2)}$$
$$a'' = \tfrac{1}{2} \sqrt{(2x^2 + 2x'^2 - x''^2)}.$$

Hierdoor worden de deellijnen bekend als de zijden gegeven zijn, en het blijkt hieruit, dat indien wij uit het dubbel der drie gegevene lijnen, $2a$, $2a'$ en $2a''$, dat is uit eenen driehoek, zamenstellen, en in dezelve lijnen uit de hoekpunten naar het midden der overstaande zijden trekken, wij, deze lijnen door c, c' en c'' uitdrukkende, zullen hebben:

$$c = \sqrt{(2a'^2 + 2a''^2 - a^2)}$$
$$c' = \sqrt{(2a^2 + 2a''^2 - a'^2)}$$
$$c'' = \sqrt{(2a^2 + 2a'^2 - a''^2)}$$

en vergelijken wij hiermede de waarde van x, x' en x'', dan is het duidelijk, dat wij verkrijgen:

$$x = \tfrac{2}{3} c; \quad x' = \tfrac{2}{3} c'; \quad x'' = \tfrac{2}{3} c''.$$

Daar nu, zoo als genoegzaam bekend is, de lijnen c, c' en c'' elkander in een zelfde punt snijden, en wel zoodanig, dat het deel van elke dezer lijnen, begrepen tusschen het snijpunt en het hoekpunt, ⅔ van de geheele lijn is, zoo volgt hieruit deze eenvoudige constructie.

Stel uit het dubbel der drie gegevene lijnen eenen driehoek zamen, en trek in denzelven lijnen uit de hoekpunten tot het midden der overstaande zijden, dan zullen de afstanden, welke het snijpunt dezer drie lijnen van de hoekpunten heeft, de zijden van den begeerden driehoek zijn.

ANDERE CONSTRUCTIE. *Door* J. VAN DER STOK.

Onderstel, dat ABC de gevraagde driehoek is, en dat alzoo AE, BF en CD de gegevene lijnen zijn, dan is het bekend, dat deze lijnen elkander in een zelfde punt P snijden, en wel zoodanig, dat DP = ⅓ CD, PB = ⅔ FB en AP = ⅔ AE zal zijn. Trekkende dan uit D de lijnen DQ en DR evenwijdig aan BP en AP, dan zal, omdat AD = DB is, in het parallelogram PRQD, de zijde PR = QD = ½ PB = ⅓ FB en, op dezelf-

zelfde wijze, de zijde PQ $=$ DR $= \frac{1}{3}$ AE wezen. De vier zijden en de diagonaal van het parallelogram PRQD zijn dus geheel bekend, en dit geeft ons aanleiding tot de volgende conſtructie.

Conſtrueer eenen driehoek DPR, waarvan de zijden gelijk zijn aan één derde der drie gegevene lijnen, en voltooi het parallelogram RDQR.

Verleng DP, PQ en PR en maak PC $=$ 2 PD, PA $=$ 2 PQ en PB $=$ 2 PR, dan zullen A, B en C de hoekpunten van den begeerden driehoek zijn.

X. VOORSTEL,

Door R. LOBATTO.

Men vraagt het middelpunt van zwaarte te vinden van eenig deel des inhouds van eene cycloide, begrepen tusſchen den boog, van den top afgerekend, en de regthoekige coördinaten tot dezen boog behoorende?

OPLOSSING *door* R. LOBATTO.

Zij ADB, *Fig. 6*, eene cycloide, D de top, AP de bazis en CD de middellijn van den voortbrengenden cirkel, welke middellijn hier te gelijker tijd de as der cycloide is, dan zullen wij het zwaartepunt van het ſtuk DM′C moeten bepalen. Stellen wij DM $= x$, MP $= y$ en DC $= 2r$, dan is AB $= 2r\pi$, en de vergelijking der cycloide is:

$$x = \sqrt{(2rx - x^2)} + r \textit{ Boog Sin. vers. } \frac{x}{r}.$$

Stellen wij nu den hoek DMp $= \phi$, dan is *Boog Sin. vers.* $\frac{x}{r} = \phi$, dus $\frac{x}{r} = \textit{Sin. vers. } \phi = 1 - \textit{Cos. } \phi$ en $x = r(1 - \textit{Cos.}\,\phi)$, waardoor $\sqrt{(2rx - x^2)} = \sqrt{(r^2 - (r - x)^2)} = r \textit{ Sin. } \phi$, en hierdoor wordt onze vergelijking:

$$y = r \textit{ Sin. } \phi + r\phi = r(\phi + \textit{Sin. } \phi).$$

Stellen wij nu het zwaartepunt van het ſtuk DM′P in Z, dan is in de Statica bewezen, dat men zal hebben:

$$DZ' = \frac{\int xy\partial x}{\int y\partial x} \text{ en } ZZ' = \frac{1}{2} \times \frac{\int y^2\partial x}{\int y\partial x}$$

en

en het zal er dus op aankomen, de waarde van deze twee uitdrukkingen te bepalen,

Daar nu $x = r(1 - Cos.\ \phi)$ is, zoo is $\delta x = r\ Sin\ \phi\delta\phi$, en wanneer wij deze waarde, benevens die van y, overbrengen in $\int y\delta x$, welke de waarde van den inhoud DM′P voorstelt, dan hebben wij:

$$I = \int y\delta x = \int r^2 (\phi + Sin.\ \phi)\ Sin.\ \phi\delta\phi$$
$$= r^2 \left\{ \int \phi\ Sin.\ \phi\delta\phi + \int Sin^2.\ \phi\delta\phi \right\}.$$

Maken wij nu gebruik van de bekende formule $\int X\delta Y = XY - \int Y\delta X$, dan hebben wij,

$$\int \phi\ Sin.\ \phi\delta\phi = -\int \phi\delta . Cos.\ \phi = -\phi\ Cos.\ \phi + \int Cos.\ \phi\delta\phi$$
$$= -\phi\ Cos.\ \phi + Sin.\ \phi$$
$$\int Sin^2.\ \phi\delta\phi = -\int Sin.\ \phi . \delta . Cos.\ \phi = -Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi + \int Cos^2.\ \phi\delta\phi$$
$$= -Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi + \int (1 - Sin^2.\ \phi)\ \delta\phi$$
$$= - Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi + \phi - \int Sin^2.\ \phi\delta\phi$$

dus $\int Sin^2.\ \phi\delta\phi = \frac{1}{2}\phi - \frac{1}{2} Sin.\ \phi . Cos.\ \phi$

waaruit dan volgt,

$$I = \int y\delta x = r^2 \left\{ -\phi\ Cos.\ \phi + Sin\ \phi + \tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{2} Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi \right\}$$
$$= r^2 \left\{ \tfrac{1}{2}\phi + Sin.\ \phi - (\tfrac{1}{2} Sin.\ \phi + \phi)\ Cos.\ \phi \right\}$$

welke geene verbetering noodig heeft, omdat zij voor $\phi = 0$ verdwijnt.

Gaan wij nu over tot het bepalen van $\int xy\delta x$, dan hebben wij vooreerst:

$$\int xy\delta x = r \int y\delta x (1 - Cos\ \phi) = r \int y\delta x - r \int y\ Cos.\ \phi\delta x.$$

Daar nu $\int y\delta x = I$, en $\delta x = r\ Sin.\ \phi\delta\phi$ is, zoo verandert dit onze formule in:

$$\int xy\delta x = r\,I - r^2 \int y\ Sin.\ \phi\ Cos.\ \phi\delta\phi$$
$$= r\,I - r^2 \int y\ Sin.\ \phi . \delta\ Sin.\ \phi$$
$$= r\,I - \tfrac{1}{2} r^2 \int y . \delta . Sin^2.\ \phi$$
$$= r\,I - \tfrac{1}{2} r^2\, y\ Sin^2.\ \phi + \tfrac{1}{2} r^2 \int Sin^2.\ \phi\delta y$$

Maar $y = r(\phi + Sin.\ \phi)$ zijnde, is $\delta y = r(1 + Cos.\ \phi)\ \delta\phi$ en bijgevolg:

$$\int Sin^2.\ \phi\delta y = r \int Sin^2.\ \phi\ (1 + Cos.\ \phi)\ \delta\phi$$
$$= r \int Sin^2.\ \phi\delta\phi + r \int Sin^2.\ \phi . Cos.\ \phi\delta\phi$$

Nu hebben wij zoo aanstonds gevonden,

$$\int Sin^2.\ \phi\delta\phi = \tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{2} Sin.\ \phi . Cos.\ \phi$$

en

en wij hebben daarenboven,

$$\int Sin^2.\,\phi\,.\,Cos.\,\phi\,\partial\phi = \int Sin^2.\,\phi\,.\,\partial\,.\,Sin.\,\phi = \tfrac{1}{3}\,Sin^3.\,\phi$$

zoodat wij vinden,

$$\int Sin^2.\,\phi\,\partial y = r\,(\tfrac{1}{2}\,\phi - \tfrac{1}{2}\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi + \tfrac{1}{3}\,Sin^3.\,\phi),$$

waardoor wij verkrijgen:

$$\int xy\partial x = r\,\mathrm{I} - \tfrac{1}{2}r^2 y\,Sin^2.\,\phi + \tfrac{1}{2}r^3\,(\tfrac{1}{2}\phi - \tfrac{1}{2}\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi + \tfrac{1}{3}\,Sin^3.\,\phi)$$

en wanneer wij hierin de waarde van y brengen,

$$\int xy\partial x = r\,\mathrm{I} - \tfrac{1}{2}\,r^3\phi\,Sin^2.\,\phi - \tfrac{1}{3}\,r^3\,Sin^3\,\phi + \tfrac{1}{4}\,r^3\,\phi - \tfrac{1}{4}\,r^3\,Sin.\,\phi\,Cos\,\phi$$

en brengende hierin de waarde van I, dan komt er eindelijk:

$$\int xy\partial x = r^3\left\{\tfrac{5}{4}\phi - \phi\,Cos.\,\phi - \tfrac{1}{2}\phi\,Sin^2.\,\phi + Sin.\,\phi - \tfrac{1}{3}\,Sin^3.\,\phi - \tfrac{3}{4}\,Sin.\,\phi\,Cos\,\phi\right\}$$

$$= r^3\left\{\phi(\tfrac{5}{4} - Cos.\,\phi - \tfrac{1}{2}\,Sin^2.\,\phi) + Sin.\,\phi\,(1 - \tfrac{1}{3}\,Sin^2.\,\phi - \tfrac{3}{4}\,Cos.\,\phi)\right\}$$

welke mede geene verbetering noodig heeft, omdat de ſom der momenten voor $\phi = 0$ moet verdwijnen.

Er blijft ons dan nog over de waarde van $\int y^2\partial x$ te bepalen, hiertoe hebben wij:

$$\int y^2\partial x = \int y\,.\,y\partial x = \int y\partial\,\mathrm{I} = y\,\mathrm{I} - \int \mathrm{I}\,\partial y.$$

Daar nu I en ∂y boven gevonden zijn, hebben wij verder:

$$\int \mathrm{I}\,\partial y = \int r^2(\tfrac{3}{2}\phi + Sin.\,\phi - \tfrac{1}{2}\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi - \phi\,Cos.\,\phi) \times r\,(1 + Cos.\,\phi)\,\partial\phi$$

$$= r^3\int\left\{\tfrac{1}{2}\,\phi + Sin.\,\phi + \tfrac{1}{2}\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi - \tfrac{1}{2}\,\phi\,Cos.\,\phi - \tfrac{1}{2}\,Sin.\,\phi\,Cos^2.\,\phi - \phi\,Cos^2\,\phi\right\}\partial\phi$$

$$\text{of } \int \mathrm{I}\,\partial y = r^3\left\{\tfrac{1}{4}\phi^2 - Cos.\,\phi + \tfrac{1}{4}\,Sin^2.\,\phi - \tfrac{1}{2}\int\phi\,Cos\,\phi\,\partial\phi - \tfrac{1}{2}\int Sin.\,\phi\,Cos^2.\,\phi\,\partial\phi - \int\phi\,Cos^2.\,\phi\,\partial\phi\right\}$$

Nu is $\int \phi\,Cos.\,\phi\,\partial\phi = \phi\,Sin.\,\phi - \int Sin.\,\phi\,\partial\phi = \phi\,Sin.\,\phi + Cos\,\phi$

$$\int Sin.\,\phi\,Cos^2.\,\phi\,\partial\phi = -\int Cos^2.\,\phi\,\partial\,.\,Cos.\,\phi = -\tfrac{1}{3}\,Cos^3.\,\phi$$

en

$$\int \phi\,Cos^2.\,\phi\,\partial\phi = \phi\,Sin\,\phi\,Cos.\,\phi - \int Sin.\,\phi\,(Cos.\,\phi - \phi\,Sin.\,\phi)\,\partial\phi$$

$$= \phi\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi - \tfrac{1}{2}\,Sin^2.\,\phi + \int(1 - Cos^2.\,\phi)\,\phi\,\partial\phi$$

$$= \phi\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi - \tfrac{1}{2}\,Sin^2.\,\phi + \tfrac{1}{2}\phi^2 - \int Cos^2.\,\phi.\,\phi\,\partial\phi$$

waaruit,

$$\int \phi\,Cos^2.\,\phi\,\partial\phi = \tfrac{1}{2}\,\phi\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi - \tfrac{1}{4}\,Sin^2\,\phi + \tfrac{1}{4}\phi^2$$

en wanneer wij alle deze integralen vereenigen, dan komt er:

$$\int \mathrm{I}\,\partial y = r^3\left\{\tfrac{1}{4}\phi^2 - Cos\,\phi + \tfrac{1}{4}\,Sin^2.\,\phi - \tfrac{1}{2}\phi\,Sin.\,\phi - \tfrac{1}{2}\,Cos.\,\phi + \tfrac{1}{6}\,Cos^3.\,\phi - \tfrac{1}{2}\phi\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi + \tfrac{1}{4}\,Sin^2.\,\phi - \tfrac{1}{4}\,\phi^2\right\}$$

dat is, na herleiding,

$$\int \mathrm{I}\,\partial y = r^3\left\{-\tfrac{3}{2}\,Cos.\,\phi + \tfrac{1}{2}\,Sin^2.\,\phi + \tfrac{1}{6}\,Cos^3.\,\phi - \tfrac{1}{2}\phi\,Sin.\,\phi - \tfrac{1}{2}\phi\,Sin.\,\phi\,Cos.\,\phi\right\}$$

en

en wanneer wij dit in

$$\int y^2 \partial x = y\,\mathrm{I} - \int \mathrm{I}\,\partial y$$

substitueren, dan verkrijgen wij, na voor I en y hare waarden geschreven te hebben,

$$\int y^2 \partial x = r^3 \left\{ \tfrac{1}{2}\phi^2 + 2\phi\,Sin.\phi + \tfrac{1}{2}\,Sin^2.\phi - \phi\,Sin.\phi\,Cos\,\phi \right.$$
$$\left. - \phi^2\,Cos.\phi + Cos.\phi + \tfrac{1}{3}\,Cos^3.\phi \right\} + C,$$

Om de constante C te bepalen, merken wij op, dat voor $\phi = 0$ de som der momenten $\int y^2 \partial x$ moet verdwijnen. Dit geeft ons $C = -\tfrac{4}{3}\,r^3$, waardoor de verbeterde integraal wordt:

$$\int y^2 \partial x = r^3 \left\{ \tfrac{1}{2}\phi^2(1 - 2\,Cos.\phi) + \phi\,Sin.\phi(2 - Cos.\phi) + \tfrac{1}{2}\,Sin^2.\phi + Cos.\phi \right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{3}\,Cos^3.\phi - \tfrac{4}{3} \right\}.$$

De waarde van $\int y \partial x$, $\int xy \partial x$ en $\int y^2 \partial x$ alzoo bepaald hebbende, verkrijgen wij, door dezelve in de uitdrukkingen

$$DZ' = \frac{\int xy \partial x}{\int y \partial x} \quad \text{en} \quad ZZ' = \frac{\tfrac{1}{2}\int y^2 \partial x}{\int y \partial x}$$

te substitueren,

$$DZ' = r \times \frac{\phi(\tfrac{3}{4} - Cos.\phi - \tfrac{1}{2}Sin^2.\phi) + Sin.\phi(1 - \tfrac{1}{3}Sin^2.\phi - \tfrac{3}{4}Cos.\phi)}{\phi(\tfrac{1}{2} - Cos\,\phi) + Sin.\phi(1 - \tfrac{1}{2}\,Cos.\phi)}$$

$$ZZ' = \tfrac{1}{2}r \times \frac{\tfrac{1}{2}\phi^2(1 - 2\,Cos.\phi) + \phi\,Sin.\phi(2 - Cos.\phi) + \tfrac{1}{2}Sin^2.\phi + Cos.\phi + \tfrac{1}{3}Cos^3.\phi - \tfrac{4}{3}}{\phi(\tfrac{1}{2} - Cos.\phi) + Sin.\phi(1 - \tfrac{1}{2}\,Cos.\phi)}$$

Nemen wij hierin $\phi = 180° = \pi$, dan vinden wij, ter bepaling van het zwaartepunt van het vlak DPBCD,

$$DZ' = r \times \frac{\pi(\tfrac{3}{4} + 1)}{\pi(\tfrac{1}{2} + 1)} = r \times \frac{\tfrac{7}{4}}{\tfrac{3}{2}} = \tfrac{7}{6}\,r$$

$$ZZ' = \tfrac{1}{2}\,r \times \frac{\tfrac{3}{2}\pi^2 - \tfrac{8}{3}}{\tfrac{3}{2}\pi} = \tfrac{1}{2}\,r\,(\pi - \tfrac{16}{9}.\tfrac{1}{\pi}) = r(\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{8}{9}.\tfrac{1}{\pi}).$$

Nemen wij tot tweede voorbeeld $\phi = 90° = \tfrac{1}{2}\,\pi$, dan komt er, ter bepaling van het zwaartepunt des vlaks DmND,

$$DZ' = r \times \frac{\tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{2}{3}}{\tfrac{1}{4}\pi + 1} = r \times \frac{3\pi + 16}{6\pi + 24} = \tfrac{1}{6}\,r \times \frac{3\pi + 16}{\pi + 4}$$

$$ZZ' = \tfrac{1}{2}\,r \times \frac{\tfrac{1}{8}\pi^2 + \pi - \tfrac{5}{6}}{\tfrac{1}{4}\pi + 1} = \tfrac{1}{24}\,r \times \frac{6\pi^2 + 48\pi - 40}{\pi + 4}.$$

Aanmerkingen, 1°. Begeert men het zwaartepunt van het stuk PDP, dan zal men alleen de waarde van DZ′ behoeven te berekenen. Omdat dit zwaartepunt noodzakelijk in de as DC moet liggen, waardoor alsdan Z′Z gelijk 0 wordt.

2°.

2°. Wilde men het zwaartepunt vinden van eenig stuk $M'm'$ pPM', dan zoude alle onze berekeningen hetzelfde blijven; doch dan zouden de integralen $\int y\partial x$, $\int y^2\partial x$ en $\int xy\partial x$ zoodanig moeten worden bepaald, dat zij niet voor $\phi = o$, maar voor $\phi = a$ verdwijnen. Voor $\phi = 90°$ zou men alsdan de formulen voor het zwaartepunt van het vlak $m'pNM$ verkrijgen, voor $\phi = 180°$ de formulen voor het zwaartepunt van het vlak $m'pBC$, en zoo voor alle andere.

3°. Door onze formulen laten zich ook de zwaartepunten van vele andere stukken der figuur bepalen; wilde men, bij voorbeeld, het zwaartepunt van het vlak pPq bepalen, dan zou men ingevolge de tweede aanmerking, eerst het zwaartepunt van de figuur $m'pPM'$ zoeken, en alsdan, van het grondbeginsel gebruik makende, *dat het moment voor eenig vlak, dat gelijk is aan de som of het verschil van eenige andere vlakken, gelijk is aan de som of het verschil van de momenten dezer andere vlakken*, het zwaartepunt van het vlak pPq vinden door het moment van dit vlak, ten opzigte van twee asfen, gelijk te stellen aan het verschil der momenten van de vlakken $m'pPM'$ en $m'pqM'$. De integralen zoo genomen zijnde, dat zij voor $\phi = a$ verdwijnen, zou men, door $\phi = 90°$ en $\phi = 180°$ te stellen, de zwaartepunten der vlakken pQN en pMB bepalen.

XI. Voorstel.

Door J. van der Stok.

Wanneer men uit eenig punt, in het vlak van eenen driehoek, loodlijnen op de drie zijden of derzelver verlengde laat vallen, dan zal, waar men dit punt ook neme, de som der producten, welke men verkrijgt door elke dezer loodlijnen te vermenigvuldigen, met de sinus van den hoek, gelegen over de zijde, waarop die loodlijn valt, altijd even groot zijn. Men vraagt dit te bewijzen, en bovendien te bepalen, hoe groot deze constante grootheid zij?

Opgelost door J. van der Stok en R. Lobatto.

Oplossing van J. van der Stok.

Laat ABC, *Fig.* 7, de driehoek zijn, en onderstellen wij, dat uit twee verschillende punten, D en E, loodlijnen op de drie zij-

zijden zijn nedergelaten, dan kunnen wij ieder dezer punten als den top aanmerken van drie driehoeken, waarin de gegevene driehoek is verdeeld, en dit geeft ons aanleiding tot de twee volgende vergelijkingen:

$$DF \times AB + DG \times AC + DH \times BC = 2 \triangle ABC$$
$$EI \times AB + EK \times AC + EL \times BC = 2 \triangle ABC$$

waaruit terstond volgt:

$$DF \times AB + DG \times AC + DH \times BC = EI \times AB + EK \times AC + EL \times BC$$

welke vergelijking, door AB gedeeld, geeft:

$$DF + DG \times \frac{AC}{AB} + DH \times \frac{BC}{AB} = EI + EK \times \frac{AC}{AB} + EL \times \frac{BC}{AB}$$

Daar wij nu hebben:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{Sin.\ B}{Sin.\ C} \text{ en } \frac{BC}{AB} = \frac{Sin.\ A}{Sin.\ C}$$

zoo verandert deze vergelijking in:

$$DF + DG \times \frac{Sin.\ B}{Sin.\ C} + DH \times \frac{Sin.\ A}{Sin.\ C} = EI + EK \times \frac{Sin.\ B}{Sin.\ C} + EL \times \frac{Sin.\ A}{Sin.\ C}$$

en alles met *Sin.* C vermenigvuldigende:

$$DF \times Sin.\ C + DG \times Sin.\ B + DH \times Sin.\ A = \ldots$$
$$\ldots \ldots EI \times Sin.\ C + EK \times Sin.\ B + EL \times Sin.\ A$$

waardoor onze stelling bewezen is.

De punten D en E kunnen naar welgevallen genomen worden; alleen merken wij aan, dat indien dezelve buiten den driehoek liggen, de loodlijnen, welke op den uitwendigen kant der zijden vallen, als negatief moeten worden aangemerkt.

1°. Gevolg. Nemen wij aan, dat het punt E in een der hoekpunten gelegen is, dan zijn de loodlijnen, welke uit dit punt op de aangrenzende zijden vallen, beide gelijk nul; wij verkrijgen alzoo, door het punt E achtervolgens in de punten B, C en A te plaatsen:

$$DF \times Sin.\ C + DG \times Sin.\ B + DH \times Sin.\ A = BO \cdot Sin.\ B$$
$$DF \times Sin.\ C + DG \times Sin.\ B + DH \times Sin.\ A = CQ \cdot Sin.\ C$$
$$DF \times Sin.\ C + DG \times Sin.\ B + DH \times Sin.\ A = AP \times Sin.\ A$$

en hieruit volgt nog:

$$BO \times Sin.\ B = CQ \times Sin.\ C = AP \times Sin.\ A$$

dat is in woorden:

De som der produkten, welke men verkrijgt, door de loodlijnen,

welke uit eenig punt op de drie zijden van eenen driehoek worden nedergelaten, elk in het bijzonder te vermenigvuldigen met den sinus van den hoek, die over de zijde staat, waarop die loodlijn valt, is gelijk aan het produkt van eene der loodlijnen, welke uit een hoekpunt op de overstaande zijde valt, met den sinus van den hoek, waaruit die loodlijn getrokken is.

De produkten, die men verkrijgt, door elke der loodlijnen, die men uit de hoekpunten eens driehoeks op de overstaande zijden nederlaat, te vermenigvuldigen met den sinus van den hoek, waaruit die loodlijn getrokken is, zijn even groot.

2°. Gevolg. Stellende den inhoud van den driehoek ABC, gelijk I, dan is:

$$BO = \frac{2\,I}{AC} \text{ en } Sin.\ B = \frac{2\,I}{AB \times BC}$$

en wanneer wij deze te zamen vermenigvuldigen, komt er:

$$BO \times Sin.\ B = CQ \times Sin.\ C = AP.\ Sin.\ A = \frac{4\,I^2}{AB \times BC \times AC}$$

en wij hebben alzoo ook:

$$DF \times Sin.\ C + DG \times Sin.\ B + DH \times Sin.\ A = \frac{4\,I^2}{AB \times BC \times AC}$$

De som der produkten, in de opgaaf omschreven, is dus altijd gelijk aan viermaal het vierkant van den inhoud des driehoeks, gedeeld door het produkt van zijne zijden.

3°. Gevolg. Stellen wij den straal des omgeschrevenen cirkels s, dan is bekend, dat men heeft:

$$s = \frac{AB \times BC \times AC}{4\,I}$$

en hieruit volgt:

$$DF \times Sin.\ C + DG \times Sin.\ B + DH\ Sin.\ A = \frac{I}{s}$$

Dat is, *de som der meergenoemde produkten is ook gelijk aan den inhoud des driehoeks, gedeeld door den straal van zijnen omgeschrevenen cirkel.*

4°. Gevolg. Laat de lijn BD, *Fig.* 8, den hoek B, van den driehoek ABC, midden door deelen, en trekken wij uit D de lijnen DF en DG loodregt op AB en BC, dan zijn de driehoeken DFB en DGB gelijk en gelijkvormig, en bijgevolg is DF = DG.

BG. Trekken wij voorts BE, dan volgt, omdat de loodlijn uit D op AC gelijk o is, uit het eerste Gevolg, dat wij hebben:

$$DF\ (Sin.\ A + Sin.\ C) = BE\ Sin.\ B \quad \ldots\ldots (a)$$

Nu is $Sin.\ A = \frac{2I}{AB \times AC}$ en $Sin.\ C = \frac{2I}{BC \times AC}$, zoodat

$$Sin.\ A + Sin.\ C = \frac{2I\ (AB + BC)}{AB \times BC \times AC}$$

verder hebben wij:

$$FD = BD \times Sin.\ \tfrac{1}{2} B;\ BE = \frac{2I}{AC} \text{ en } Sin.\ B = 2\ Sin.\ \tfrac{1}{2} B\ Cos.\ \tfrac{1}{2} B$$

en wanneer wij dit in de vergelijking (a) substitueeren, dan komt er, na behoorlijke herleiding,

$$BD = 2\ Cos.\ \tfrac{1}{2}\ B \times \frac{AB \times BC}{AB + BC}$$

dat is: *de lijn, die den hoek eens driehoeks midden door deelt, is gelijk aan tweemaal den cosinus van de helft van dien hoek, vermenigvuldigd met het produkt der zijden om dien hoek, en gedeeld door de som van deze twee zijden.*

5°. Gevolg. Wanneer de driehoek gelijkzijdig is, dan gaat onze stelling over in de volgende:

Indien uit eenig punt, in het vlak van eenen gelijkzijdigen driehoek, loodlijnen op de drie zijden worden nedergelaten, dan is, waar dit punt ook genomen worde, de som dezer drie loodlijnen altijd even groot, en deze standvastige som is gelijk aan de loodlijn, die uit een der hoekpunten op de tegenovergestelde zijde valt, dat is, gelijk driemaal den straal van den ingeschrevenen cirkel. Waarbij wederom in aanmerking moet worden genomen, dat indien het punt buiten den driehoek ligt, elke loodlijn, welke op den buitenkant van eene der zijden mogt vallen, als negatief in rekening moet worden gebragt.

XII. VOORSTEL.

Door H. Foekes Bakker.

Van eene meetkunstige evenredigheid is gegeven de som der voorgaande termen gelijk 15, die der volgende gelijk 30, en het verschil tusschen den eersten en laatsten term gelijk 21. Men begeert deze evenredigheid te bepalen?

Opgelost *door* H. Foekes Bakker, W. Top Wz., F. W. Schuld, H. Roodhuijzen, A. van der Swan, R. Lobatto, M. B. Jung, R. van Wijk Jz., H. van Kraaijenoord, G. J. Sarlet en J. Peereboom.

Oplossing *van* H. Foekes Bakker.

Stellen wij voor de termen der evenredigheid x, xz, y en yz, dan hebben wij terstond deze twee vergelijkingen:

$$x + y = 15 \text{ en } xz + yz = 30.$$

De eerste in de tweede gedeeld, geeft onmiddellijk $z = 2$, en onze vergelijkingen zijn dus:

$$x + y = 15 \text{ en } z = 2.$$

Nu is bovendien het verschil van den eersten en laatsten term gelijk 21 gegeven; doch daar er in de opgaaf niet bepaald is, of de eerste term grooter of kleiner dan de laatste moet zijn, zoo bestaan er twee verschillende gevallen, dat is, wij kunnen stellen:

$$x - yz = 21 \text{ of } yz - x = 21.$$

Voor het eerste geval hebben wij dan deze drie vergelijkingen:

$$x + y = 15, \quad z = 2, \quad x - yz = 21.$$

De tweede in de derde gebragt geeft $x - 2y = 21$, welke, van de eerste afgetrokken, tot rest laat $3y = -6$, of $y = -2$, waardoor $x = 15 - y = 17$; in dit geval is de evenredigheid alzoo $17 : 34 = -2 : -4$.

Voor het tweede geval zijn de vergelijkingen:

$$x + y = 15, \quad z = 2, \quad yz - x = 21.$$

De tweede in de derde substituerende, komt er $2y - x = 21$, welke, bij de eerste opgeteld, geeft $3y = 36$, of $y = 12$, waardoor $x = 15 - y = 3$; de evenredigheid wordt alzoo $3 : 6 = 12 : 24$.

Er bestaan dus twee antwoorden op de opgegevene vraag. De evenredigheden zijn namelijk:

$$3 : 6 = 12 : 24, \text{ of } 17 : 34 = -2 : -4.$$

XIII. Voorstel.

Door J. Nicolaij.

Een gegeven getal a in twee deelen te deelen, zoodanig, dat de som van het vierkant des eenen deels met den cubus van het an-

andere deel een minimum zij; zonder hiertoe differentiaal-rekening te gebruiken?

OPLOSSING. *Door* J. NICOLAIJ.

Laat het eene deel x zijn, dan is het andere $a - x$, en dan moet $(a - x)^2 + x^3$ een minimum zijn, dat wil zeggen, wanneer men voor x twee andere waarden $x + h$ en $x - h$ neemt, dan zal, hoe klein men h ook aanneme, altijd:

$$\{a - (x + h)\}^2 + (x + h)^3 > (a - x)^2 + x^3$$

en $$\{a - (x - h)\}^2 + (x - h)^3 > (a - x)^2 + x^3$$

moeten zijn.

Deze vergelijkingen kunnen wij ook aldus schrijven:

$$\left\{\begin{matrix}(a-x)^2 - 2h\,(a-x) + h^2 \\ + x^3 + 3h\,x^2 + 3h^2\,x + h^3\end{matrix}\right\} > (a - x)^2 + x^3$$

$$\left\{\begin{matrix}(a-x)^2 + 2h\,(a-x) + h^2 \\ + x^3 - 3h\,x^2 + 3h^2\,x - h^3\end{matrix}\right\} > (a - x)^2 + x^3$$

en wanneer wij van beide kanten $(a - x)^2 + x^3$ aftrekken, en alles door h deelen:

$$3x^2 + 2x - 2a + (3hx + h + h^2) > 0$$

en $$3x^2 + 2x - 2a - (3hx + h - h^2) < 0$$

Daar nu deze uitdrukkingen beiden te gelijker tijd moeten bestaan, hoe klein h ook genomen worde, zoo is het klaar, dat hieraan niet anders zal kunnen worden voldaan, dan door:

$$3x^2 + 2x - 2a = 0$$

te stellen, en de oplossing van deze vierkants-vergelijking geeft ons:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{(6a - 1)}}{3}$$

waardoor aan het begeerde voldaan is.

XIV. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

In elk parallelopipedum is de som der vierkanten van de vier diagonalen, welke de overstaande hoekpunten vereenigen, gelijk aan de som der vierkanten van de twaalf ribben. Men vraagt naar het bewijs?

Opgelost *door* I. R. Schmidt, J. W. Martini en R. van Wijk Jz.

Oplossing *van* I. R. Schmidt.

Laat ABCDA′B′C′D′ *Fig.* 9. het parallelopipedum zijn. Stellen wij de ribben van hetzelve:

$$AD = BC = A'D' = B'C' = P,$$
$$AC' = DB' = A'C = D'B = Q,$$
$$AB = DC = A'B' = D'C' = R,$$

en ſtellen wij verder de vier diagonalen:

$$AA' = a, \; BB' = b, \; CC' = c, \; DD' = d,$$

dan zullen wij moeten bewijzen, dat:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4\,(P^2 + Q^2 + R^2)$$

is, en hiertoe kan het volgende dienen.

Trekken wij in elke der zes zijvlakken de twee diagonalen, en ſtellen wij dezelve voor door de volgende letters

$$A'B = AB' = r, \; A'C' = AC = q, \; A'D = AD' = p$$
$$CD' = C'D = r', \; B'D' = BD = q', \; B'C = BC' = p'$$

dan hebben wij, omdat in elk parallelogram de ſom der vierkanten van de diagonalen gelijk is aan de ſom der vierkanten van de zijden, de volgende vergelijkingen:

$$a^2+d^2=2P^2+2p^2, \quad b^2+c^2=2P^2+2p'^2, \quad p^2+p'^2=2Q^2+2R^2$$
$$a^2+c^2=2Q^2+2q^2, \quad b^2+d^2=2Q^2+2q'^2, \quad q^2+q'^2=2P^2+2R^2$$
$$a^2+b^2=2R^2+2r^2, \quad c^2+d^2=2R^2+2r'^2, \quad r^2+r'^2=2P^2+2Q^2$$

De ſom van de zes eerſte dezer vergelijkingen is:

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)=2(p^2+p'^2+q^2+q'^2+r^2+r'^2) + 4(P^2+Q^2+R^2);$$

maar de ſom der drie laatſte vergelijkingen geeft ons

$$p^2+p'^2+q^2+q'^2+r^2+r'^2=4(P^2+Q^2+R^2),$$

en hieruit volgt dus

$$3(a^2+b^2+c^2+d^2)=12\,(P^2+Q^2+R^2)$$

of door drie deelende

$$a^2+b^2+c^2+d^2=4(P^2+Q^2+R^2)$$

waardoor de opgegevene ſtelling bewezen is.

Gevolg. Nemen wij de ſom van de drie eerſte vergelijkingen, dan verkrijgen wij:

$$3a^2+b^2+c^2+d^2=2(p^2+q^2+r^2)+2(P^2+Q^2+R^2)$$

en trekkende hiervan af de vergelijking

$$a^2+b^2+c^2+d^2=4\,(P^2+Q^2+R^2)$$

dan

dan blijft er, na door 2 gedeeld te hebben,

$$a^2 = p^2 + q^2 + r^2 - (P^2 + Q^2 + R^2)$$

dat is; *het vierkant van eene der diagonalen van een parallelopipedum is gelijk aan de som der vierkanten van de drie diagonalen, welke, uit een der uiteinden van deze diagonaal, in de drie zijvlakken kunnen worden getrokken, verminderd met de som der vierkanten van de drie ribben, welke in dit zelfde uiteinde bij elkander komen.*

XV. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Van een parallelopipedum, de ribben, benevens de hoeken, welke zij, aan eenig hoekpunt, met elkander maken, gegeven zijnde, vraagt men de hoekpuntslijnen te berekenen.

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT en J. W. MARTINI.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Het zal genoegzaam zijn, het Voorstel ten opzigte van eene der diagonalen AA′ = *a*, *Fig.* 9., op te lossen, om hieruit de oplossing ten opzigte der overige diagonalen te kunnen afleiden.

Stellen wij ons dan voor de lengte der diagonaal AA′ te berekenen, wanneer de ribben A′B′, A′C en A′D′, benevens de hoeken B′A′C; CA′D′ en B′A′D′ gegeven zijn; en duiden wij te dien einde deze ribben aan door P, Q en R, en de hoeken, welke zij, twee aan twee, te zamen maken door (PQ), (PR) en (QR), dan hebben wij, omdat in elk parallelogram het vierkant van eene der diagonalen gelijk is aan de som der vierkanten van de twee zijden, welke zich aan een der uiteinden van deze diagonaal vereenigen, opgeteld met tweemaal het product van deze twee zijden vermenigvuldigd met den cosinus van den hoek, welken zij bevatten,

$$p^2 = Q^2 + R^2 + 2\,QR\,Cos.\,(QR)$$
$$q^2 = P^2 + R^2 + 2\,PR\,Cos.\,(PR)$$
$$r^2 = P^2 + Q^2 + 2\,PQ\,Cos.\,(PQ)$$

waarvan de som is,

$$p^2 + q^2 + r^2 = 2\,(P^2 + Q^2 + R^2) + 2\,PQ\,Cos.\,(PQ) + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\; 2\,PR\,Cos.\,(PR) + 2\,QR\,Cos.\,(QR)$$

en

en daar wij in het Gevolg van het voorgaande vraagstuk vonden;

$$a^2 = p^2 + q^2 + r^2 - (P^2 + Q^2 + R^2)$$

zoo verkrijgen wij, door de waarde van $p^2 + q^2 + r^2$ in deze laatste vergelijking te substitueren, en daarna aan beide zijden den vierkantswortel te trekken:

$$a = \sqrt{\{P^2 + Q^2 + R^2 + 2\,PQ\,Cos.\,(PQ) + \ldots\ldots 2\,PR\,Cos.\,(PR) + 2\,QR\,Cos.\,(QR)\}}$$

dat is: *elke der diagonalen van een parallelopipedum is gelijk aan den vierkantswortel uit de som, welke men verkrijgt, door de som der vierkanten van de ribben, welke aan een der uiteinden van deze diagonaal te zamen komen, op te tellen bij de dubbele som der producten van elke twee dezer ribben met den cosinus van den ingesloten hoek.*

XVI. VOORSTEL.

Door I. R. Schmidt.

Wanneer de hoeken, welke eenige lijn, met drie op elkander loodregte assen maakt, gelijk zijn aan x, y en z, dan zal altijd $Cos^2.\,x + Cos^2.\,y + Cos^2.\,z = 1$ zijn. Men vraagt naar het bewijs?

Oplossing. *Door* I. R. Schmidt.

Laat in *Fig.* 10. AB de gegevene lijn verbeelden, en stellen wij, dat AX, AY en AZ de drie op elkander loodregte assen zijn. Indien wij dan in AB eenig willekeurig punt P nemen, en door dit punt drie vlakken brengen, welke evenwijdig zijn met de vlakken (XY), (XZ) en (YZ), dan ontstaat hierdoor een regthoekig parallelopipedum, waarvan AP eene der diagonalen is.

Trekken wij nu de diagonalen PP′, PP″ en PP‴, dan is het klaar, dat dezelve achtervolgens loodregt staan op de assen AZ, AY en AX. De driehoeken PP‴A, PP″A en PP′A zijn dus regthoekig in P‴, P″ en P′, en hebben allen AP tot hypothenuza. Hierdoor verkrijgen wij dan:

$$AP''' = AP \times Cos.x,\quad AP'' = AP \times Cos.y,\quad AP' = AP \times Cos.z.$$

Daar hier nu al de hoeken, welke de ribben van het parallelo-

pi-

pipedum te zamen maken gelijk 90°, en dus derzelver cosinussen gelijk o zijn, zoo is door het voorgaande Voorstel:

$$AP^2 = (AP''')^2 + (AP'')^2 + (AP')^2$$

en brengen wij hierin de waarde van AP‴, AP″ en AP′, dan komt er:

$$AP^2 = AP^2\ Cos^2.\ x + AP^2\ Cos^2.\ y + AP^2\ Cos^2.\ z$$

hetgeen, door AP^2 gedeeld, geeft:

$$Cos^2.\ x + Cos^2.\ y + Cos^2.\ z = 1.$$

Gevolg. Stellen wij de hoeken, welke de lijn AB met de vlakken (YZ), (XZ) en (XY), dat is met de diagonalen Ap, Ap'' en Ap' maakt, gelijk aan x', y' en z', dan is $x' = 90° - x$, $y' = 90° - y$ en $z' = 90° - z$, waaruit dan volgt:

$$Sin^2.\ x' + Sin^2.\ y' + Sin^2.\ z' = 1$$

dat is: *de som der vierkanten van de sinussen der hoeken, welke eenige lijn met drie, op elkander loodregte, vlakken maakt, is altijd gelijk aan de eenheid.*

XVII. Voorstel.

Door I. R. Schmidt.

Wanneer twee willekeurige lijnen door het punt getrokken worden, waarin drie, loodregt op elkander staande, assen elkander snijden; en men de hoeken, welke deze twee lijnen met die drie assen maken, voor de eerste lijn noemt x, y en z, en voor de tweede x′, y′ en z′, en men verder den hoek, welke deze twee lijnen met elkander maken, φ stelt, dan zal men hebben:

$$Cos.\ \phi = Cos.\ x\ .\ Cos.\ x' + Cos.\ y\ .\ Cos.\ y' + Cos.\ z\ .\ Cos.\ z'.$$

Men vraagt naar het bewijs?

Oplossing. *Door* I. R. Schmidt.

Laat in het snijpunt der drie regthoekige assen het middelpunt van eenen bol geplaatst worden, en stellen wij, dat het oppervlak van dezen bol door de drie assen gesneden wordt in X, Y en Z, *Fig.* 11, en door de twee gegevene lijnen in K en K′. Wanneer dan deze vijf punten, op alle mogelijke wijzen, door bogen van groote cirkels vereenigd worden, dan zijn de zijden

en hoeken van den bolvormigen driehoek XYZ alle regt, omdat de asfen onderling regthoekig op elkander ftaan.

Verlengende nu de bogen XK en XK′ tot in A en A′, dan zijn de hoeken A en A′ mede regt; uit hoofde dat X de pool van den boog YZ is. Wij hebben dus in de regthoekige bolvormige driehoeken YKA en YK′A′:

$$Cos\ YK = Cos.\ AY \times Cos.\ AK$$
$$Cos.\ YK' = Cos.\ A'Y \times Cos\ A'K'$$

waaruit wij vinden:

$$Cos.\ AY = \frac{Cos.\ YK}{Cos.\ AK} = \frac{Cos.\ y}{Sin.\ x}$$
$$Cos.\ A'Y = \frac{Cos.\ YK'}{Cos.\ A'K'} = \frac{Cos.\ y'}{Sin.\ x'}$$

Daar wij nu hebben:

$$Cos.\ \angle\ KXK' = Cos.\ (A'Y - AY)$$
$$= Cos.\ A'Y\ .\ Cos.\ AY + Sin.\ A'Y\ .\ Sin\ AY$$

zoo vinden wij, door hierin voor *Cos.* AY en *Cos.* A′Y de gevondene waarden te fchrijven,

$$Cos. \angle KXK' = \frac{Cos. y\ Cos\ y'}{Sin. x.\ Sin. x'} + \frac{\sqrt{Sin^2. x - Cos^2. y}}{Sin.\ x} \times \frac{\sqrt{(Sin^2. x' - Cos^2. y')}}{Sin.\ x'}.$$

Nu hebben wij in het voorgaande Voorftel gevonden:

$$Cos^2.\ x + Cos^2.\ y + Cos^2.\ z = 1$$
$$Cos^2.\ x' + Cos^2.\ y' + Cos^2.\ z' = 1$$

waaruit volgt:

$$1 - Cos^2.\ x - Cos^2.\ y = Cos^2.\ z$$
$$1 - Cos^2.\ x' - Cos^2.\ y' = Cos^2.\ z'$$

dat is:

$$Sin^2.\ x - Cos^2.\ y = Cos^2.\ z \text{ en } Sin^2.\ x' - Cos^2.\ y' = Cos^2.\ z'$$

en bijgevolg:

$$\sqrt{(Sin^2. x - Cos^2. y)} = Cos.\ z \text{ en } \sqrt{(Sin^2. x' - Cos^2. y')} = Cos.\ z'.$$

Door deze fubftitutie verandert dus de waarde van *Cos.* ∠ KXK′ in

$$Cos.\ \angle KXK' = \frac{Cos.\ y\ .\ Cos.\ y' + Cos.\ z\ .\ Cos\ z'}{Sin.\ x\ .\ Sin.\ x'}.$$

In den bolvormigen driehoek XKK′ is eindelijk:

$$Cos.\ \phi = Cos.\ \angle\ KXK'\ .\ Sin.\ x\ .\ Sin.\ x' + Cos.\ x\ .\ Cos.\ x'$$

en brengende hierin de waarde van *Cos.* ∠ KXK′, dan komt er:

$$Cos\ \phi = Cos.\ x\ .\ Cos.\ x' + Cos.\ y\ .\ Cos.\ y' + Cos.\ z\ .\ Cos.\ z'.$$

AAN-

AANMERKING. Het is uit de beschouwing der figuur duidelijk, dat ∠ KXK = AA' de maat is der projectie van den hoek KK', op het vlak (YZ); deze hoeken van projectie worden alzoo bepaald door de formulen:

$$Cos.\ KXK' = \frac{Cos.\ y\ .\ Cos.\ y' + Cos.\ z\ .\ Cos.\ z'}{Sin.\ x\ .\ Sin.\ x'}$$

$$Cos.\ KYK' = \frac{Cos.\ x\ .\ Cos.\ x' + Cos.\ z\ .\ Cos.\ z'}{Sin.\ y\ .\ Sin.\ y'}$$

$$Cos.\ KZK' = \frac{Cos.\ y\ .\ Cos.\ y' + Cos.\ x\ .\ Cos.\ x'}{Sin.\ z\ .\ Sin.\ z'}$$

XVIII. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Er is in de Noordelijke provinciën van ons Vaderland eene stad, wier naam uit vier letters bestaat. Indien men de letters van het Alphabet met het getal van hunne volgorde bestempelt, als a = 1, b = 2, &c. tot z = 26, zoo maken de getallen, waaruit deze naam bestaat, eene rekenkunstige evenredigheid uit, dat is, de eerste verminderd met de tweede is gelijk de derde verminderd met de vierde. Verder is het verschil van het tweede en derde zes minder, dan het verschil van het eerste en vierde; het verschil der quadraten van het eerste en tweede is gelijk 147, en het verschil der quadraten van het derde en vierde is 81. Vrage naar den naam dezer stad?

OPGELOST *door* R. VAN WIJK Jz., J. PEERREBOOM, H. FOKKES BAKKER, F. W. SCHOLD, W. TOP Wz., M. B. JUNG, A. VAN DER SWAN, R. LOBATTO, H. VAN KRAAIJENOORD, H. ROODHUIJZEN en G. J. SARLET.

OPLOSSING *van* R. VAN WIJK Jz.

Stellen wij de getallen, waardoor de achtervolgende letters van den naam der stad worden uitgedrukt, voor door α, β, γ, δ dan is, door de bepalingen van het Voorstel:

$\alpha - \beta = \gamma - \delta$; $\beta - \gamma + 6 = \alpha - \delta$, $\alpha^2 - \beta^2 = 147$, $\gamma^2 - \delta^2 = 81$.

uit de eerste is $\beta + \gamma = \alpha + \delta$, en tellende dit bij de tweede op, komt er $2\beta + 6 = 2\alpha$, of $\beta + 3 = \alpha$, waarvan het

vier-

vierkant is $\beta^2 + 6\beta + 9 = \alpha^2$; maar uit de derde is $\alpha^2 = \beta^2 + 147$; deze twee waarden van α^2 aan elkander gelijk gesteld, komt er $\beta^2 + 6\beta + 9 = \beta^2 + 147$, of $6\beta = 138$, waaruit $\beta = 23$. Hierdoor wordt dus $\alpha = \beta + 3 = 26$, en er blijft alzoo nog over γ en δ te bepalen.

Daar $\alpha - \beta = 3$ gevonden is, zoo verandert de eerste vergelijking in $\gamma - \delta = 3$, en deelende dit in de vierde, komt er $\gamma + \delta = 27$, waaruit volgt: $\gamma = 15$ en $\delta = 12$.

De vier gevraagde aanwijzers van de letters des naams zijn alzoo: $\alpha = 26$, $\beta = 23$, $\gamma = 15$, $\delta = 12$, en deze getallen stemmen in de tafel

$$a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4,\ e=5,\ \&c.\ \ldots \text{ tot } z = 26,$$

overeen met de letters z, w, o en l; de naam van de bedoelde stad is dus Zwol.

XIX. Voorstel.

Door R. van Wijk Jz.

Een zoon vraagt zijnen vader naar deszelfs ouderdom, die hem antwoordt: zoo gij uwe jaren quadrateert, dan bedraagt dit quadraat 15 *meer dan mijne jaren, terwijl mijn ouderdom ook een quadraat is, waarvan de wortel één minder is, dan het getal van uwe jaren; hoe oud waren zij?*

Opgelost *door* R. van Wijk Jz., R. Lobatto, A. van der Swan, G. J Sarlet, H. van Kraaijenoord, H. Foekes Bakker, J. Peereboom, H. Roodhuijzen, F. W. Schuld, W. Top Wz. en M. B. Jung.

Oplossing *van* R. van Wijk Jz.

Stel de jaren van den zoon x, dan zijn die van den vader $x^2 - 15$. Door de tweede bepaling vindt men aan den anderen kant voor de jaren van den vader $(x - 1)^2$, en dit geeft ons de vergelijking:

$$x^2 - 15 = (x - 1)^2$$

of

$$x^2 - 15 = x^2 - 2x + 1$$

dus

dus $2x = 16$, of $x = 8$, voor de jaren van den zoon. De vader was dus $(x - 1)^2 = 7 \times 7 = 49$ jaren oud.

XX. VOORSTEL.

Door H. VAN KRAAIJENOORD.

Van drie getallen is de som gelijk 100: *zoekt men eene vierde evenredige tot het eerste, tweede en derde, dan is dezelve* 18; *doch zoekt men eene vierde evenredige tot het derde, tweede en eerste, dan komt er* 8. *Men vraagt naar deze getallen?* (4)

OPGELOST *door* H. VAN KRAAIJENOORD, J. PEEREBOOM, F. W. SCHULD, H. ROODHUIJZEN, R. LOBATTO, A. VAN DER SWAN, H. FOEKES BAKKER, W. TOP WZ. en G. J. SARLET.

OPLOSSING *van* H. VAN KRAAIJENOORD.

Stellen wij de getallen x, y, en z, dan hebben wij:

$$x + y + z = 100;\ x : y = z : 18;\ z : y = x : 8$$

dat is, wij hebben de drie vergelijkingen:

$$x + y + z = 100, \quad 18x = yz, \quad 8z = xy.$$

Nemen wij het product van de twee laatste, dan komt er $144\ xz = xy^2z$, of door xz deelende, $y^2 = 144$, dus $y = \pm 12$.

Nemende nu $y = 12$, dan veranderen de eerste en derde vergelijkingen in:

$$x + z = 88 \quad \text{en} \quad 8z = 12x$$

uit de laatste is $z = \frac{3}{2}x$, en hierdoor wordt de eerste $\frac{5}{2}x = 88$, waaruit $x = 35\frac{1}{5}$, en bij gevolg $z = \frac{3}{2}x = 52\frac{4}{5}$. De gevraagde getallen zijn dus $35\frac{1}{5}$, 12 en $52\frac{4}{5}$.

Nemende daarentegen $y = -12$, dan komt er:

$$x + z = 112 \quad \text{en} \quad 8z = -12x$$

de laatste geeft hier $z = -\frac{3}{2}x$, waardoor de eerste verandert in $-\frac{1}{2}x = 112$. Hierdoor wordt $x = -224$, en $z = -\frac{3}{2}x = +336$, en wij verkrijgen alzoo, tot tweede antwoord, voor de drie begeerde getallen -224, -12 en $+336$.

XXI.

(4) A. DE GRAAF, *Beginselen der Algebra*, No. 153.

XXI. VOORSTEL.

Door J. P. DELPRAT.

Het zwaartepunt te bepalen van eene prismoide, dat is, van een ligchaam, waarvan het boven- en benedenvlak een regthoek is; welke regthoeken niet alleen evenwijdig aan elkander, maar bovendien zoodanig geplaatst zijn, dat de zijden van den eenen evenwijdig aan die van den anderen loopen, zoodat dit ligchaam voor het overige begrensd is door vier platte vlakken, gaande elk door eene der zijden van het bovenvlak en door de zijde van het benedenvlak, welke met dezelve evenwijdig loopt. Men vraagt bepaaldelijk, hoe ver dit zwaartepunt van het boven- en benedenvlak gelegen is?

OPLOSSING *door* J. P. DELPRAT.

Zij ABCDD′C′B′A′, *Fig.* 12, het voorgestelde ligchaam, waarin ABCD en A′B′C′D′ evenwijdige regthoeken zijn, en daarenboven AD, A′D′, BC en B′C′, als mede AB, A′B′, CD en C′D′, met elkander evenwijdig loopen.

Laat men nu door eenig willekeurig punt G, van eene der opstaande ribben AA′, een vlak GHIK evenwijdig aan het grondvlak gaan, dan zal deze doorsnede mede een regthoek zijn; want omdat evenwijdige vlakken door eenzelfde vlak onder evenwijdige lijnen doorsneden worden, zal GH evenwijdig met AB en KI evenwijdig met DC zijn: en daar nu AB en DC met elkander evenwijdig loopen, zoo is ook GH evenwijdig met KI; om dezelfde reden is ook GK evenwijdig met HI, waaruit verder volgt, dat ∠ GHI = ∠ ABC = 90° is, en hierdoor is het gezegde bewezen.

Men late uit A′ eene loodlijn A′E op het grondvlak vallen, en trekke de lijnen AE en GF tot de punten, waarin deze loodlijn de vlakken ABCD en GHIK doorsnijdt, dan zullen de lijnen AE en GF onderling evenwijdig wezen.

Stellen wij nu AB = CD = a, BC = AD = b, A′B′ = C′D′ = a', B′C′ = A′D′ = b', A′E = h en EF = x. Wanneer men dan, op den afstand δx van het vlak GHIK, een ander vlak, evenwijdig met het grondvlak, door het ligchaam laat gaan, zal het gedeelte van het ligchaam, begrepen tus-

tusschen dit vlak en het vlak GHIK, de differentiaal van den inhoud des ligchaams zijn, en deze differentiaal zal kunnen worden beschouwd als een prisma, waarvan de regthoek GHIK de basis en δx de hoogte is. Het zwaartepunt van deze differentiaal zal alzoo op den afstand EF $= x$ van het grondvlak verwijderd zijn, en wij gaan dus over, om eene uitdrukking te zoeken voor het moment van deze differentiaal des gegevenen ligchaams, ten opzigte van het grondvlak ABCD.

Trekken wij B'L evenwijdig met AA', dan zullen wij hebben:

$$NH : LB = B'N : B'L = A'G : A'A = A'F : A'E$$

waaruit
$$NH = \frac{LB \times A'F}{A'E}$$

en daar
$$LB = AB - A'B = a - a'$$

en
$$A'F = EA' - EF = h - x$$

is, zoo verkrijgen wij hierdoor:

$$NH = \frac{(a - a')\,(h - x)}{h}$$

en, omdat GH $=$ GN $+$ NH $=$ A'B' $+$ NH is,

$$GH = a' + \frac{a - a'}{h}\,(h - x)$$

terwijl men, klaarblijkelijk, op dezelfde wijze zal vinden:

$$HI = b' + \frac{b - b'}{h}\,(h - x).$$

De inhoud van het prisma GHIK $\times\ \delta x$ zal bijgevolg worden:

$$\left\{a' + (a - a') \times \frac{h - x}{h}\right\} \times \left\{b' + (b - b') \times \frac{h - x}{h}\right\} \delta x$$

stellen wij dus den inhoud van ons gegeven ligchaam I, dan hebben wij, alles ontwikkelende:

$$\delta I = \left\{a'b' + (ab' - 2a'b' + a'b)\frac{h - x}{h} + (a - a')(b - b')\frac{(h - x)^2}{h^2}\right\} \delta x$$

of wanneer wij alles volgens de magten van x rangschikken:

$$\delta I = \left\{ab + (ab' + a'b - 2ab)\,\frac{x}{h} + (a - a')\,(b - b')\,\frac{x^2}{h^2}\right\}\delta x \,..\,(1)$$

Het moment van dit prisma δI ten opzigte van het vlak ABCD, dat is de differentiaal van de som der momenten ten opzigte van dit vlak, zal dus worden voorgesteld door:

$$\delta S = \left\{abx + (ab' + a'b - 2ab)\frac{x^2}{h} + (a - a')(b - b')\frac{x^3}{h^2}\right\}\delta x \ . \ (2)$$

en wij zullen dus den inhoud van het ligchaam en de som der momenten vinden, door middel van de uitdrukkingen (1) en (2) tusschen de grenzen $x = 0$ en $x = h$ te integreren.

De eerste integrerende vinden wij voor den inhoud:

$$abx + \tfrac{1}{2}(ab' + a'b - 2ab)\frac{x^2}{h} + \tfrac{1}{3}(a - a')(b - b')\frac{x^3}{h^2}$$

waarbij geene constante gevoegd moet worden, omdat zij naar den eisch voor $x = 0$ verdwijnt. Voor $x = h$ geeft dezelve, na behoorlijke herleiding:

$$I = \tfrac{1}{6}h\left\{(a + a')(b + b') + ab + a'b'\right\} \ . \ . \ . \ (3)$$

Integrerende de vergelijking (2), dan vinden wij:

$$\tfrac{1}{2}abx^2 + \tfrac{1}{3}(ab' + a'b - 2ab)\frac{x^3}{h} + \tfrac{1}{4}(a - a')(b - b')\frac{x^4}{h^2}$$

waarbij mede geen standvastige behoeft gevoegd te worden, daar dezelve naar behooren voor $x = 0$ verdwijnt. Door $x = h$ te nemen, vinden wij alzoo voor de geheele som der momenten:

$$\tfrac{1}{2}abh^2 + \tfrac{1}{3}(ab' + a'b - 2ab)h^2 + \tfrac{1}{4}(a - a')(b - b')h^2$$

dat is, na behoorlijke herleiding:

$$S = \tfrac{1}{12}h^2\left\{(a + a')(b + b') + 2a'b'\right\} \ . \ . \ (4)$$

Door den bekenden regel uit de leer der zwaartepunten, is nu de afstand van het zwaartepunt tot het grondvlak gelijk aan de som der momenten, ten opzigte van dit grondvlak, gedeeld door den inhoud of de som der gewigten. Deelende dan de uitdrukking (4) door (3), zoo vinden wij voor den afstand van het gevraagde zwaartepunt tot het grondvlak:

$$\frac{S}{I} = \frac{\tfrac{1}{12}h^2\left\{(a + a')(b + b') + 2a'b'\right\}}{\tfrac{1}{6}h\left\{(a + a')(b + b') + ab + a'b'\right\}}$$

dat is, na herleiding:

$$\frac{S}{I} = \tfrac{1}{2}h\left\{1 - \frac{ab - a'b'}{(a + a')(b + b') + ab + a'b'}\right\} . \ (5)$$

De afstand van het zwaartepunt tot het bovenvlak wordt nu mede zeer gemakkelijk gevonden, want dezelve is klaarblijkelijk:

h —

$$h - \frac{S}{I} = \tfrac{1}{2} h \left\{ 1 + \frac{ab - a'b'}{(a + a')(b + b') + ab + a'b'} \right\} \quad (6)$$

Het blijkt verder uit deze uitdrukkingen ten duidelijkste, dat, indien wij door het midden van de loodlijn A'E een vlak, evenwijdig aan de bazis, laten gaan, het zwaartepunt beneden dit vlak gelegen zal zijn, en wel op eenen afstand, uitgedrukt door de formule

$$\tfrac{1}{2} h \times \frac{ab - a'b'}{(a + a')(b + b') + ab + a'b'} \quad \ldots\ldots (7)$$

De ligging van het zwaartepunt is door het gevondene nog geenszins volstrek bepaald, want wij weten slechts alleen, dat dit zwaartepunt in een vlak moet liggen, hetwelk evenwijdig met het grondvlak loopt en van hetzelve op zulk eenen afstand gelegen is, als door de formule (5) wordt uitgedrukt. Om de ligging van dit zwaartepunt nader te bepalen, merken wij het volgende op.

Het zwaartepunt S van het prisma γI ligt in de doorsnede der beide hoekpuntslijnen GI en HK; hetzelfde geldt voor elke andere doorsnede van het Prismoide, evenwijdig aan het grondvlak; alle mogelijke hoekpuntslijnen liggen in de vlakken AA'CC' en BB'DD', en bijgevolg liggen alle hunne doorsnijdingspunten in de lijn OP, welke de doorsnede van de zoo evengenoemde vlakken is; daar dus al de zwaartepunten der vlakken evenwijdig aan GHIK in deze lijn OP liggen, zoo moet ook het zwaartepunt van de geheele Prismoide in deze lijn gelegen zijn.

Laat dan op den afstand, door de formule (5) bepaald, een vlak evenwijdig aan het grondvlak gaan, dan zal de doorsnede van dit vlak met de lijn OP, welke de zwaartepunten van het boven- en benedenvlak vereenigt, het gevraagde zwaartepunt wezen.

Aanmerkingen. 1°. Wanneer de lijn OP loodregt op het grondvlak staat, dan moet de waarde, door de uitdrukking (5) bepaald, klaarblijkelijk langs de lijn OP, van O naar P worden uitgezet.

2°. Wanneer $a = a'$ en $b = b'$ is, dan verandert het ligchaam in een parallelopipedum, en dan geven de uitdrukkingen (5) en (6), voor den afstand van het zwaartepunt tot het bene-

den- of bovenvlak $\frac{1}{2}h$, en het zwaartepunt ligt alsdan op de helft van de lijn OP, zoo als ook uit andere gronden bekend is.

3°. Verder is het gemakkelijk in te zien, dat onze geheele oplossing hetzelfde zou blijven, indien, al het overige onveranderd blijvende, het boven- en benedenvlak, in plaats van regthoeken, scheefhoekige parallelogrammen waren; en wel omdat wij van de voorwaarde, dat de hoeken van het grondvlak regt zijn, in de oplossing geen gebruik hebben behoeven te maken: onze geheele oplossing zal dus onveranderd blijven, zoo lang slechts de lijnen AD, A′D′, BC en B′C′ en de lijnen AB, A′B, CD en C′D′ aan elkander evenwijdig zijn.

4°. De *leggers* van de *vallen* der gewone ophaalbruggen hebben veelal den vorm van eene prismoïde, ten einde het zwaartepunt van de vallen nader aan het draai of rustpunt te brengen. Nemen wij $h = 11$ Amsterdamsche voeten of 121 duimen, $a = 9$, $b = 8$, $a' = 7$ en $b' = 6$ duimen, dan vindt men, door de formule (7), den afstand van het zwaartepunt tot het midden des leggers gelijk $3\frac{24}{113}$ duimen, hetgeen eene zeer geringe afwijking is.

XXII. VOORSTEL.

Door J. P. DELPRAT.

In eenen regten cirkelvormigen afgeknotten cilinder gaan twee vlakken door de as, en dus loodregt op het grondvlak, hetwelk zij volgens twee stralen snijden; de ligging dezer stralen gegeven zijnde, vraagt men den inhoud te vinden van het gedeelte des afgeknotten cilinders, dat tusschen die vlakken begrepen is?

OPGELOST *door* J. P. DELPRAT en R. LOBATTO.

OPLOSSING *van* J. P. DELPRAT.

Het gegevene ligchaam worde voorgesteld door *Fig.* 13; ATR′ zij in hetzelve het cirkelvormige grondvlak, GC de as, welke loodregt op dit grondvlak staat, en GKM het bovenvlak, welk bovenvlak, zoo als genoegzaam bekend is, eene ellips zal zijn. Stellen wij verder, dat QR′ en IS de gegevene middellijnen zijn, dan zal het er op aankomen den inhoud van het stuk te be-

pa-

palen, dat door de vlakken CQOFC en CSVFC uit den afgeknotten cilinder gesneden wordt.

Stellen wij, dat het verlengde der boven- en benedenvlakken elkander volgens de lijn XX′ doorsnijden; trekken wij CY loodregt op XX′ en laten wij door CY en de as CF een plat vlak gaan, dan zal hetzelve het benedenvlak volgens de middellijn LH en het bovenvlak volgens de groote as MN doorsnijden, en de hoek NYH zal de standhoek van het boven- en benedenvlak zijn, welken hoek wij γ zullen stellen.

Brengen wij verder door de as een tweede vlak loodregt op het vlak MNHL, dan zal dit het grondvlak volgens de middellijn RT en het bovenvlak volgens de kleine as Q′K doorsnijden. Dit vlak zal evenwijdig met XX′ loopen, waaruit dan volgt, dat de doorsnijdingen Q′K en RT beide evenwijdig met XX′ en dus ook evenwijdig aan elkander zullen zijn.

Stellen wij nu, om de rigtingen der gegevene middellijnen QR′ en SI stelkunstig uit te drukken, $\angle$ HCQ $= \alpha$ en $\angle$ HCS $= \beta$, en stellen wij verder den straal van het grondvlak HC $= r$, en de as CF $= h$, dan kunnen wij op de volgende wijze tot den inhoud van het stuk CQOFVSC geraken.

Trekken wij door C eenen willekeurigen straal CA en stellen wij $\angle$ HCA $= \phi$ en $\angle$ ACA′ $= \delta\phi$, dan kunnen wij door de as en door de stralen CA en CA′ vlakken CAGF en CA′G′F brengen, en dan zal het stukje, begrepen tusschen deze twee vlakken, als de differentiaal van het ligchaam HAGNFCH moeten worden aangemerkt. Deze differentiaal kunnen wij verder, omdat de boog AA′ oneindig klein is, als een driehoekig afgeknot prisma beschouwen, waarvan de ribben AG en A′G′ even groot zijn; en daar de inhoud van zulk een afgeknot driehoekig prisma gelijk is aan het vlak ACA′, dat loodregt door de ribben gaat, vermenigvuldigd met één derde van de som der drie ribben, zoo zal men, den inhoud van het ligchaam CSQOGV gelijk I stellende, hebben:

$$\delta I = \textit{driehoek}\ ACA' \times \tfrac{1}{3}\,(2\ AG + CF) \quad \ldots \quad (1)$$

Nu is de driehoek ACA′ gelijk aan het halve product van de twee zijden AC en AC′, vermenigvuldigd met de sinus van den ingeslotenen hoek ACA′, zoodat

$$\textit{driehoek}\ ACA' = \tfrac{1}{2}\,r^2\ \textit{Sin.}\ \delta\phi = \tfrac{1}{2}\,r^2\,\delta\phi.$$

Ver-

Verder is de ribbe CF $= h$, en er blijft dus alleen over de waarde van de ribbe AG in ϕ uit te drukken.

Trekken wij hiertoe, in het boven- en benedenvlak, GZ en AW loodregt op FY en CY, dan zijn GZ en AW evenwijdig, waaruit volgt AG $=$ WZ. Verder is alsdan CW $= r\ Cos.\ \phi$, omdat driehoek CAW in W regthoekig is; wij hebben alzoo:

$$CY = CF \times Cot.\ \gamma = h\ Cot.\ \gamma$$
$$WY = CY - CW = h\ Cot.\ \gamma - r\ Cos.\ \phi$$
$$AG = WZ = WY\ Tang.\ \gamma = h - r\ Cos.\ \phi\ Tang.\ \gamma$$

en substituerende deze waarden van driehoek ACA', CF en AG in de vergelijking (1), dan komt er:

$$\delta I = \tfrac{1}{2}\, r^2\, \delta\phi \times \tfrac{1}{3} \left\{ 2\, (h - r\ Cos.\ \phi\ Tang.\ \gamma) + h \right\}$$

dat is, na herleiding:

$$\delta I = \tfrac{1}{6}\, r^2\, (3h - 2r\ Tang.\ \gamma\ Cos.\ \phi)\, \delta\phi \quad . \ . \ . \ (2)$$

welke formule alzoo, van $x = \alpha$ tot $x = \beta$, zal moeten worden geintegreerd.

De vergelijking (2) integrerende, vinden wij terstond:

$$I = \tfrac{1}{6}\, r^2\, (3h\,\phi - 2r\ Tang.\ \gamma\ Sin.\ \phi) + C$$

en daar deze integraal voor $\phi = \alpha$ moet verdwijnen, hebben wij:

$$C = -\tfrac{1}{6}\, r^2\, (3h\,\alpha - 2r\ Tang.\ \gamma\ .\ Sin.\ \alpha)$$

waaruit blijkt, dat:

$$Inh.\ HCQOFN = \tfrac{1}{6}\, r^2\, (3h\,\alpha - 2r\ Tang.\ \gamma\ Sin.\ \alpha) \quad (3)$$

is. Stellende verder $\phi = \beta$, dan vinden wij:

$$I = \tfrac{1}{6}\, r^2 \left\{ 3h\, (\beta - \alpha) - 2r\ Tang.\ \gamma\ (Sin.\ \beta - Sin.\ \alpha) \right\} \quad (4)$$

welke formule nu den inhoud van het stuk CQSVFOQ uitdrukt.

GEVOLG. Ten einde den inhoud van het tegenovergestelde stuk R'CIUFPR' te vinden, behoeft men, in de formule (4), slechts $180° + \alpha$ en $180° + \beta$, in plaats van α en β, te schrijven, en dan verkrijgt men, omdat $Sin.\ (180° + \alpha) = -\ Sin.\ \alpha$ en $Sin.\ (180° + \beta) = -\ Sin.\ \beta$ is:

$$I' = \tfrac{1}{6}\, r^2 \left\{ 3h\, (\beta - \alpha) + 2r\ Tang.\ \gamma\ (Sin.\ \beta - Sin\ \alpha) \right\} \quad (5)$$

en telt men de uitdrukkingen (4) en (5) bij elkander, zoo vindt men voor den geheelen inhoud der twee overstaande stukken:

$$I + I' = r^2\, h\, (\beta - \alpha) \quad . \ . \ . \ . \ (6)$$

1°. AANMERKING. Uit de vergelijking (6) ziet men, dat de in-

inhoud van het aldaar gevondene ligchaam, dat is, van de som der stukken, welke door de vlakken SIUV en QR′PO uit den afgeknotten cilinder gesneden worden, onafhankelijk is van den hoek γ, onder welken het bovenvlak tot het benedenvlak helt, alsmede dat deze inhoud niet van den hoek afhangt, welke de eerste straal CQ met den aangenomenen oorsprong of as CH der hoeken ϕ maakt, maar alleen bepaald wordt door den straal r, de as h en den hoek $\beta - \alpha$, welke de twee stralen CQ en CS te zamen vormen. Hieruit volgt dus deze merkwaardige eigenschap: dat wanneer men het bovenvlak van eenen regten cirkelvormigen cilinder om het uiteinde F der as, op eene willekeurige wijze, doet bewegen, de inhoud van het gedeelte des cilinders, begrepen tusschen het boven- en benedenvlak, en twee andere vlakken door de as gaande, altijd even groot blijft, en dat zelfs deze inhoud nog niet veranderen zal, wanneer men deze twee vlakken om de as des cilinders doet draaijen, mits de standhoek dezer twee vlakken slechts onveranderd blijft.

Hieruit blijkt dan verder, dat van de twee overstaande stukken I en I′, het eerste I juist zoo veel kleiner is dan het geheele prisma, dat de sector SCQ tot bazis en h tot hoogte heeft; als dit prisma door het tweede stuk I′ in grootte overtroffen wordt, en wanneer wij de vergelijking (4) van (5) aftrekken, en de rest door twee deelen, dan vinden wij voor het verschil, dat elk der stukken I en I′ met gezegde prisma heeft:

$$\tfrac{1}{2}\,(I' - I) = \tfrac{1}{3}\,r^3\, Tang.\,\gamma\ (Sin.\,\beta - Sin.\,\alpha)$$

2°. Aanmerking. Wanneer men $\beta - \alpha = 180°$ stelt, dan moet men, ingevolge de voorgaande aanmerking, den inhoud gelijk vinden aan dien van eenen regten cirkelvormigen cilinder, h tot hoogte en r tot straal hebbende. De vergelijking (6) geeft voor dit geval ook werkelijk $I + I' = r^2 h \pi$.

3°. Aanmerking. Stellen wij, in de vergelijking (3), α gelijk 90°, dat is gelijk $\tfrac{1}{2}\pi$, dan vinden wij:

$$Inh.\ Q'FNHCRQ' = \tfrac{1}{4}\, r^2 h \pi - \tfrac{1}{3}\, r^3\, Tang.\,\gamma$$

terwijl $\alpha = 180° = \pi$ wederom den halven afgeknotten kegel gelijk $\tfrac{1}{2}\, r^2 h \pi$ doet kennen, hetgeen met de voorgaande aanmerking overeenstemt.

4°. Aanmerking. Nemen wij $h = r\, Tang.\,\gamma$, dan is HN $= 0$, en

en de boven- en ondervlakken raken elkander in H. In dit geval geeft de formule (4) dus:

$$I = \frac{1}{6} r^3 \, Tang. \, \gamma \left\{ 3 (\beta - \alpha) - 2 (Sin. \beta - Sin. \alpha) \right\}$$

terwijl de vergelijking (3) alsdan overgaat in:

$$\frac{1}{6} r^3 \, Tang. \, \gamma \, (3 \alpha - 2 \, Sin. \alpha)$$

en wanneer wij in dit geval deze inhouden in h en r willen uitdrukken, dan is $Tang. \gamma = \frac{h}{r}$, waardoor de eerste dezer uitdrukkingen verandert in:

$$I = \frac{1}{6} r^2 h \left\{ 3 (\beta - \alpha) - 2 (Sin. \beta - Sin. \alpha) \right\}$$

terwijl de tweede overgaat in:

$$\frac{1}{6} r^2 h \, (3 \alpha - 2 \, Sin. \alpha).$$

XXIII. VOORSTEL

Door G. J. SARLET.

In het eerste Boek van MOZES, *in zeker kapittel en vers, wordt ons de naam eens Oudvaders, en twee verzen verder zijn leeftijd opgegeven. Deze leeftijd bestaat uit drie getalmerken, waarvan het eerste aan het derde gelijk is, en hunne som is één minder dan het getal van het vers, waarin zijn naam voorkomt, welk getal gelijk is aan het vierkant van het getal des kapittels. Dit getal des kapittels is verder gelijk aan het middelste getalmerk zijns ouderdoms min één; maar wanneer men de tweede en derde der cijferletteren in het getal der jaren verwisselt, dan zou deze veranderde ouderdom gelijk zijn aan de jaren van zijnen leeftijd, met het getal van het vers, waarin die leeftijd is uitgedrukt. Vrage: wie deze Oudvader is en hoe lang hij leefde?* (5)

OPGELOST *door* G. J. SARLET, H. FOEKES BAKKER, J. W. MARTINI, R. VAN WIJK Jz., H. VAN KRAAIJENOORD, H. ROODHUIJZEN, A. VAN DER SWAN en W. TOP Wz.

OPLOSSING *van* G. J. SARLET.

Stel het eerste cijfer x en het tweede y, dan is ook het derde

(5) PRINSEN, *Algebra of Algem. Rekenkunde*, pag. 133 N°. 40.

de x, en het getal des ouderdoms zal worden uitgedrukt door $100x + 10y + x$, of $101x + 10y$.

Volgens de opgave van het Voorstel wordt dan nu het getal van het vers, waarin zijn naam staat, uitgedrukt door $2x + y + 1$, en het getal van het kapittel door $y - 1$; daar nu het getal van het vers het vierkant moet zijn van het getal des kapittels, zoo geeft dit de vergelijking:

$$2x + y + 1 = (y - 1)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Verwisselende nu de tweede en derde cijferletter in het getal der jaren, dan is het komende getal $100x + 10x + y$ of $110x + y$; volgens de laatste voorwaarde van het Voorstel moet dus

$$110x + y = 101x + 10y + 2x + y + 3 \quad \ldots (2)$$

zijn, en wij moeten alzoo uit deze vergelijkingen de waarde van x en y zoeken.

Zonderen wij uit de tweede vergelijking de waarde van x af, dan vinden wij:

$$x = \frac{10y + 3}{7}$$

en brengen wij deze waarde van x in de eerste over, zoo komt er:

$$7y^2 - 41y = 6$$

uit welke vierkantsvergelijking gevonden wordt:

$$y = \tfrac{41}{14} \pm \tfrac{43}{14}$$

omdat y hier echter niet negatief kan wezen, gebruiken wij alleen het bovenste teeken, en dit geeft ons $y = 6$, dus $x = \frac{63}{7} = 9$. Het getal der jaren, door den bedoelden Oudvader bereikt, is dus 969. Wat zijn' naam aangaat, hiertoe vindt men het kapittel $y - 1 = 5$, en het getal van het vers $2x + y + 1 = 25$. Het 25e vers uit het 5e Hoofdstuk van het eerste der Boeken Mozes opslaande, vindt men Methusalem.

XXIV. VOORSTEL.

Door A. van der Swan.

Een zeker getal bestaat uit twee getalmerken, welke, opgeteld, de helft van het getal zelf uitmaken, en wanneer men 63 bij dit ge-

tal

tal voegt, zal de som gelijk zijn aan het omgekeerde van dit getal. Welk getal is dit?

Opgelost *door* A. van der Swan, W. Top Wz., H. Roodhuijzen, H. van Kraaijenoord, H. Foekes Bakker, G. J. Sarlet en R. van Wijk Jz.

Oplossing *van* A. van der Swan.

Stel het cijfer der tientallen x en dat der eenheden y, dan is het getal $10x + y$; en daar dit getal gelijk moet zijn aan tweemaal de som van zijne cijferletters, zoo is $10x + y = 2x + 2y$, waaruit terstond volgt: $y = 8x$.

Volgens de tweede voorwaarde, moeten wij hebben:

$$10x + y + 63 = 10y + x$$

dat is, $9y - 9x = 63$, of door 9 deelende:

$$y - x = 7$$

daar nu $y = 8x$ is, zoo wordt deze laatste vergelijking $7x = 7$, of $x = 1$, dus: $y = 8x = 8$. Het gevraagde getal is dus 18.

XXV. Voorstel.

Door A. van der Swan.

Drie kooplieden maken gezelschap. A legt in eene zekere som, B den vierkantswortel uit deze som, en C tweemaal de middelevenredige tusschen deze kapitalen. Indien zij nu hiermede winnen driemaal den vierkantswortel uit den gezamenlijken inleg, en kapitaal en winst te zamen 180 gulden bedraagt, is de vraag naar ieders inleg en de geheele winst?

Opgelost *door* A. van der Swan, W. Top Wz., G. J. Sarlet, H. van Kraaijenoord, R. van Wijk Jz., H. Foekes Bakker en H. Roodhuijzen.

Oplossing *van* A. van der Swan.

Men stelle het geheele kapitaal x^2, dan is de winst $3x$, en bijgevolg is:

$$x^2 + 3x = 180.$$

Deze vierkantsvergelijking oplossende, vinden wij:

$$x = -1\tfrac{1}{2} \pm 13\tfrac{1}{2}$$

dat

dat is $x = 12$, of $x = -15$; het tweede antwoord kan slechts op eene oneigenlijke wijze op ons vraagstuk worden toegepast, want nemende $x = -15$, dan zou de winst, $3x = -45$, negatief worden, dat is, de kooplieden zouden niet gewonnen, maar verloren hebben. Houden wij ons dan alleen aan de oplossing, welke in den opgegevenen zin aan het Voorstel voldoet, dan is $x = 12$, dus het kapitaal 144 gulden en de winst 36 gulden.

Stellen wij nu het kapitaal, dat A heeft bijgedragen, gelijk y^4, dan is dat van B gelijk aan y^2, en dat van C gelijk $2y^3$; en daar de som dezer kapitalen gelijk 144 moet zijn, zoo geeft dit de vergelijking:

$$y^4 + 2y^3 + y^2 = 144$$

of
$$y^2 (y + 1)^2 = 144$$

waaruit
$$y(y + 1) = \pm 12.$$

Wilden wij hier $y(y + 1) = -12$ nemen, dan zouden wij vinden:

$$y^2 + y = -12$$

waaruit
$$y = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{-11\tfrac{3}{4}}$$

Daar dus deze onderstelling y onbestaanbaar zou maken, zullen wij alleen de eerste waarde in rekening brengen, en wij nemen alzoo:

$$y^2 + y = 12$$

waaruit
$$y = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{49}{4}} = -\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{7}{2}$$

dat is: $y = 3$ of $y = -4$.

De tweede waarde $y = -4$ zou de inleg van C, dat is $2y^3$, negatief maken; wij verwerpen dus ook deze waarde en behouden alzoo alleen $y = 3$, en dan is de inleg van A, $y^4 = 81$ gulden, de inleg van B, $y^2 = 9$ gulden, en de inleg van C $= 2y^3 = 54$ gulden.

XXVI. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

De integraal $S = \int \partial x \int \frac{\partial x}{(1 + x)\sqrt{x}}$ *te vinden, onder voorwaarde, dat* S *en* $\frac{\partial S}{\partial x}$ *gelijk* 0 *worden, wanneer* $x = 0$ *is?*

OPGELOST *door* U. HUGUENIN, J. P. DELPRAT en R. LOBATTO.

OPLOSSING *van* U. HUGUENIN.

Stel $\sqrt{x} = z$, dan is $x = z^2$ en $\partial x = 2z\partial z$, dus:

$$S = \int 2z\partial z \int \frac{2\partial z}{1+z^2}$$

en $$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{2z\partial z} = \int \frac{2\partial z}{1+z^2} = 2 \;.\; \textit{Boog Tang. } z$$

daar nu voor $x = 0$, ook $z = 0$ en *Boog Tang.* $z = 0$ wordt, zoo maakt $x = 0$, ook $\frac{\partial S}{\partial x} = 0$, en daar dit met de tweede der opgegevene voorwaarden overeenstemt, zoo heeft de gevondene integraal geene verbetering noodig.

Hierdoor wordt dan:

$$S = \int 2z\partial z \times 2 \textit{ Boog Tang. } z = 4 \int z\partial z \textit{ Boog Tang. } z$$

welke uitdrukking dus nog geïntegreerd moet worden.

Men differentiëre hiertoe z^2 *Boog Tang.* z, en men zal verkrijgen:

$$\partial \,.\, z^2 \textit{ Boog Tang. } z = 2z\partial z \textit{ Boog Tang. } z + \frac{z^2\partial z}{1+z^2}$$

$$= 2z\partial z \textit{ Boog Tang. } z + \partial z - \frac{\partial z}{1+z^2}$$

en deze uitdrukking integrerende, vindt men:

$$z^2 \textit{ Boog Tang. } z = z - \textit{Boog Tang. } z + 2\int z\partial z \textit{ Boog Tang. } z$$

waaruit bij omkeering volgt:

$$2\int z\partial z \textit{ Boog Tang. } z = (1+z^2) \textit{ Boog Tang } z - z$$

en substituerende dit in de waarde van S, dan komt er:

$$S = 2(1+z^2) \textit{ Boog Tang. } z - 2z.$$

welke integraal wederom geene constante behoeft, omdat zij aan de eerste voorwaarde voldoet; door namelijk voor $x = 0$, waarmede $z = 0$ overeenstemt, mede gelijk 0 te worden.

Er blijft dus niets over, dan voor z de waarde $\sqrt{x}$ te substitueren, en dit geeft ons:

$$S = 2(1+x) \textit{ Boog Tang. } \sqrt{x} - 2\sqrt{x}.$$

OPLOSSING *van* J. P. DELPRAT.

De voorgestelde integraal vergelijkende met de bekende formule:

$$\int u\partial x = uv - \int v\partial u$$

Welke uit $\partial\,.\,uv = u\partial v + v\partial u$ voortkomt, zoo kan men:

$$u = \int \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt{x}} \quad \text{en} \quad \partial v = \partial x$$

ftellen; alsdan heeft men $x = v$, en de voorgeftelde integraal wordt

$$S = \int \partial x \int \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt{x}} = x \int \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt{x}} - \int \frac{x\partial x}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (1)$$

Stellende nu $\sqrt{x} = z$, dan is:

$$\int \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int \frac{\partial z}{1+z^2} = 2 \textit{ Boog Tang. } z + C$$

maar men heeft ook $\int \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt{x}} = \frac{\partial S}{\partial x}$ waaruit volgt:

$\frac{\partial S}{\partial x} = 2 \textit{ Boog Tang. } z + C$, en daar $\frac{\partial S}{\partial x}$ voor $x = 0$, dat is, voor $z = 0$, mede gelijk 0 moet worden, zoo is $C = 0$, en men vindt dus, door wederom $z = \sqrt{x}$ te ftellen,

$$\int \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt{x}} = 2 \textit{ Boog Tang } \sqrt{x} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Verder verandert $\int \frac{x\partial x}{(1+x)\sqrt{x}}$, door $\sqrt{x} = z$ te ftellen, in:

$$\int \frac{x\partial x}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\int \partial z - 2\int \frac{\partial z}{1+z^2}$$
$$= 2z - 2 \textit{ Boog Tang. } z$$
$$= 2\sqrt{x} - 2 \textit{ Boog Tang. } \sqrt{x} \quad (3)$$

Wanneer wij dus de waarden van (2) en (3) in de vergelijking (1) fubftitueren, komt er:

$$\int \partial x \int \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt{x}} = 2x \textit{ Boog Tang. } \sqrt{x} + 2 \textit{ Boog Tang. } \sqrt{x} - 2\sqrt{x} + C'$$

of $S = 2\,\{(x+1) \textit{ Boog Tang. } \sqrt{x} - \sqrt{x}\} + C$

doch voor $x = 0$ moet ook $S = 0$ worden, en dit geeft $C = 0$, derhalve wordt de gevraagde integraal

$$\int \partial x \int \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt{x}} = 2\,\{(x+1) \textit{ Boog Tang } \sqrt{x} - \sqrt{x}\}$$

XXVII. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

De integraal $S = \int \partial x \int \frac{\partial x}{(1+x)\, x^{\frac{2}{3}}}$ *te vinden, onder dezelfde bepalingen, als in het voorgaande Voorstel?*

OPGELOST *door* U. HUGUENIN, J. P. DELPRAT en R. LOBATTO.

OPLOSSING *van* U. HUGUENIN.

Men stelle $x^{\frac{1}{3}} = z$, dan is $x = z^3$ en $\partial x = 3z^2 \partial z$, waardoor de opgegevene integraal verandert in:

$$S = \int 3\, z^2 \partial z \int \frac{3\, \partial z}{1 + z^3} \quad \dots\dots \quad (a)$$

maar daar $1 + z^3 = (1+z)\,(1 - z + z^2)$ is, zoo vindt men door de bekende leerwijzen voor de ontbinding der stelkunstige breuken:

$$\frac{3\,\partial z}{1+z^3} = \frac{\partial z}{1+z} - \frac{z\partial z - 2\,\partial z}{z^2 - z + 1}$$

$$= \frac{\partial z}{1+z} - \tfrac{1}{2} \times \frac{2\,z\partial z - \partial z}{z^2 - z + 1} + \tfrac{3}{2} \times \frac{\partial z}{z^2 - z + 1};$$

en dit integrerende komt er, de Neperiaansche Logarithmen gebruikende,

$$\int \frac{3\partial z}{1+z^3} = Log.\,(1+z) - \tfrac{1}{2}\, Log.\,(z^2 - z + 1) + \tfrac{3}{2} \int \frac{\partial z}{z^2 - z + 1},$$

Nu is volgens eene bekende formule (zie VEGA *Vorlesungen über die Mathematiek II:er Band. Zweite Auflage, pag.* 582)

$$\int \frac{m\partial x}{a + bx + cx^2} = \frac{2\,m}{\sqrt{(4ac - b^2)}}\ Boog\ Tang.\ \frac{b + 2\,cx}{\sqrt{(4ac - b^2)}}$$

en als men hierin $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ en $m = 1$ stelt, dan vindt men:

$$\int \frac{\partial z}{z^2 - z + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ Boog\ Tang.\ \frac{2\,z - 1}{\sqrt{3}}$$

waaruit dan volgt:

$$\int \frac{3\,\partial z}{1+z^3} = Log.(1+z) - \tfrac{1}{2} Log.(z^2 - z + 1) + \sqrt{3}.\,Boog Tang.\,\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + C$$

Daar

Daar nu deze integraal, de waarde van $\frac{\partial S}{\partial x}$ voorstellende, moet verdwijnen als $x = 0$, of liever als $z = 0$ is, zoo is $C = -\sqrt{3}\,.\,\textit{Boog Tang.}\,\frac{-1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,.\,\textit{Boog Tang.}\,\frac{1}{\sqrt{3}}$, waardoor onze integraal verandert in;

$$\int \frac{3\partial z}{1+z^3} = L.(1+z) - \tfrac{1}{2}L.(z^2-z+1) + \sqrt{3}\,.\left\{\textit{BoogT.}\,\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + \textit{BoogT.}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$$

maar omdat

$\textit{Boog Tang.}\,A + \textit{Boog Tang.}\,B = \textit{Boog Tang.}\,\frac{A+B}{1-AB}$ is, zoo hebben wij;

$$\textit{Boog Tang.}\,\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + \textit{Boog Tang.}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \textit{Boog Tang.}\,\frac{\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{2z-1}{3}}$$

waardoor onze gevondene integraal dan eindelijk wordt:

$$\int \frac{3\partial z}{1+z^3} = \textit{Log.}\,(1+z) - \tfrac{1}{2}\textit{Log.}\,(z^2-z+1) + \sqrt{3}\,.\,\textit{Boog Tang.}\,\frac{z\sqrt{3}}{2-z}.$$

Substitueren wij dit nu in de vergelijking (a), dan hebben wij:

$$S = \int 3z^2\partial z\;\textit{Log.}\,(1+z) - \int \tfrac{3}{2}z^2\partial z\;\textit{Log.}\,(z^2-z+1)$$
$$+ \sqrt{3}\,.\int 3z^2\partial z\;\textit{Boog Tang.}\,\frac{z\sqrt{3}}{2-z}.$$

Om de eerste dezer integralen te vinden, hebben wij:

$$\partial.\,z^3\,\textit{Log.}\,(1+z) = 3z^2\partial z\;\textit{Log}\;(1+z) + \frac{z^3\partial z}{1+z}$$
$$= 3z^2\partial z\;\textit{Log.}\,(1+z) + (z^2-z+1)\,\partial z - \frac{\partial z}{1+z}$$

en wanneer wij dit integreren, komt er, na verschikking der termen,

$$\int 3z^2\partial z\;\textit{Log.}\,(1+z) = z^3\,\textit{Log.}\,(1+z) + \textit{Log.}\,(1+z) - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{2}z^2 - z$$
$$= (1+z^3)\,\textit{Log.}\,(1+z) - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{2}z^2 - z.$$

Ten einde de tweede integraal te verkrijgen, differentiëre men $\tfrac{1}{2}z^3\;\textit{Log.}\,(z^2-z+1)$, en men zal vinden:

$$\partial.\tfrac{1}{2}z^3\,\textit{Log.}\,(z^2-z+1) = \tfrac{3}{2}z^2\partial z\;\textit{Log.}\,(z^2-z+1)\;\ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{z^3\,(2z\partial z - \partial z)}{z^2-z+1}$$

of wanneer wij het laatste gebroken behoorlijk herleiden:

$$\partial . \tfrac{1}{3} z^3 \, Log. (z^2 - z + 1) = \tfrac{3}{3} z^2 \partial z \, Log \, (z^2 - z + 1) + z^2 \partial z \; . \; .$$

$$+ \tfrac{1}{2} z \partial z - \tfrac{1}{2} \partial z - \tfrac{1}{2} . \frac{2 z \partial z - \partial z}{z^2 - z + 1}$$

en wanneer wij dit wederom integreren:

$$\tfrac{1}{3} z^3 \, Log \, (z^2 - z + 1) = \int \tfrac{3}{3} z^2 \partial z \, Log. (z^2 - z + 1) + \tfrac{1}{3} z^3 \; . \; .$$

$$+ \tfrac{1}{4} z^2 - \tfrac{1}{2} z - \tfrac{1}{2} \, Log. \, (z^2 - z + 1)$$

waaruit dan terstond volgt:

$$\int \tfrac{3}{3} z^2 \partial z \, Log. \, (z^2 - z + 1) = \tfrac{1}{3} (1 + z^3) \, Log. (z^2 - z + 1) \; . \; .$$

$$- \tfrac{1}{3} z^3 - \tfrac{1}{4} z^2 + \tfrac{1}{2} z.$$

Ter bepaling van de derde integraal hebben wij eindelijk:

$$\partial . \left\{ z^3 \, Boog \; Tang. \frac{z\sqrt{3}}{2 - z} \right\} = 3 \, z^2 \partial z \, Boog \; Tang \, \frac{z\sqrt{3}}{2 - z}$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{z^3 \partial z}{z^2 - z + 1}$$

dat is, na herleiding van het laatste gebroken,

$$\partial . \left\{ z^3 \, Boog \; Tang. \frac{z\sqrt{3}}{2 - z} \right\} = 3 \, z^2 \partial z \, Boog \; Tang. \frac{z\sqrt{3}}{2 - z}$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} . \left\{ z \partial z + \partial z - \frac{\partial z}{z^2 - z + 1} \right\}$$

en dit integrerende komt er, door middel van het voorgaande,

$$z^3 \, Boog \; Tang. \frac{z\sqrt{3}}{2 - z} = \int 3 \, z^2 \partial z \, Boog \; Tang. \frac{z\sqrt{3}}{2 - z}$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2} \left\{ \tfrac{1}{2} z^2 + z - \frac{2}{\sqrt{3}} \, Boog \; Tang. \frac{2z - 1}{\sqrt{3}} \right\}$$

waaruit dan volgt:

$$\sqrt{3} \int 3 z^2 \partial z \, Boog \; Tang. \frac{z\sqrt{3}}{2 - z} = \sqrt{3} \, Boog \; Tang. \frac{z\sqrt{3}}{2 - z}$$

$$+ \sqrt{3} . Boog \; Tang. \frac{2z - 1}{\sqrt{3}} - \tfrac{3}{4} z^2 - \tfrac{3}{2} z$$

Vereenigt men nu deze drie gevondene integralen, dan vindt men; —

$$S = (1 + z^3) \left\{ Log. \, (1 + z) - \tfrac{1}{2} \, Log. \, (z^2 - z + 1) \right\}$$

$$+ \sqrt{3} . \left\{ Boog \; Tang. \frac{z\sqrt{3}}{2 - z} + Boog \; Tang. \frac{2z - 1}{\sqrt{3}} \right\} - 3 z + C^t .$$

en daar nu wederom voor $z = 0$ of $z = 0$ ook $S = 0$ moet zijn,

zijn, zoo is $C' = \sqrt{3} \,.\, Boog\ Tang. \frac{1}{\sqrt{3}}$, en wanneer men deze waarde van C' met $Boog\ Tang. \frac{2z-1}{\sqrt{3}}$ te zamen trekt, even zoo als wij dit boven hebben aangewezen, dan komt er:

$$S = (1+z^3)\left\{Log.(1+z) - \tfrac{1}{2} Log.(z^2 - z + 1)\right\} \ldots$$
$$+ \sqrt{3}\,.\,(1+z^3)\, Boog\ Tang. \frac{z\sqrt{3}}{2-z} - 3z$$

en in plaats van z wederom $\sqrt[3]{x}$ schrijvende:

$$S = (1+x)\left\{L(1+x^{\frac{1}{3}}) - \tfrac{1}{2}L.(1-x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{2}{3}}) + \sqrt{3}.BoogT.\frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{2-x^{\frac{1}{3}}}\right\} - 3x^{\frac{1}{3}}$$

Oplossing *van* J. P. Delprat.

De formule $\int u\partial v = uv - \int v\partial u$ met de opgegevene vergelijkende, moet men stellen:

$$\int \frac{\partial x}{(1+x)\,x^{\frac{2}{3}}} = u \quad \text{en} \quad \partial x = \partial v$$

dus
$$\partial u = \frac{\partial x}{(1+x)\,x^{\frac{2}{3}}} \quad \text{en} \quad v = x$$

en hierdoor verandert de voorgestelde formule in:

$$\int \partial x \int \frac{\partial x}{(1+x)\,x^{\frac{2}{3}}} = x \int \frac{\partial x}{(1+x)\,x^{\frac{2}{3}}} - \int \frac{x^{\frac{1}{3}}\partial x}{(1+x)} \,.\, (1)$$

Stelt men nu $x^{\frac{1}{3}} = z$, dus $x = z^3$ en $\partial x = 3z^2\partial z$, dan wordt:

$$\int \frac{\partial x}{(1+x)\,x^{\frac{2}{3}}} = 3\int \frac{\partial z}{1+z^3} = 3\int \frac{\partial z}{(1+z)(1-z+z^2)}$$

Splitst men verder dit gebroken in twee andere, waarvan $1+z$ en $1-z+z^2$ de noemers zijn, dan vindt men:

$$\frac{1}{(1+z)(1-z+z^2)} = \frac{1}{3(z+1)} + \frac{-z+2}{3(1-z+z^2)}$$

en hierdoor gaat onze laatste integraal over in:

 $\int$

$$\int \frac{\partial x}{(1+x)\,x^{\frac{2}{3}}} = \int \frac{\partial z}{z+1} + \int \frac{(2-z)\,\partial z}{1-z+z^2} \quad . \ (2).$$

Voor het eerste gedeelte dezer integraal hebben wij:

$$\int \frac{\partial z}{z+1} = Log.\,(z+1) \quad . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

en voor het tweede deel stellen wij $z = y + \frac{1}{2}$, dan wordt $z^2 - z + 1 = y^2 + \frac{3}{4}$ en $\partial z = \partial y$, waardoor

$$\int \frac{(2-z)\,\partial z}{1-z+z^2} = \int \frac{(\frac{3}{2} - y)\,\partial y}{y^2 + \frac{3}{4}} = \tfrac{3}{2} \int \frac{\partial y}{y^2+\frac{3}{4}} - \int \frac{y\,\partial y}{y^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \sqrt{3} \ . \ Boog\ Tang.\, \frac{2y}{\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2}\, Log.\,(y^2 + \tfrac{3}{4}) \quad . \ . \ (4)$$

Brengt men nu de waarden (3) en (4) in de vergelijking (2) over, dan vindt men, na voor y deszelfs waarde $z - \frac{1}{2}$ gesteld te hebben,

$$\int \frac{\partial x}{(1+x)\,x^{\frac{2}{3}}} = Log.(z+1) - \tfrac{1}{2}L.(z^2 - z+1) + \sqrt{3}.BoogT.\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}(z-\tfrac{1}{2})\right\}$$

$$= Log\ \frac{z+1}{\sqrt{(z^2-z+1)}} + \sqrt{3}\ Boog\,Tang.\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}(z-\tfrac{1}{2})\right\} + C$$

en stellende hierin wederom $z = x^{\frac{1}{3}}$,

$$\int \frac{\partial x}{(1+x)\,x^{\frac{2}{3}}} = Log\ \frac{x^{\frac{1}{3}}+1}{\sqrt{(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1)}} + \sqrt{3}\ Boog Tang. \frac{2}{\sqrt{3}}.(x^{\frac{1}{3}}-\tfrac{1}{2}) + C$$

Daar nu dit de waarde is van $\frac{\partial S}{\partial x}$, en deze waarde voor $x = 0$ moet verdwijnen, zoo vinden wij:

$$0 = \sqrt{3}\,.\,Boog\,Tang\ \frac{-1}{\sqrt{3}} + C \ \text{ of } \ C = \sqrt{3}\,.\,Boog\,Tang.\ \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Deze waarde van C substituerende, en de bogen, door de formule:

$$Boog\ Tang.\ a + Boog\ Tang.\ b = Boog\ Tang.\ \frac{a+b}{1-ab}$$

vereenigende, komt er eindelijk:

$$\int \frac{\partial x}{(1+x)\,x^{\frac{2}{3}}} = Log.\,\frac{x^{\frac{1}{3}}+1}{\sqrt{(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1)}} + \sqrt{3}\,.\,Boog\,Tang.\,\frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{2-x^{\frac{1}{3}}} \quad . \ (5)$$

Het eerste deel van de vergelijking (1) alzoo geïntegreerd hebbende, blijft het tweede deel nog overig. Stellende hierin wederom $x^{\frac{1}{3}} = z$, dan wordt hetzelve:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{3}}\partial x}{1+x} = 3\int \frac{z^3\,\partial z}{1+z^3} = 3\int \partial z - 3\int \frac{\partial z}{1+z^3}$$

maar

maar omdat $3\int\frac{\partial z}{1+z^3}=\int\frac{\partial x}{(1+x)\,x^{\frac{2}{3}}}$ is, en wij deze laatste integraal in (5) gevonden hebben, zoo is, daar verder $3\int\partial z=3z=3x^{\frac{1}{3}}$ is,

$$\int\frac{x^{\frac{1}{3}}\partial x}{1+x}=3x^{\frac{1}{3}}-Log.\frac{x^{\frac{1}{3}}+1}{\sqrt{(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1)}}-Boog\,Tang.\frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{2-x^{\frac{1}{3}}}. \quad (6)$$

Brengen wij dan de waarden (5) en (6) in de vergelijking (1) over, zoo vinden wij;

$$\int\partial x\int\frac{\partial x}{(1+x)x^{\frac{2}{3}}}=x\,Log.\frac{x^{\frac{1}{3}}+1}{\sqrt{(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1)}}+x\sqrt{3}\,Boog\,Tang.\frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{2-x^{\frac{1}{3}}}-3x^{\frac{1}{3}}$$
$$+Log.\frac{x^{\frac{1}{3}}+1}{\sqrt{(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1)}}+\sqrt{3}\,Boog\,Tang\,\frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{2-x^{\frac{1}{3}}}+C'$$

Daar nu deze waarde verdwijnen moet als $x=0$ is, zoo is $C'=0$, en dit geeft ons eindelijk:

$$S=(x+1)\left\{Log.\frac{x^{\frac{1}{3}}+1}{\sqrt{(x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1)}}+\sqrt{3}\,.\,Boog\,Tang.\frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{3}}{2-x^{\frac{1}{3}}}\right\}-3x^{\frac{1}{3}}$$

XXVIII. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

De integraal $S=\int\partial x\int\frac{\partial x}{(1+x)\,x^{\frac{3}{4}}}$ *te vinden, nogmaals onder dezelfde bepalingen, als in de voorgaande Voorstellen?*

OPGELOST *door* U. HUGUENIN, J. P. DELPRAT en R. LOBATTO.

OPLOSSING *van* U. HUGUENIN.

Men stelle $x^{\frac{1}{4}}=z$, dan is $x=z^4$, en $\partial x=4z^3\partial z$, waardoor:

$$S=\int\partial x\int\frac{\partial x}{(1+x)\,x^{\frac{3}{4}}}=\int 4z^3\partial z\int\frac{4\partial z}{1+z^4}$$

daar men voorts heeft:

$$1+z^4=(1-z\sqrt{2}+z^2)(1+z\sqrt{2}+z^2)$$

zoo stelle men:

$$\frac{1}{1+z^4}=\frac{A+Bz}{1-z\sqrt{2}+z^2}+\frac{C+Dz}{1+z\sqrt{2}+z^2}.$$

 Waar-

Wanneer men nu deze breuken onder eenen zelfden noemer brengt, dan verkrijgt men voor de som der tellers:

$$(A+C)+(B+D+A\sqrt{2}-C\sqrt{2})z+(A+C+B\sqrt{2}-D\sqrt{2})z^2$$
$$+(B+D)z^3=1$$

daar nu deze vergelijking voor alle waarden van z gelden moet, zoo verkrijgt men de vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} A+C=1 \\ B+D+(A-C)\sqrt{2}=0 \\ A+C+(B-D)\sqrt{2}=0 \\ B+D=0 \end{array}\right\} \text{ waaruit } \left\{\begin{array}{l} A=\tfrac{1}{2} \\ B=-\tfrac{1}{4}\sqrt{2} \\ C=\tfrac{1}{2} \\ D=+\tfrac{1}{4}\sqrt{2} \end{array}\right.$$

en hierdoor wordt alzoo:

$$\frac{1}{1+z^4}=\frac{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}z\sqrt{2}}{1-z\sqrt{2}+z^2}+\frac{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}z\sqrt{2}}{1+z\sqrt{2}+z^2}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{\sqrt{2}-z}{1-z\sqrt{2}+z^2}+\frac{\sqrt{2}+z}{1+z\sqrt{2}+z^2}\right\}$$

waaruit dan verder volgt:

$$\frac{4\partial z}{1+z^4}=\sqrt{2}\,.\left\{\frac{(\sqrt{2}-z)\partial z}{1-z\sqrt{2}+z^2}+\frac{(\sqrt{2}+z)\partial z}{1+z\sqrt{2}+z^2}\right\}$$
$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left\{-\frac{(2z-\sqrt{2})\partial z}{z^2-z\sqrt{2}+1}+\frac{\partial z\sqrt{2}}{z^2-z\sqrt{2}+1}+\frac{(2z+\sqrt{2})\partial z}{z^2+z\sqrt{2}+1}+\frac{\partial z\sqrt{2}}{z^2+z\sqrt{2}+1}\right\}$$

en wanneer wij dit term voor term integreren;

$$\int\frac{4\partial z}{1+z^4}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left\{-Log.(z^2-z\sqrt{2}+1)+Log.(z^2+z\sqrt{2}+1)\right\}$$
$$+\int\frac{\partial z}{z^2-z\sqrt{2}+1}+\int\frac{\partial z}{z^2+z\sqrt{2}+1}$$

maar volgens de formule van VEGA, welke wij in het voorgaande Voorstel hebben opgegeven, is:

$$\int\frac{\partial z}{z^2+z\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}\ \textit{Boog Tang.}\ (z\sqrt{2}+1)$$

en $$\int\frac{\partial z}{z^2-z\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}\ \textit{Boog Tang.}\ (z\sqrt{2}-1)$$

zoodat onze voorgaande integraal hierdoor overgaat in:

$$\int\frac{4\partial z}{1+z^4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{Log.(z^2+z\sqrt{2}+1)-Log.(z^2+z\sqrt{2}+1)\right\}$$
$$+\sqrt{2}\left\{\textit{Boog Tang.}(z\sqrt{2}+1)+\textit{Boog Tang}(z\sqrt{2}-1)\right\}+C$$

welke constante echter gelijk 0 moet zijn, omdat $x=0$, waarme-

mede $z = 0$ overeenkomt, onze integraal, welke de waarde van $\frac{\partial S}{\partial x}$ voorstelt, naar behooren doet verdwijnen.

Deze gevondene waarde in de formule voor S overbrengende, verkrijgen wij:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\int 4z^3\partial z \, Log.(z^2+z\sqrt{2}+1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\int 4z^3\partial z \, Log.(z^2-z\sqrt{2}+1)$$
$$+ \sqrt{2}\int 4z^3\partial z \, Boog\,Tang.(z\sqrt{2}+1) + \sqrt{2}\int 4z^3\partial z \, Boog\,Tang.(z\sqrt{2}-1)$$

Om de eerste dezer integralen te vinden, heeft men:

$$\partial . z^4 Log\,(z^2+z\sqrt{2}+1) = 4z^3\partial z \, Log.(z^2+z\sqrt{2}+1) + \ldots$$
$$\frac{z^4(2z\partial z+\partial z\sqrt{2})}{z^2+z\sqrt{2}+1} = 4z^3\partial z \, Log\,(z^2+z\sqrt{2}+1) + 2z^3\partial z - \ldots$$
$$z^2\partial z\sqrt{2} + \partial z\sqrt{2} - \frac{(2z+\sqrt{2})\partial z}{z^2+z\sqrt{2}+1}$$

waarvan de integraal is:

$$z^4 Log.(z^2+z\sqrt{2}+1) = \int 4z^3\partial z \, Log.(z^2+z\sqrt{2}+1) + \tfrac{1}{2}z^4$$
$$- \tfrac{1}{3}z^3\sqrt{2} + z\sqrt{2} - Log.(z^2+z\sqrt{2}+1)$$

waaruit dan volgt:

$$\int 4z^3\partial z \, Log.(z^2+z\sqrt{2}+1) = (1+z^4)\,Log.(z^2+z\sqrt{2}+1)$$
$$- \tfrac{1}{2}z^4 + \tfrac{1}{3}z^3\sqrt{2} - z\sqrt{2} \;\ldots\ldots\; (1)$$

en op dezelfde wijze vinden wij voor de tweede integraal:

$$\int 4z^3 \, Log.(z^2-z\sqrt{2}+1) = (1+z^4)\,Log.(z^2-z\sqrt{2}+1)$$
$$- \tfrac{1}{2}z^4 - \tfrac{1}{3}z^3\sqrt{2} + z\sqrt{2} \;\ldots\ldots\; (2)$$

Ten einde de derde integraal te vinden, hebben wij:

$$\partial . z^4 \, Boog\,Tang.(z\sqrt{2}+1) = 4z^3\partial z \, Boog\,Tang.(z\sqrt{2}+1)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{2} . \frac{z^4\partial z}{z^2+z\sqrt{2}+1} = 4z^3\partial z \, Boog\,Tang.(z\sqrt{2}+1) + \ldots$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left\{z^2\partial z - z\partial z\sqrt{2} + \partial z - \frac{\partial z}{z^2+z\sqrt{2}+1}\right\}$$

en dit integrerende, heeft men:

$$z^4 \, Boog\,Tang.(z\sqrt{2}+1) = \int 4z^3\partial z \, Boog\,Tang.(z\sqrt{2}+1)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\left\{\tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{2}z^2\sqrt{2} + z - \sqrt{2}\,Boog\,Tang.\,(z\sqrt{2}+1)\right\}$$

waaruit dan volgt:

$$\int 4z^3\partial z \, Boog\,Tang.(z\sqrt{2}+1) = (1+z^4)\,Boog\,Tang.(z\sqrt{2}+1)$$
$$- \tfrac{1}{6}z^3\sqrt{2} + \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{2}z\sqrt{2} \;\ldots\ldots\; (3)$$

en op gelijke wijze vindt men voor de vierde integraal:

$\int$

$$\int 4z^3\partial z\ \textit{Boog Tang.}(z\sqrt{2}-1)=(1+z^4)\ \textit{Boog Tang.}(z\sqrt{2}-1)$$
$$-\tfrac{1}{6}z^3\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}z^2-\tfrac{1}{2}z\sqrt{2}\ \ldots\ldots\ (4)$$

Brengende (1), (2), (3) en (4) over in de laatste uitdrukking voor S, dan wordt dezelve:

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+z^4)\left\{\textit{Log.}(z^2+z\sqrt{2}+1)-\textit{Log.}(z^2-z\sqrt{2}+1)\right\}+$$
$$\frac{2}{\sqrt{2}}(1+z^4)\left\{\textit{Boog Tang.}(z\sqrt{2}+1)+\textit{Boog Tang.}(z\sqrt{2}-1)\right\}-4z$$

Wanneer wij de Logarithmen, alsmede de bogen, elk tot éénen term te zamen trekken, dan vinden wij:

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+z^4)\left\{\textit{Log.}\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1}+2\ \textit{Boog Tang.}\frac{z\sqrt{2}}{1-z^2}\right\}-4z$$

en stellen wij voor z wederom $x^{\frac{1}{4}}$:

$$S=\frac{1+x}{\sqrt{2}}\left\{\textit{Log.}\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}+1}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}+1}+2\ \textit{Boog Tang.}\frac{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}}{1-x^{\frac{1}{2}}}\right\}-4x^{\frac{1}{4}}$$

welke ook aldus kan geschreven worden:

$$S=\frac{1+x}{\sqrt{2}}\left\{\textit{Log.}\frac{1+x}{(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}+1)^2}+2\ \textit{Boog Tang.}\frac{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}}{1-x^{\frac{1}{2}}}\right\}-4x^{\frac{1}{4}}$$

Oplossing van J. P. Delprat.

Vergelijken wij de opgegevene uitdrukking wederom met:

$$\int u\partial v=uv-\int v\partial u$$

zoo heeft men:

$$u=\int\frac{\partial x}{(1+x)\,x^{\frac{3}{4}}}\quad\text{en}\quad\partial v=\partial x$$

dus $\quad \partial u=\dfrac{\partial x}{(1+x)\,x^{\frac{3}{4}}}\quad$ en $\quad v=x$

waardoor de gegevene formule dan overgaat in:

$$S=\int\partial x\int\frac{\partial x}{(1+x)x^{\frac{3}{4}}}=x\int\frac{\partial x}{(1+x)x^{\frac{3}{4}}}-\int\frac{x^{\frac{1}{4}}\partial x}{(1+x)}\ldots(1)$$

Stelt men nu $z=x^{\frac{1}{4}}$, dan wordt:

$$\int\frac{\partial x}{(1+x)\,x^{\frac{3}{4}}}=4\int\frac{\partial z}{1+z^4}$$

en daar de factoren van $(1+z^4)$ zijn:

$$z^2-z\sqrt{2}+1\quad\text{en}\quad z^2+z\sqrt{2}+1$$

zoo kan men het gebroken $\frac{1}{1+z^4}$ in twee andere gebrokens verdeelen, welke deze factoren tot noemers hebben; men zal namelijk vinden:

$$\frac{1}{1+z^4}=\frac{1-\frac{1}{2}z\sqrt{2}}{2(z^2-z\sqrt{2}+1)}+\frac{1+\frac{1}{2}z\sqrt{2}}{2(z^2+z\sqrt{2}+1)},$$

waardoor men dan verkrijgt:

$$\int\frac{\partial z}{1+z^4}=\tfrac{1}{2}\int\frac{(1-\frac{1}{2}z\sqrt{2})\,\partial z}{z^2-z\sqrt{2}+1}+\tfrac{1}{2}\int\frac{(1+\frac{1}{2}z\sqrt{2})\,\partial z}{z^2+z\sqrt{2}+1}\quad ..(2)$$

Stellende verder voor de eerste, $z=y+\frac{1}{2}\sqrt{2}$, dan wordt:

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{(1-\frac{1}{2}z\sqrt{2})\,\partial z}{z^2-z\sqrt{2}+1}=\tfrac{1}{4}\int\frac{(1-y\sqrt{2})\,\partial y}{y^2+\frac{1}{2}}=\tfrac{1}{4}\int\frac{\partial y}{y^2+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{y\,\partial y}{y^2+\frac{1}{2}}$$
$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,.\,\textit{Boog Tang.}\ y\sqrt{2}-\tfrac{1}{8}\sqrt{2}\ \textit{Log}\ (y^2+\tfrac{1}{2})$$

of voor y deszelfs waarde stellende:

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{(1-\frac{1}{2}z\sqrt{2})\,\partial z}{z^2-z\sqrt{2}+1}=\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\left\{\textit{Boog T.}(z\sqrt{2}-1)-L.\sqrt{(z^2-z\sqrt{2}+1)}\right\}$$

en wanneer wij voor de tweede integraal $z=y-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ stellen, vinden wij, op dezelfde wijze te werk gaande,

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{(1+\frac{1}{2}z\sqrt{2})\,\partial z}{z^2+z\sqrt{2}+1}=\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\left\{\textit{Boog T.}(z\sqrt{2}+1)+L.\sqrt{(z^2+z\sqrt{2}+1)}\right\}$$

de vergelijking (2) verandert dus, door de substitutie van deze twee integralen, in:

$$\int\frac{\partial z}{1+z^4}=\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\left\{L.\frac{\sqrt{(z^2+z\sqrt{2}+1)}}{\sqrt{(z^2-z\sqrt{2}+1)}}+B.T.(z\sqrt{2}-1)+B.T.(z\sqrt{2}+1)\right\}$$

en wanneer wij de bogen, door de formule:

$$\textit{Boog Tang.}\ a+\textit{Boog Tang.}\ b=\textit{Boog Tang}\ \frac{a+b}{1-ab}$$

vereenigen, hetgeen ons geeft:

$$\textit{Boog Tang.}(z\sqrt{2}-1)+\textit{Boog Tang.}(z\sqrt{2}+1)=\textit{Boog Tang.}\frac{z\sqrt{2}}{1-z^2}$$

verandert deze integraal in:

$$\int\frac{\partial z}{1+z^4}=\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\left\{\textit{Log.}\sqrt{\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1}}+\textit{Boog Tang.}\frac{z\sqrt{2}}{1-z^2}\right\}$$

dat is, voor z de waarde $x^{\frac{1}{4}}$ in de plaats stellende,

$$\frac{\partial S}{\partial x}=\tfrac{1}{4}\int\frac{\partial x}{(1+x)x^{\frac{3}{4}}}=\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\left\{\textit{Log.}\sqrt{\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}+1}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}+1}\right)}+B.T.\frac{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}}{1-x^{\frac{1}{2}}}\right\}\quad (3)$$

welke geene constante moet worden toegevoegd, omdat zij voor $x=0$ mede 0 wordt.

He-

Het tweede gedeelte van de uitdrukking (1) wordt, door $x^{\frac{1}{4}} = z$ te stellen,

$$\int \frac{x^{\frac{1}{4}}\partial x}{x+1} = 4\int \frac{z^4 \partial z}{z^4+1} = 4\int \partial z - 4\int \frac{\partial z}{1+z^4}$$

Daar nu de waarde van $\int \frac{\partial z}{1+z^4} = \frac{1}{4}\int \frac{\partial x}{(1+x)x^{\frac{3}{4}}}$ in (3) gevonden is, en verder $\int \partial z = z = x^{\frac{1}{4}}$ is, zoo heeft men:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{4}}\partial x}{(x+1)} = 4x^{\frac{1}{4}} - \sqrt{2}\left\{ Log.\sqrt{\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}+1}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}+1}} + Boog Tang.\frac{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}}{1-x^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

en wanneer wij deze waarde, benevens die uit (3), in de vergelijking (1) overbrengen,

$$S = x\sqrt{2}\left\{ Log.\sqrt{\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}+1}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}+1}} + Boog Tang.\frac{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}}{1-x^{\frac{1}{2}}}\right\} - 4x^{\frac{1}{4}}$$
$$+\sqrt{2}\left\{ Log.\sqrt{\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}+1}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}+1}} + Boog Tang.\frac{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}}{1-x^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

Deze integraal behoeft wederom geene constante, omdat zij aan de vereischte voldoet, van voor $x = 0$ te verdwijnen. De overeenkomstige termen vereenigende, neemt zij deze gedaante aan:

$$S = (x+1)\sqrt{2}\left\{ Log.\sqrt{\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}+1}{x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}+1}} + Boog Tang.\frac{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{2}}{1-x^{\frac{1}{2}}}\right\} - 4x^{\frac{1}{4}}$$

XXIX. VOORSTEL.

Door H. VAN KRAAIJENOORD.

Iemand koopt twee stukken stof, waarvan het eene de el vier gulden meer kost dan die van het andere. Voor het stuk van de beste stof betaalt hij 360 gulden, maar voor het andere stuk, dat 10 el langer is, slechts 320 gulden. Hoe veel el is elk stuk lang? (6)

OPGELOST *door* H. FOEKES BAKKER, W. TOP WZ., H. VAN KRAAIJENOORD, A. VAN DER SWAN; G. J. SARLET, R. VAN WIJK JZ. en H. ROODHUIJZEN.

OPLOSSING *van* H. FOEKES BAKKER.

Stel de lengte van het eene stuk x ellen, dan is de lengte van het

(6) A. VAN BEMMELEN, *Lessen over de Algebra of Stelkunst*, *pag.* 90. N°. 12.

het andere ſtuk $x + 10$ ellen. De prijs van ieder el is alzoo voor het eerſte ſtuk $\frac{360}{x}$ en voor het tweede ſtuk $\frac{320}{x + 10}$ gulden, en daar deze prijzen 4 gulden met elkander moeten verſchillen, zoo is:

$$\frac{360}{x} - 4 = \frac{320}{x + 10}$$

of met het product der noemers vermenigvuldigende,

$$360\,(x + 10) - 4x\,(x + 10) = 320x$$

dat is $\quad 360x + 3600 - 4x^2 - 40x = 320x$

of wel $\quad 4x^2 = 3600$, dus $x^2 = 900$ en $x = 30$.

Het beste ſtuk was dus 30, en het andere 40 ellen lang.

XXX. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Eenen gegevenen driehoek in twee deelen te verdeelen, welke tot elkander in gegevene reden ſtaan, door eene lijn, welke met eene gegevene lijn evenwijdig loopt?

OPGELOST *door* J. W. MARTINI, W. TOP Wz, R. VAN WIJK Jz., H. ROODHUIJZEN en H. VAN KRAAIJENOORD.

OPLOSSING *van* J. W. MARTINI.

Laat ABC *Fig.* 14 de gegevene driehoek zijn, en PQ de lijn, waaraan de gevraagde lijn evenwijdig moet loopen, en ſtellen wij verder, dat DE de begeerde lijn is, zoodanig, dat men heeft:

$$\triangle\,ABC : \triangle\,BDE = p : r.$$

Indien wij dan uit het hoekpunt A eene lijn AF evenwijdig met PQ trekken, welke BC of derzelver verlengde ſnijdt in F, dan is:

$$\triangle\,ABF : \triangle\,ABC = BF : BC$$

maar volgens de onderſtelling is:

$$\triangle\,ABC : \triangle\,BDE = p : q:$$

vermenigvuldigende dan de overeenkomſtige termen van deze evenredigheden, dan komt er:

$\triangle$

$$\triangle ABF : \triangle BDE = p \times BF : q \times BC$$

maar, omdat de driehoeken ABF en BDE gelijkvormig zijn, zoo is ook:

$$\triangle ABF : \triangle BDE = BF^2 : BE^2$$

waaruit volgt:

$$BF^2 : BE^2 = p \times BF : q \times BC$$

of $$BF : BE^2 = p : q \times BC$$

zoodat $$BE^2 = \frac{q \times BC \times BF}{p}$$

en $$BE = \sqrt{\frac{q}{p}\,BC \times BF}.$$

Zijn dus p en q gegevene getallen, dan heeft men deze eenvoudige construtie:

Zoek eene middelevenredige tusschen $\frac{q}{p} \times BC$ *en* BF. *Maak* BE *gelijk aan dezelve, en trek* ED *evenwijdig aan* PQ *of* AF, *dan zal* ED *de begeerde deellijn zijn.*

Zijn p en q gegevene lijnen, dan construere men eerst eene vierde evenredige tot p, q en BC; deze zal dan gelijk $\frac{p}{q} \times$ BC zijn, en dan volge men verder de voorgaande constructie.

Aanmerking. Is de reden tusschen p en q zoodanig, dat onze constructie BE > BF maakt, dan zou ED het verlengde van BA snijden, en offchoon $\triangle$ BED dan nog tot $\triangle$ BAC in reden zou zijn als $q : p$, zou $\triangle$ BED alsdan geen deel van $\triangle$ ABC, en bijgevolg DE geenszins de gevraagde deellijn wezen. In dit geval zou de wezenlijke deellijn den stand D′E′ aannemen, dat is, zij zou niet meer de zijden AB en BC, maar de zijden BC en AC, doorsnijden. De oplossing zou echter in dit geval op dezelfde wijze moeten worden ingerigt; want wij zouden alsdan hebben:

$$\triangle CE'D' : \triangle CAB = p - q : p$$

en $$\triangle CAB : \triangle CAF = CB : CF$$

dus $$\triangle CE'D' : \triangle CAF = (p-q)\,CB : p \times CF$$

maar $$\triangle CE'D' : \triangle CAF = CE'^2 : CF^2$$

dus $$CE'^2 : CF^2 = (p-q)\,CB : p \times CF$$

of $$CE' : CF = (p-q)\,CB : p$$

waardoor $$CE'^2 = \frac{p-q}{p}\,CB \times CF$$

en

en $CE' = \sqrt{\frac{p-q}{p}\, CB \times CF}$

waarvoor de conſtructie even gemakkelijk is.

Voor het overige blijkt het gemakkelijk, dat dit laatſte geval plaats zal hebben, wanneer men heeft:

$$BF < \frac{q}{p} BC$$

XXXI. Voorstel.

Door I. R. Schmidt.

Wanneer er door eenig punt C, Fig. 15, binnen of buiten eene parabool gelegen, een onbepaald aantal koorden PQ in deze parabool getrokken wordt, en men aan de uiteinden P en Q van al deze koorden raaklijnen trekt, dan vraagt men naar de meetkunſtige plaats van het punt T, waarin de raaklijnen, tot dezelfde koorde PQ behoorende, elkander zullen ſnijden?

Oplossing door I. R. Schmidt.

Men ſtelle de coördinaten van het gegeven punt $AB = a$ en $BC = b$; daar dan B een ſtandvastig punt is, nemen wij hetzelve als oorſprong der coördinaten van het veranderlijke punt T aan en ſtellen alzoo $BR = u$ en $RT = z$, en het zal er dan op aankomen, om eene vergelijking tusſchen u en z benevens de ſtandvastige lijnen a, b en p te vinden.

Het is uit de eigenſchappen der parabool genoegzaam bekend, dat het doorſnijdingspunt T van de raaklijnen PT en QT op de middellijn GM valt, welke door het midden I van de koorde PQ gaat, en wel zoodanig, dat $TG = GI$ is. Verder is ook bekend, dat de raaklijn GL van het punt G evenwijdig met de koorde PQ loopt.

Dit herinnerd hebbende, zoo is in de figuur:

$$GH = IK = MB = RT = z,$$

dus $AH = AL = \frac{z^2}{p}$ en $LH = \frac{2z^2}{p}$;

verder is, in de gelijkvormige driehoeken LGH en ICM,

$$GH : LH = CM : MI$$

of $$z : \frac{2z^2}{p} = (b - z) : Mi,$$

waaruit $$Mi = BK = \frac{2z}{p}(b - z),$$

Eindelijk hebben wij nog:

$$BR = RK + BK = 2\,HK + BK = 2\,(AB - AH - BK) + BK$$
$$= 2\,AB - 2\,AH - BK$$

en brengende hierin de gestelde en gevondene waarden der lijnen BR, AB, AH en BK, dan komt er:

$$u = 2a - \frac{2z^2}{p} - \frac{2z}{p}(b - z),$$

dat is $$u = 2a - \frac{2b}{p}z,$$

of wel $$pu + 2bz = 2ap,$$

hetgeen de gevraagde vergelijking tusschen z en u is, welke, daar zij niet hooger dan de eerste graad opklimt, aantoont, dat het punt T *eene regte lijn* tot meetkunstige plaats heeft.

Deze regte lijn wordt zeer gemakkelijk geconstrueerd; want $z = o$ stellende, wordt $u = 2a$; en $u = o$ stellende, is $z = \frac{ap}{b} = \frac{BD^2}{b}$. Nemende dus AX = AB en BY derde evenredig tot BC en BD, dan zal XY de plaats van het punt T zijn.

Ligt het punt C in de as, dan is $b = o$ en de vergelijking is alsdan $u = 2a$, dat is, AX blijft alsdan gelijk AB; doch de lijn XY staat dan loodregt op de as.

Hieruit volgt dan verder, dat wanneer C in het brandpunt ligt, de rigtlijn de plaats van het punt T zal zijn.

Is $a = o$, dat is, ligt het punt C in de raaklijn van den top, dan wordt de vergelijking $u = -\frac{2b}{p}z$, en dan gaat de gevraagde lijn door den top.

Ligt eindelijk het punt C in den top van de parabool, dan is $a = o$ en $b = o$; de vergelijking der lijn XY is dan $u = o$, dat is, XY gaat dan over in de raaklijn van den top; en in het algemeen zal, wanneer het punt C in den omtrek van de parabool gelegen is, de lijn XY overgaan in de raaklijn van dit punt C.

Hier-

Hieruit zal men, bij een weinig nadenken, tot de volgende eigenschappen van de parabool kunnen besluiten:

1°. *Wanneer er door eenig punt, binnen of buiten de parabool gelegen, koorden in deze parabool getrokken worden, en men aan derzelver uiteinde raaklijnen trekt, dan zullen de doorsnijdingspunten der raaklijnen, welke tot ééne zelfde koorde behooren, altijd gelegen zijn in eene regte lijn.*

2°. *Wanneer uit elk punt van eene willekeurige regte lijn twee raaklijnen getrokken worden aan ééne zelfde parabool, dan zullen de koorden, welke de raakpunten vereenigen, elkander in een zelfde punt binnen of buiten de parabool doorsnijden.*

3°. *Is deze regte lijn de rigtlijn van de parabool, dan zullen gezegde koorden elkander in het brandpunt doorsnijden; men zal bovendien gemakkelijk kunnen bewijzen, dat in dit geval de twee raaklijnen, uit eenzelfde punt van de rigtlijn getrokken, regthoekig op elkander zullen staan.*

4°. *Loopt de gegevene regte lijn evenwijdig met de as, dan zullen de koorden, welke de raakpunten vereenigen, onderling evenwijdig zijn, dat is, haar vereenigingspunt is alsdan op eenen oneindigen afstand geplaatst.*

XXXII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Men vraagt hetzelfde als in het voorgaande voorstel gevraagd is, in de onderstelling, dat de kromme lijn eene Ellips is.

OPLOSSING *door* I. R. SCHMIDT.

Zij C, *Fig.* 16, het gegevene punt en DE eene der koorden, laten verder AM en RM de halve assen zijn, en stellen wij AM $= a$, RM $= b$, CF $= p$ en CB $= q$.

Uit de eigenschappen der ellips is bekend, dat het ontmoetingspunt der raaklijnen DT en ET gelegen is op de middellijn TM, welke door het midden K van de koorde DE gaat, en wel zoodanig, dat wij hebben MK : MG = MG : MT. Verder weet men ook, dat de raaklijn GN van het punt G, evenwijdig met de koorde DE loopt, en dat ook ten opzigte van deze raaklijn MH : MA = MA : MN is.

 Stel-

Stellende nu $MH = x$, dan is $HG = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)}$, $MN = \frac{a^2}{x}$ en $NH = \frac{a^2 - x^2}{x}$. Verder is, in de gelijkvormige driehoeken NGH en ICB:

$$GH : HN = BC : BI,$$

dus
$$BI = \frac{BC \times HN}{GH} = \frac{aq}{b} \cdot \frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{x},$$

zoodat
$$MI = p + \frac{aq}{b} \times \frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}.$$

Indien wij dus, kortheidshalve, $\frac{\sqrt{(a^2 - x^2)}}{x} = z$ stellen, dan is:

$$BI = \frac{aq}{b} z \quad \text{en} \quad MI = p + \frac{aq}{b} z.$$

Nu is $MI : MN = MK : MG$,
maar $MK : MG = MG : MT$
en $MG : MT = MH : MO$,
waaruit dan volgt:

$$MI : HN = MH : MO,$$

of
$$p + \frac{aq}{b} z : \frac{a^2}{x} = x : MO,$$

waaruit
$$MO = \frac{a^2 b}{pb + aqz} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Verder is $MH : HG = MO : OT$,

of
$$x : \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - x^2)} = \frac{a^2 b}{pb + aqz} : OT,$$

waaruit
$$OT = \frac{a^2 b}{pb+aqz} \times \frac{b}{a} \cdot \frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{x} = \frac{ab^2 z}{pb+aqz} \cdot \quad (2)$$

Stellen wij nu de coördinaten van het punt T, $MO = t$ en $OT = u$, zoo hebben wij door (1) en (2):

$$t = \frac{a^2 b}{pb + aqz} \quad \text{en} \quad u = \frac{ab^2 z}{pb + aqz}.$$

Zonderen wij nu uit de eerste de waarde van z af, dan vinden wij gemakkelijk:

$$z = \frac{a^2 b - pbt}{aqt},$$

en

en brengende deze waarde van z over in de waarde van u, dan komt er:

$$u = \frac{ab^2 \times \frac{a^2 b - pbt}{aqt}}{pb + aq \times \frac{a^2 b - pbt}{aqt}},$$

hetgeen zich gemakkelijk laat herleiden tot:

$$u = \frac{b^2}{a^2 q} \times (a^2 - pt);$$

De vergelijking der meetkunstige plaats van het punt T is alzoo:

$$a^2 q\, u + b^2 pt = a^2 b^2$$

en daar u en t niet hooger dan de eerste magt in deze vergelijking opklimmen, zoo is de gevraagde plaats wederom *eene regte lijn*.

De regelmatigheid der gevondene vergelijking geeft tot eene zeer gemakkelijke constructie aanleiding. Stellende namelijk $t = 0$, dan wordt $u =$ MY $= \frac{b^2}{q}$, en stellende $u = 0$, dan wordt $t =$ MX $= \frac{a^2}{p}$. *Makende dus MX derde evenredig tot MB en MA, en makende MY derde evenredig tot MT en MR, dan zal de onbepaalde regte lijn, door X en Y getrokken, de gevraagde plaats van het punt T zijn.*

De lijn XY neemt in de bijzondere gevallen verschillende standen aan. Zie hier eenige der opmerkelijkste.

Valt het punt C in de groote as in B, dan blijft de lijn XY nog door het punt X gaan, doch dan staat zij loodregt op de groote as; omdat alsdan $q = 0$ zijnde, de vergelijking overgaat in $t = \frac{a^2}{p}$.

Wordt het punt C in de kleine as in F genomen, dan blijft XY door het punt Y gaan, doch dan staat zij loodregt op de kleine as; want de vergelijking wordt dan $u = \frac{b^2}{q}$.

Stelt men C in het brandpunt, dan vinden wij $\sqrt{(a^2 - b^2)} : a = a :$ MX dus MX $= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}$, en daar alsdan XY loodregt op de groote as staat, zoo is in dit geval XY de rigtlijn van

 de

de ellips, komende dit overeen met hetgeen wij, in het voorgaande Voorstel, voor de parabool vonden.

Omdat p en q geheel onafhankelijk van elkander en van de assen zijn, zoo gaat onze oplossing even goed door voor eenig punt C, dat buiten de ellips gelegen is, en voor een punt, dat zich in derzelver omtrek bevindt, als voor een punt, dat binnen dezelve ligt. Valt het punt C in den omtrek, dan toont onze constructie ten duidelijkste aan, dat de lijn XY de raaklijn van dit punt C zal zijn.

Ingevalle de koorden evenwijdig aan elkander loopen, dat is, door een punt gaan, dat op eenen oneindigen afstand ligt, dan is het klaar, dat de lijn XY zal overgaan in de middellijn, welke deze evenwijdige koorden midden door deelt.

Wij hebben alzoo regt, om tot de volgende eigenschappen der ellips te besluiten:

1°. *Wanneer door eenig punt, binnen of buiten eene ellips, een aantal koorden getrokken wordt, en men aan de twee uiteinden van elke koorde raaklijnen trekt, dan zullen al de snijpunten van de raaklijnen, die tot dezelfde koorde behooren, in eene regte lijn gelegen zijn.*

2°. *Wanneer uit elk punt van eene regte lijn, welke ten opzigte van eenige ellips in stelling gegeven is, raaklijnen aan die ellips getrokken, en de raakpunten der raaklijnen, welke uit eenzelfde punt voortkomen, door koorden vereenigd worden, dan zullen deze koorden, of derzelver verlengde, elkander in één-zelfde punt binnen, in of buiten de ellips doorsnijden.*

3°. *Is deze regte lijn de rigtlijn, dan zal het snijpunt dezer koorden het brandpunt zijn.*

4°. *Is deze regte lijn loodregt op eene der assen, dan zal het snijpunt der koorden in diezelfde as liggen.*

5°. *Is deze lijn eene raaklijn van de ellips, dan zal het snijpunt der koorden in het raakpunt gelegen zijn.*

6°. *Gaat deze lijn door het middelpunt, dan loopen de koorden aan elkander evenwijdig.*

1°. Aanmerking. Trekkende door het gegevene punt eene middellijn CM, dan loopen de raaklijnen van de punten P en P′ evenwijdig. Daar nu deze raaklijnen elkander in eenzelfde punt

van

van de lijn XY moeten doorsnijden, zoo volgt hieruit, *dat XY evenwijdig moet zijn aan de raaklijnen van de punten P en P'.*

Berekenen wij nu MC, MP en MQ, dan hebben wij voor de eerste klaarblijkelijk: MC $= \sqrt{(p^2 + q^2)}$. Om MP te berekenen, stellen wij de coördinaten van het punt P der ellips x' en y', welke coördinaten wij in de figuur, om dezelve niet te zamengesteld te maken, hebben weggelaten, en dan is vooreerst uit de eigenschap der ellips,

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2,$$

en uit de gelijkvormige driehoeken:

$$x' : y' = p : q,$$

uit welke twee vergelijkingen wij vinden:

$$x'^2 = \frac{a^2 b^2 p^2}{a^2 q^2 + b^2 p^2} \quad \text{en} \quad y'^2 = \frac{a^2 b^2 q^2}{a^2 q^2 + b^2 p^2},$$

en bijgevolg is:

$$\text{MP} = \sqrt{(x'^2 + y'^2)} = \frac{ab\sqrt{(p^2 + q^2)}}{\sqrt{(a^2 q^2 + b^2 p^2)}}.$$

Om eindelijk de waarde van de lijn MQ te vinden, zoo is, voor het punt Q, waarvan wij de coördinaten mede in de figuur hebben weggelaten, door middel van de vergelijking der lijn XY,

$$qa^2 u' + pb^2 t' = a^2 b^2,$$

en uit de gelijkvormige driehoeken:

$$t' : u' = p : q,$$

waardoor wij vinden:

$$t' = \frac{a^2 b^2 p}{a^2 q^2 + b^2 p^2} \quad \text{en} \quad u' = \frac{a^2 b^2 q}{a^2 q^2 + b^2 p^2};$$

waaruit dan volgt:

$$\text{MQ} = \sqrt{(t'^2 + u'^2)} = \frac{a^2 b^2 \sqrt{(p^2 + q^2)}}{a^2 q^2 + b^2 p^2}.$$

Vergelijken wij nu de waarden van MC, MP en MQ, dan hebben wij:

$$\text{MC} \times \text{MQ} = \frac{a^2 b^2 (p^2 + q^2)}{a^2 q^2 + b^2 p^2} = \text{MP}^2,$$

waaruit volgt, *dat MP middelevenredig is tusschen MC en MQ.*

Dit geeft ons nog eene andere constructie aan de hand voor de lijn XY, namelijk deze:

Trek door C eene onbepaalde middellijn, snijdende de ellips in P. Maak MQ derde evenredig tot MC en MP, en trek door Q eene

 lijn

lijn XY, evenwijdig met de raaklijn van het punt P, deze zal de plaats van het punt T zijn.

2°. Aanmerking De cirkel eene ellips zijnde, moeten de gevondene eigenschappen ook op dezelve doorgaan. Voor dit bijzonder geval wordt echter het bewijs veel eenvoudiger; want laat, in *Fig.* 17, C het gegevene punt zijn, dan is, TQ loodregt op de middellijn trekkende, welke door het punt C gaat,

$$MK : MD = MD : MT$$

en

$$CM : MK = MT : MQ$$

waaruit, door vermenigvuldiging der overeenkomstige termen, volgt:

$$CM : MD = MD : MQ$$

of

$$CM : MP = MP : MQ.$$

Hoe dus de koorde ED ook door het punt C getrokken worde, MQ blijft altijd derde evenredig tot de standvastige lijnen MC en MP, waaruit dan volgt, dat de lijn XY loodregt op MP door het punt Q gaande, de plaats van het punt T is, en deze constructie voor de lijn XY komt volmaakt overeen met hetgeen, ten opzigte van de ellips in het algemeen, in de eerste aanmerking bewezen is.

XXXIII. Voorstel.

Door I. R. Schmidt.

Men vraagt hetzelfde als in de twee voorgaande vraagstukken, in de onderstelling, dat de kromme lijn eene hyperbool is?

Oplossing. *Door* I. R. Schmidt.

De overeenkomst der vergelijkingen van de hyperbool en de ellips moet ons hier reeds soortgelijke uitkomsten als bij de voorgaande vraagstukken doen verwachten. Deze overeenkomst is zoo sprekend, dat wij ons zullen vergenoegen, met alleen de uitkomsten op te geven.

Stellen wij dan wederom, in *Fig.* 18, MA $= a$, MR $= b$, MB $= p$, BC $= q$ en MH $= x$, dan vinden wij, eveneens als bij de ellips te werk gaande,

$$HG = \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)}; \; MN = \frac{a^2}{x}; \; NH = \frac{x^2 - a^2}{x},$$

en ſtellende $\frac{\sqrt{(x^2 - a^2)}}{x} = z$, dan vinden wij verder:

$$BI = \frac{aq}{b} z, \quad \text{en} \quad MI = p - \frac{aq}{b} z,$$

waaruit al verder gevonden wordt,

$$t = MO = \frac{a^2 b}{pb - aqz} \quad \text{en} \quad u = TO = \frac{ab^2 z}{pb - aqz}.$$

Uit de waarde van t vindt men:

$$z = \frac{pbt - a^2 b}{aqt}$$

en deze waarde van z in u ſubſtituerende, komt er:

$$u = \frac{pb^2}{qa^2} t - \frac{b^2}{q}$$

waaruit dan eindelijk, voor de vergelijking van de *regte lijn* XY, volgt:

$$qa^2 u - pb^2 t = - a^2 b^2.$$

Door hierin beurtelings u en t gelijk o te ſtellen, vinden wij wederom, dat MX derde evenredig moet zijn tot MB en MA, en dat MY derde evenredig moet worden genomen tot MF en MR. Zijnde dit dezelfde conſtructie als voor de ellips.

Aanmerkingen. 1° De eigenſchappen, welke wij, in de oplosſing van het voorgaande Voorſtel, voor de ellips, van 1 tot 6, gevonden hebben, gaan ook alle voor de hyperbool door. Men zal het woord *ellips* ſlechts in *hyperbool* behoeven te veranderen, om al deze eigenſchappen woordelijk op onze figuur toe te pasſen.

2°. Wanneer de koorde, door C gaande, de beide takken ſnijdt in D′ en E′, dan blijft de bewezene eigenſchap even goed doorgaan, dat is, het ſnijpunt T′ der raaklijnen van de punten D′ en E′ zal nog op de lijn XY liggen.

3°. Wij kunnen ook hier, op dezelfde wijze als wij dit voor de ellips hebben aangetoond, betoogen, dat de middellijn MC, die door het gegevene punt C gaat, de hyperbool zoodanig in P en P′ zal ſnijden, dat XY evenwijdig loopt aan de raaklijnen van de punten P en P′, en dat het punt Q gevonden wordt, door MQ derde evenredig tot MC en MP te nemen.

 4°. Het

4°. Het blijkt dan, dat de eigenschap, in de drie laatste Voorstellen bewezen, aan al de kegelsneden gemeen is. Dat is. *Wanneer uit elk der punten van eene regte lijn, welke met eene der kegelsneden in hetzelfde vlak ligt, raaklijnen aan deze kegelsnede getrokken worden, en men de raakpunten der raaklijnen, welke uit een zelfde punt getrokken zijn, door koorden vereenigt, dan zullen al deze koorden, of derzelver verlengde, elkander in éénzelfde punt doorsnijden. En omgekeerd: indien deze koorden elkander in eenzelfde punt snijden, dan zullen de doorsnijdingspunten der raaklijnen van de uiteinden in eene regte lijn liggen.*

XXXIV. VOORSTEL.

Door H. G WITLAGE Jz.

Zoek een getal van vier cijferletters, dat door 11 *deelbaar is, maar waarin het verschil tusschen de sommen der overhandsche cijferletters noch* 11, *noch een veelvoud van* 11 *is, en hetwelk de volgende eigenschappen bezit. De twee laatste cijferletters, welke ongelijk zijn, kunnen, als een afzonderlijk getal beschouwd, door* 9 *gedeeld worden; de som der quadraten van de eerste, tweede en derde cijferletter, van de eenheden af gerekend, is* 50, *en het product dierzelfde cijferletters is* 60?

OPGELOST *door* H. G. WITLAGE JR., R. VAN WIJK JZ., H. FOEKES BAKKER, W. TOP WZ. en H. ROODHUIJZEN.

OPLOSSING *van* H. G. WITLAGE.

Stel het getalmerk der eenheden z, dat der tientallen y, dat der honderdtallen x en dat der duizendtallen v, dan is het getal:

$$1000\,v + 100\,x + 10\,y + z$$

waarin nu v, x, y en z elk in het bijzonder niet grooter dan 9 mogen zijn.

Volgens de eigenschap der getallen, welke door 11 deelbaar zijn, is de som der eerste en derde cijfer, $x + z$, verminderd met de som der tweede en vierde cijfer, $v + y$, gelijk nul, gelijk

lijk elf of gelijk een veelvoud van elf. Daar nu, volgens de opgaaf, dit verschil noch 11, noch een veelvoud van 11 is, zoo is hetzelve gelijk o, en wij hebben dus:

$$y + v = x + z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Verder moet $10y + z$ door 9 deelbaar zijn; doch een getal door 9 deelbaar zijnde, is ook de som der cijfers door 9 deelbaar, en dus moet $y + z$ door 9 deelbaar zijn; daar nu y en z ongelijk en beide kleiner dan 9 zijn, zoo kan hunne som niet door 9 deelbaar zijn, ten zij deze som zelve 9 is, en dit geeft:

$$y + z = 9 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

De overige voorwaarden van het Voorstel geven ons daarenboven

$$x^2 + y^2 + z^2 = 50 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en

$$xyz = 60 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

uit welke vier vergelijkingen dan nu de onbekenden x, y, z en v moeten gevonden worden.

Trekkende het vierkant van (2) af van de vergelijking (3), dan blijft er:

$$x^2 - 2yz = -31,$$

en multiplicerende dit met x,

$$x^3 + 31x - 2xyz = 0,$$

substituerende hierin de waarde van xyz, dan verkrijgen wij de derde-magts-vergelijking,

$$x^3 + 31x - 120 = 0$$

van welker wortels, $x = 3$, $x = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-151}$ en $x = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-151}$, alleen de eerste in aanmerking kan komen, omdat de twee andere onbestaanbaar zijn.

Omdat dan $x = 3$ is, zoo verandert de vergelijking $xyz = 60$ in $yz = 20$, en daar $y + z = 9$ is, zoo is:

$$y - z = \sqrt{\{(y+z)^2 - 4xy\}} = \sqrt{1} = \pm 1,$$

hetgeen ons geeft $y = 5$ en $z = 4$ of $y = 4$ en $z = 5$.

Uit de eerste vergelijking is eindelijk:

$$v = x + z - y.$$

Nemende dus $y = 5$ en $z = 4$, dan is, daar $x = 3$ is, $v = 2$, en het gevraagde getal is:

$$1000v + 100x + 10y + z \text{ of } 2354.$$

Ne-

Nemende daarentegen $y = 4$ en $z = 5$, dan is $v = 4$, en het gevraagde getal is:

$$1000\,y + 100\,z + 10\,y + z \text{ of } 4345.$$

Het vraagstuk laat dus twee verschillende antwoorden toe, het gevraagde is namelijk 2354 of 4345.

XXXV. VOORSTEL.

Door H. VAN KRAAIJENOORD.

De waarde van x, y en z te vinden uit de vergelijkingen:

$$a(x + y) - bz = p \quad \ldots \quad (1)$$
$$a'(x + z) - b'y = p' \quad \ldots \quad (2)$$
en
$$a''(y + z) - b''x = p'' \quad \ldots \quad (3)$$

OPGELOST *door* W. TOP WZ., R. VAN WIJK JZ. en H. VAN KRAAIJENOORD.

OPLOSSING *van* W. TOP WZ.

Stellen wij $x + y + z = s$, dan veranderen de drie vergelijkingen in:

$$a(s - z) - bz = p$$
$$a'(s - y) - b'y = p'$$
$$a''(s - x) - b''x = p''.$$

Zonderen wij uit de eerste dezer vergelijkingen de waarde van z, uit de tweede die van y en uit de derde die van x af, dan verkrijgen wij:

$$z = \frac{as - p}{a + b},\ y = \frac{a's - p'}{a' + b'},\ x = \frac{a''s - p''}{a'' + b''}$$

en wanneer wij deze drie vergelijkingen bij elkander optellen, komt er, omdat $x + y + z = s$ is,

$$s = \left(\frac{a}{a+b} + \frac{a'}{a'+b'} + \frac{a''}{a''+b''}\right) s - \left(\frac{p}{a+b} + \frac{p'}{a'+b'} + \frac{p''}{a''+b''}\right)$$

dat is:

$$s\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a'}{a'+b'} + \frac{a''}{a''+b''} - 1\right) = \frac{p}{a+b} + \frac{p'}{a'+b'} + \frac{p''}{a''+b''}$$

waar-

waaruit wij vinden:

$$s = \frac{\frac{p}{a+b} + \frac{p'}{a'+b'} + \frac{p''}{a''+b''}}{\frac{a}{a+b} + \frac{a'}{a'+b'} + \frac{a''}{a''+b''} - 1}.$$

Hierdoor de waarde van s gevonden hebbende, is:

$$x = \frac{a''s - p''}{a'' + b''},\ y = \frac{a's - p'}{a' + b'},\ z = \frac{as - p}{a + b},$$

waardoor de gevraagde getallen bepaald zijn.

XXXVI. Voorstel.

Door J. van der Stok.

In eenen gegevenen bol eenen kegel te plaatsen, zoodanig, dat de inhoud van dezen kegel tot den inhoud van het bolvormig segment, waarop denzelve staat, in gegevene reden zij?

Opgelost *door* J. van der Stok, J. W. Martini, R. Lobatto en W. Top Wz.

Oplossing *van* J. van der Stok.

Stellen wij dat gegeven is *Fig.* 19.

$$\textit{Inh. keg.}\ ABC : \textit{Inh. bolv. segt}\ ABA'D = 1 : p \ldots (A)$$

en verder $MC = r$, en $BC = x$, dan is $BD = 2r - x$.

Uit den regthoekigen driehoek CAD volgt: $AB^2 = BC \times BD = x(2r - x)$, en men vindt verder:

$$\textit{Inh. keg.}\ ABC = \tfrac{1}{3} AB^2 . \pi . BC = \tfrac{1}{3} \pi x^2 (2r - x)$$

$$\textit{Inh. bolv. segt.}\ ABD = \tfrac{1}{6} \pi . BD^3 + \tfrac{1}{2} AB^2 . \pi \times BD$$
$$= \tfrac{1}{6} \pi (2r - x)^3 + \tfrac{1}{2} \pi x (2r - x)^2$$

Substitueert men deze waarden in de evenredigheid (A), dan heeft men:

$$\tfrac{1}{3} \pi x^2 (2r - x) : \tfrac{1}{6} \pi (2r - x)^3 + \tfrac{1}{2} \pi x (2r - x)^2 = 1 : p$$

of de twee eerste termen door $\tfrac{1}{6} \pi (2r - x)$ deelende:

$$2x^2 : (2r - x)^2 + 3x(2r - x) = 1 : p,$$

dat is

$$2px^2 = -2x^2 + 2rx + 4r^2,$$

of

$$x^2 - \frac{r}{p+1} x - \frac{2r^2}{p+1} = 0,$$

waar-

waaruit $x = \frac{r}{2(p+1)} \times \{1 \pm \sqrt{(9+8p)}\}$.

Aanmerking. Het benedenste teeken kan hier niet gebezigd worden, want dan zou x negatief, en bijgevolg AB onbestaanbaar worden; wij hebben dus alleen:

$$x = \frac{r}{2(p+1)} \{1 + \sqrt{(9+8p)}\}.$$

Verder moeten wij nog opmerken, dat x niet grooter dan $2r$ kan worden, zonder dat AB onbestaanbaar wordt; p kan echter in onze laatste formule naar welgevallen gegeven zijn, want daar $\sqrt{(9 + 8p + \frac{16}{9}p^2)} = 3 + \frac{4}{3}p$ is, zoo is $\sqrt{(9+8p)} < 3 + \frac{4}{3}p$, en dus zoo veel te meer $\sqrt{(9+8p)} < 3 + 4p$, waaruit volgt:

$$1 + \sqrt{(9+8p)} < 4(1+p),$$

en dus $r \times \frac{1 + \sqrt{(9+8p)}}{2(p+1)} < 2r$

waaruit blijkt, dat hoedanig p ook gegeven zij, de gevondene uitdrukking voor x altijd kleiner dan $2r$ is.

XXXVII. VOORSTEL.

Door J. van der Stok.

In eenen gegevenen bol eenen kegel zoodanig te plaatsen, dat de inhoud van dezen kegel tot den inhoud van het bolvormig segment, waarin dezelve staat, in gegevene reden zij?

Opgelost door J. van der Stok, J. W. Martini, W. Top Wz. en R. Lobatto.

Oplossing van J. van der Stok.

Stellen wij in *Fig.* 19. wederom MC $= r$, en BC $= x$ dan is:

$$\text{Inh. kegel ABC} = \tfrac{1}{3}\pi x^2 (2r - x)$$

en $$\text{Inh. bolv. segm. ACA}' = \tfrac{1}{3}\pi x^2 (3r - x);$$

stellen wij verder, dat deze ligchamen tot elkander in reden moeten zijn als 1 tot p, dan is:

$$2r - x : 3r - x = 1 : p,$$

dus $$2pr - px = 3r - x,$$

waaruit $$x = \frac{2p - 3}{p - 1} \times r.$$

Zal dit mogelijk zijn, dan moet x positief, doch kleiner dan $2r$ gevonden worden. De eerste dezer bepalingen toont aan, dat $2p > 3$ en dus $p > 1\frac{1}{2}$ moet zijn; aan de tweede voorwaarde voldoet onze uitdrukking altijd, omdat $\frac{2p - 3}{p - 1} < \frac{2p - 2}{p - 1}$, dat is, kleiner dan 2 is.

XXXVIII. VOORSTEL.

Door I. R. Schmidt.

Welke betrekking moet er tusschen de afmeetingen van eenen regten cirkelvormigen kegel bestaan, opdat de in- en omgeschrevene bollen tot elkander in gegevene reden zullen zijn?

Opgelost *door* I. R. Schmidt, R. Lobatto, J. W. Martini en W. Top Wz.

Oplossing *van* I. R. Schmidt.

Laat ACBA′ *Fig.* 19 de kegel zijn. Stellen wij de hoogte BC $= h$, de straal van het grondvlak AB $= r$ en de schuinsche zijde AC $= s$, dan is $s^2 = h^2 + r^2$.

Stellen wij verder, dat de inhouden der om- en ingeschrevene bollen tot elkander in reden moeten zijn als $p^3 : 1$, waarin door p^3 ook een getal kan verstaan worden, dat geene volkomene derde magt is; dan zullen de stralen dezer bollen tot elkander in reden zijn als $p : 1$. Noemen wij dan deze stralen R en R′, dan zullen wij hebben: $R : R' = p : 1$.

Nu is het gemakkelijk in te zien, dat de stralen der om- en ingeschrevene bollen volmaakt hetzelfde zijn als de stralen van den om- en ingeschrevenen cirkel des gelijkbeenigen driehoeks ACA′. Daar nu in het algemeen de straal des omgeschreven cirkels gelijk is *aan het product der zijden, gedeeld door viermaal den inhoud van den driehoek*, zoo is:

$$R = \frac{2rs^2}{4rh} = \frac{s^2}{2h},$$

en

en de ſtraal van den ingeſchreven' cirkel gelijk zijnde *aan den inhoud des driehoeks, gedeeld door den halven omtrek*, zoo is:

$$R' = \frac{rh}{s+r};$$

dit geeft ons alzoo de evenredigheid:

$$\frac{s^2}{2h} : \frac{rh}{s+r} = p : 1,$$

dat is $\quad s^2(s+r) : 2rh^2 = p : 1,$

of $\quad s^2(s+r) : 2r(s^2 - r^2) = p : 1,$

en de twee termen der eerſte reden door $s + r$ deelende:

$$s^2 : 2r(s - r) = p : 1,$$

zoodat $\quad s^2 = 2rsp - 2r^2p,$

of $\quad s^2 - 2prs + 2pr^2 = 0,$

welke vierkantsvergelijking, ten opzigte van s opgelost, geeft:

$$s = pr \pm \sqrt{(p^2r^2 - 2pr^2)},$$

dat is $\quad s = r\{p \pm \sqrt{p(p-2)}\},$

waardoor de betrekking bepaald is, welke de ſchuinſche zijde tot den ſtraal van het grondvlak moet hebben.

Wil men de betrekking bepalen, welke in dit geval de hoogte tot den ſtraal van de bazis moet hebben, dan heeft men: $h = \sqrt{(s^2 - r^2)}$, en hierin de waarde van s ſubſtituerende:

$$h = r \times \sqrt{\{\{p \pm \sqrt{p(p-2)}\}^2 - 1\}}$$

$$= r \times \sqrt{\{2p^2 - 2p - 1 \pm 2p\sqrt{p(p-2)}\}}.$$

Wij kunnen nu ook gemakkelijk den tophoek van den kegel bepalen, want ſtellende denzelven gelijk 2ϕ, dan is $r = h$ *Tang.* ϕ en $r = s$ *Sin.* ϕ; de laatſte geeft ons:

$$Sin.\ \phi = \frac{r}{s} = \frac{1}{p \pm \sqrt{p(p-2)}}$$

Aanmerkingen. 1°. De gevondene formulen toonen ons alle aan, dat het vraagſtuk onmogelijk is, zoodra p kleiner dan 2 genomen wordt; en hieruit volgt, dat de omgeſchrevene bol altijd ten minſte acht maal zoo groot is, als de ingeſchrevene bol. Is $p = 2$, dan is de reden dezer twee bollen als 8 : 1, en in dit geval is $s = 2r$, waaruit volgt, dat alsdan de driehoek ACA' gelijkzijdig is.

2°. Is

2°. Is p grooter dan 2, dan heeft ons vraagstuk twee verschillende oplossingen; want men heeft alsdan:

$$s = r \left\{ p + \sqrt{p\,(p - 2)} \right\}$$

en

$$s = r \left\{ p - \sqrt{p\,(p - 2)} \right\}$$

Het is echter klaar, dat de schuinsche zijde s grooter dan de straal r moet zijn, en er blijft dus nog over te bewijzen, dat beide uitdrukkingen voor s hieraan voldoen. Voor de eerste is dit, daar $p > 2$ is, zoo klaar, dat het geen bewijs noodig heeft; en voor de tweede hebben wij slechts op te merken, dat altijd:

$$p^2 - 2p + 1 > p^2 - 2p,$$

dat is,

$$(p - 1)^2 > p\,(p - 2)$$

zijnde, ook altijd:

$$p - 1 > \sqrt{p\,(p - 2)},$$

of

$$p - \sqrt{p\,(p - 2)} > 1$$

is, waardoor wij het gestelde bewezen hebben.

XXXIX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Men vraagt het middelpunt van zwaarte te vinden van eene bolvormige schijf, dat is van een ligchaam, dat uit eenen bol gesneden wordt, door twee evenwijdige vlakken?

OPGELOST door I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

OPLOSSING van I. R. SCHMIDT.

Laat EE′FF′ *Fig.* 20. de bolvormige schijf verbeelden. Stellen wij het middelpunt van den bol in M, en zij MA de straal, welke loodregt door de twee evenwijdige vlakken EE′ en FF′ gaat. Onderstellen wij verder, dat de schijf door eenig vlak PP, loodregt door MA gaande, gesneden wordt, en stellen wij $MA = r$, $AB = h$, $AC = H$ en $AQ = x$, dan is $PQ^2 =$

$2rx - x^2$ en bij gevolg, den inhoud van de bolvormige schijf gelijk I stellende:

$$\partial I = PQ^2 \times \pi \partial x = (2rx - x^2)\, \pi\, \partial x. \quad . \quad . \quad (\alpha)$$

Rekenen wij nu de momenten van het vlak, dat de bol in A raakt, dan is het moment van deze differentiaal, omdat het zwaartepunt van eenen cirkel in het middelpunt ligt, $x \partial I$. Stellende dus de som der momenten S, zoo hebben wij:

$$\partial S = (2rx^2 - x^3)\, \pi\, \partial x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\beta)$$

en wij zullen alzoo de uitdrukkingen (α) en (β) tusschen de limieten $x = h$ en $x = H$, moeten integreren.

De eerste geeft:

$$I = (rx^2 - \tfrac{1}{3} x^3) \times \pi + C,$$

terwijl de tweede tot integraal heeft

$$S = (\tfrac{2}{3} rx^3 - \tfrac{1}{4} x^4) \times \pi + C';$$

en daar deze integralen voor $x = h$ moeten verdwijnen, hebben wij:

$$C = -(rh^2 - \tfrac{1}{3} h^3)\, \pi \quad \text{en} \quad C' = -(\tfrac{2}{3} rh^3 - \tfrac{1}{4} h^4)\, \pi,$$

waardoor

$$I = \pi \left\{ r(x^2 - h^2) - \tfrac{1}{3}(x^3 - h^3) \right\}$$

en

$$S = \pi \left\{ \tfrac{2}{3} r(x^3 - h^3) - \tfrac{1}{4}(x^4 - h^4) \right\};$$

nemende dus $x = H$, dan verkrijgen wij voor onze volkomene integralen:

$$I = \tfrac{1}{3} \pi \left\{ 3r(H^2 - h^2) - (H^3 - h^3) \right\}$$

en

$$S = \tfrac{1}{12} \pi \left\{ 8r(H^3 - h^3) - 3(H^4 - h^4) \right\}.$$

Stellende nu het gevraagde zwaartepunt in Z, dan is ZA gelijk de som der momenten, gedeeld door den inhoud, en bij gevolg hebben wij:

$$ZA = \frac{S}{I} = \tfrac{1}{4} \times \frac{8r(H^3 - h^3) - 3(H^4 - h^4)}{3r(H^2 - h^2) - (H^3 - h^3)}$$

of, wanneer wij onder en boven door $H - h$ deelen:

$$ZA = \tfrac{1}{4} \times \frac{8r(H^2 + hH + h^2) - 3(H^3 + hH^2 + h^2 H + h^3)}{3r(H + h) - (H^2 + hH + h^2)}$$

$$= \tfrac{1}{4} \times \frac{8r\left\{(H+h)^2 - Hh\right\} - 3(H^2 + h^2)(H + h)}{3r(H + h) - \left\{(H + h)^2 - Hh\right\}} =$$

$$= \tfrac{1}{4} \times$$

$$=\tfrac{1}{4}\times\frac{3(H+h)^3-8r(H+h)^2-6Hh(H+h)+8rHh}{(H+h)^2-3r(H+h)-Hh}\quad(1)$$

Hierdoor zou men het Voorstel voor opgelost kunnen houden; daar echter de gevondene formule voor de berekening niet zeer gemakkelijk is, zullen wij onderzoeken, of men, hetzij door den afstand van het zwaartepunt tot eenig ander punt, dan het punt A, te zoeken, hetzij door de bolvormige schijf in andere gegevens te bepalen, niet tot eenvoudiger uitdrukkingen, ter berekening van de plaats des zwaartepunts, geraken kunne.

Rekenen wij den afstand van het middelpunt; dan is $MZ = r - ZA$, en dit geeft ons deze verschillende uitdrukkingen:

$$ZM=\tfrac{1}{4}\times\frac{(H^2+h^2+4r^2)(H+h)-4r\{(H+h)^2-Hh\}}{3r(H+h)-\{(H+h)^2-Hh\}}$$

$$=\tfrac{1}{4}\times\frac{\{(2r-H)^2+(2r-h)^2-4r^2\}\times(H+h)+4rHh}{\{(2r-H)+(2r-h)-r\}\times(H+h)+Hh}\quad(2)$$

welke niet eenvoudiger zijn dan de voorgaande.

Wil men den afstand van het zwaartepunt tot het benedenvlak door eene formule uitdrukken, dan heeft men:

$$CZ = MZ - MC = MZ - (r - H)$$

en brengende hierin de waarde van MZ, dan vindt men, na herleiding:

$$CZ = \tfrac{1}{4}(H-h)\times\frac{(H^2+2hH+3h^2)-4r(H+2h)}{(H^2+hH+h^2)-3r(H+h)}\quad(3)$$

en wanneer men den afstand van het zwaartepunt tot het bovenvlak berekent, dan zal men, op dezelfde wijze, vinden:

$$BZ = \tfrac{1}{4}(H-h)\times\frac{(3H^2+2hH+h^2)-4r(2H+h)}{(H^2+hH+h^2)-3r(H+h)}\quad(4)$$

Zoeken wij eindelijk den afstand van het punt Z tot het midden K van de as der schijf, dan is $KZ = \tfrac{1}{2}(BZ - CZ)$. Door de helft van het verschil tusschen (3) en (4) te nemen, vinden wij alzoo:

$$KZ = \tfrac{1}{4}(H-h)^2\times\frac{H+h-2r}{H^2+hH+h^2-3r(H+h)}\quad(5)$$

welke formule onder alle, die wij tot nog toe gevonden hebben, de eenvoudigste is.

Stellen wij, om deze laatste waarde in andere gegevens uit te drukken, de stralen van het boven- en benedenvlak s en S, en de dikte van de schijf d, dan geeft ons dit de vergelijkingen:

$$H - h = d,\quad h(2r - h) = s^2,\quad H(2r - H) = S^2.$$

Wanneer wij dus, uit deze vergelijkingen, de waarde van H, h en r in s, S en d kunnen uitdrukken, dan zullen wij, deze waarden in (5) substituerende, de waarde van ZK mede in s, S en d vinden uitgedrukt.

Uit de twee laatste vergelijkingen vinden wij terstond:

$$H = r \pm \sqrt{(r^2 - S^2)} \quad \text{en} \quad h = r \pm \sqrt{(r^2 - s^2)},$$

deze van elkander aftrekkende, komt er:

$$d = H - h = \pm \sqrt{(r^2 - S^2)} \pm \sqrt{(r^2 - s^2)}$$

en hiervan het vierkant nemende, verkrijgen wij, na herleiding,

$$d^2 + s^2 + S^2 - 2r^2 = \pm 2\sqrt{(r^2 - s^2)(r^2 - S^2)}.$$

Brengende dit nogmaals in het vierkant en latende de gelijke termen in beide leden weg, dan verkrijgen wij:

$$(d^2 + s^2 + S^2)^2 - 4d^2 r^2 = 4s^2 S^2$$

waaruit gevonden wordt:

$$r^2 = \frac{(d^2 + s^2 + S^2)^2 - 4s^2 S^2}{4d^2}$$

$$= \frac{\{d^2 + s^2 + 2sS + S^2\} \times \{d^2 + s^2 - 2sS + S^2\}}{4d^2}$$

en bij gevolg

$$r = \frac{\sqrt{\{d^2 + (S + s)^2\} \times \{d^2 + (S - s)^2\}}}{2d} \quad \ldots\ldots (A)$$

en hierdoor is dus het Voorstel opgelost, *om den straal van eenen bol te vinden, wanneer de stralen van het boven- en benedenvlak benevens de dikte of hoogte van eene bolvormige schijf gegeven zijn, welke uit dezen bol gesneden is.*

Om hieruit verder de waarde van h en H af te leiden, hebben wij, wanneer wij altijd het kleinste vlak als bovenvlak beschouwen:

$$r^2 - s^2 = \frac{(d^2 + s^2 + S^2)^2 - 4s^2 S^2 - 4d^2 s^2}{4d^2} = \frac{(d^2 - s^2 + S^2)^2}{4d^2},$$

dus

$$\sqrt{(r^2 - s^2)} = \frac{d^2 + S^2 - s^2}{2d};$$

daar

daar nu $h = r - \surd(r^2 - s^2)$ en $H = h + d$ is, zoo geeft ons dit:

$$h = -\frac{d^2+S^2-s^2}{2d} + \frac{\surd\{d^2+(S+s)^2\} \times \{d^2+(S-s)^2\}}{2d} \quad (B)$$

$$\text{en } H = +\frac{d^2+s^2-S^2}{2d} + \frac{\surd\{d^2+(S+s)^2\} \times \{d^2+(S-s)^2\}}{2d} \quad (C)$$

welke uitdrukkingen wij nu in de formulen voor het zwaartepunt kunnen substitueren.

Om deze substitutie op de gevoegelijkste wijze in de formule (5) te verrigten, schrijven wij dezelve onder dezen vorm:

$$ZK = \tfrac{3}{4}(H-h)^2 \times \frac{2r-(H+h)}{-hH+r(H+h)+H(2r-H)+h(2r-h)}$$

daar nu $H - h = d$, $H(2r - H) = S^2$ en $h(2r - h) = s^2$ is, zoo verandert ZK hierdoor vooreerst in:

$$ZK = \tfrac{3}{4} d^2 \times \frac{2r-(H+h)}{S^2+s^2+r(H+h)-Hh} \quad . \ . \ (6)$$

Nu is door de vergelijkingen (B) en (C), vergeleken met (A),

$$H + h = \frac{s^2 - S^2}{d} + 2r,$$

en hierdoor wordt de teller van (6):

$$2r - (H+h) = \frac{S^2 - s^2}{d} \quad . \ . \ . \ . \ (D)$$

Om den noemer van (6) van H en h te bevrijden hebben wij:

$$Hh = \tfrac{1}{4}\left\{(H+h)^2-(H-h)^2\right\} = \tfrac{1}{4}\left\{\left(\frac{s^2-S^2}{d}+2r\right)^2-d^2\right\},$$

dat is $Hh = r^2 + r \times \frac{s^2 - S^2}{d} + \frac{(S^2-s^2)^2 - d^4}{4d^2};$

maar wij hebben ook:

$$r(H+h) = 2r^2 + r \times \frac{s^2 - S^2}{d}.$$

en trekkende deze van elkander af:

$$r(H+h) - Hh = r^2 - \frac{(S^2-s^2)^2 - d^4}{4d^2};$$

en wanneer wij hierin de waarde van r^2 brengen, dan komt er, na behoorlijke herleiding:

$$r(H+h) - Hh = \frac{d^2 + S^2 + s^2}{2} \quad . \ . \ . \ . \ (E)$$

 bren-

brengende nu (D) en (E) over in de vergelijking (6), dan verkrijgen wij eindelijk:

$$KZ = \tfrac{1}{4} d^2 \times \frac{\frac{1}{d}(S^2 - s^2)}{S^2 + s^2 + \frac{1}{2}(d^2 + S^2 + s^2)}$$

dat is, na herleiding:

$$KZ = \tfrac{1}{2} d \times \frac{(S + s)(S - s)}{3(S^2 + s^2) + d^2} \quad . \; . \; . \; . \; (7)$$

Tellen wij hierbij $\frac{1}{2} d$, dan vinden wij voor den afstand van het zwaartepunt tot het bovenvlak:

$$BZ = \tfrac{1}{2} d \times \frac{4 S^2 + 2 s^2 + d^2}{3(S^2 + s^2) + d^2} \quad . \; . \; . \; (8)$$

en trekken wij (7) af van $\frac{1}{2} d$, dan komt er voor den afstand van het zwaartepunt tot het benedenvlak:

$$CZ = \tfrac{1}{2} d \times \frac{2 S^2 + 4 s^2 + d^2}{3(S^2 + s^2) + d^2} \quad . \; . \; . \; (9)$$

Voor den afstand tot het middelpunt vinden wij eindelijk:

$$MZ = \tfrac{3}{2} \times \frac{1}{d} \times \frac{(S^2 - s^2)(S^2 + s^2)}{3(S^2 + s^2) + d^2} \quad . \; . \; (10)$$

Het blijkt dus uit dit alles, dat de vergelijking (7), door welke de afstand van het zwaartepunt tot het midden der as gevonden wordt, wanneer gegeven is, de straal van het bovenvlak, die van het benedenvlak en de hoogte van de schijf, onder al de uitgebragte formulen de eenvoudigste is.

1°. GEVOLG. Stellen wij in onze gevondene formulen ter berekening van het zwaartepunt: $H = r$, of, dat op hetzelfde nederkomt, $S = r$, dan gaat het benedenvlak door het middelpunt van den bol, en omdat in dit geval $s^2 = r^2 - d^2$ is, zoo gaan onze formulen voor *Fig.* 21 over in:

$$MZ = \tfrac{3}{4} \times (r - h) \times \frac{r^2 + 2rh - h^2}{2r^2 + 2rh - h^2} \quad . \; . \; (11)$$

$$= \tfrac{3}{4} d \times \frac{2 r^2 - d^2}{3 r^2 - d^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (12)$$

$$AZ = \tfrac{1}{4} \times \frac{5(r^2 + h^2)(r + h) - 8 h^3}{2(r + h)^2 + h(2r - 3h)} \quad . \; . \; (13)$$

$$BZ = \tfrac{1}{4} (r - h) \times \frac{5r^2 + 2rh - h^2}{2r^2 + 2rh - h^2} \quad . \; . \; . \; (14)$$

$$= \frac{1}{4} d \times \frac{6r^2 - d^2}{3r^2 - d^2} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$KZ = \frac{1}{4} \times \frac{(r-h)^3}{(2r+h)(r-h)+3rh} \quad \dots (16)$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{d^3}{3r^2 - d^2} \quad \dots\dots\dots (17)$$

2°. GEVOLG. Stellen wij in onze formulen daarentegen $h = 0$, waarmede $s = 0$ overeenkomt, dan gaan dezelve over in de volgende, zie *Fig.* 22.

$$MZ = \frac{1}{4} \times \frac{(2r - H)^2}{3r - H} = \frac{3}{2d} \times \frac{S^4}{3S^2 + d^2} \quad \dots (18)$$

$$AZ = \frac{1}{4} H \times \frac{8r - 3H}{3r - H} = \frac{1}{2} d \times \frac{4S^2 + d^2}{3S^2 + d^2} \quad \dots (19)$$

$$CZ = \frac{1}{4} H \times \frac{4r - H}{3r - H} = \frac{1}{2} d \times \frac{2S^2 + d^2}{3S^2 + d^2} \quad \dots (20)$$

$$KZ = \frac{1}{4} H \times \frac{2r - H}{3r - H} = \frac{1}{2} d \times \frac{S^2}{3S^2 + d^2} \quad \dots (21)$$

Waardoor dus het zwaartepunt van een bolvormig segment op onderscheidene wijzen bepaald is, hetzij dan dat de straal van den bol met de hoogte of dikte van het segment gegeven is, of dat dit segment bepaald is door middel van den straal van het grondvlak met de dikte of hoogte.

Stellen wij in deze laatste formulen $H = r$, waarmede $S = d = r$ overeenkomt, dan vinden wij voor het zwaartepunt van eenen halven bol. *Fig.* 23.

$$MZ = \tfrac{3}{8} r;\ AZ = \tfrac{5}{8} r \text{ en } KZ = \tfrac{1}{8} r$$

terwijl men, door $H = 2r$ te nemen, voor den geheelen bol vinden zal, $MZ = 0$, $AZ = r$ en $KZ = 0$, hetgeen bovendien van zelf duidelijk is.

AANMERKING. Het is genoegzaam bekend, dat de inhoud van eene bolvormige schijf gelijk is aan de som der cilinders XY en WV, *Fig.* 24. welke op het boven- en benedenvlak staan en de halve hoogte hebben, opgeteld met den inhoud van den bol, welke de hoogte tot middellijn, en dus zijn middelpunt in K heeft. Men zou zich echter grovelijk bedriegen, indien men dacht, dat het zwaartepunt Z van de som dezer ligchamen te gelijker tijd het zwaartepunt van de bolvormige schijf zou zijn. Opmerkelijk is ondertusschen de overeenkomst, welke de formule

voor den afstand van het zwaartepunt van de som dezer ligchamen met de formule (7) van de bolvormige schijf heeft. Stellen wij namelijk wederom, dat s en S de stralen van het grond- en bovenvlak zijn en dat d de dikte is, dan is; de oorsprong der momenten in K stellende:

Moment. cil. XY $=$ *cil.* XY $\times$ PK $= \frac{1}{8} d^2 s^2 \pi$

Moment. cil. YW $=$ *cil.* VW $\times$ QK $= \frac{1}{8} d^2 S^2 \pi$

Moment. bol. K $=$ *bol.* K $\times$ o $=$ o

terwijl het moment voor de som der ligchamen gelijk is aan,

$$KZ \times \{ cil. XY + cil. VW + bol. K \}$$

dat is, gelijk aan:

$$KZ \times \{ \tfrac{1}{2} d s^2 \pi + \tfrac{1}{2} d S^2 \pi + \tfrac{1}{6} d^3 \pi \}$$

daar nu het zwaartepunt P des bovensten cilinders boven het punt K ligt, terwijl de zwaartepunten Q en Z, van den benedensten cilinder en van de som der ligchamen, beneden dit punt K gelegen zijn, zoo is het eerste moment ten opzigte van de twee anderen negatief, en wij verkrijgen de vergelijking:

$$KZ \times \tfrac{1}{6} d \pi \{ 3 S^2 + 3 s^2 + d^2 \} = \tfrac{1}{8} d^2 \pi \{ S^2 - s^2 \}$$

waaruit gemakkelijk gevonden wordt:

$$KZ = \tfrac{3}{4} d \times \frac{(S + s)(S - s)}{3 (S^2 + s^2) + d^2}$$

en wanneer wij deze formule met (7) vergelijken, dan blijkt het, dat zij met dezelve alleen in den coëfficient verschilt, welke vóór d staat, en dat de afstand van het zwaartepunt der som dezer drie ligchamen tot het midden K van de as gelijk is aan anderhalfmaal den afstand, welken het zwaartepunt van de bolvormige schijf tot dit zelfde punt K heeft.

XL. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Men vraagt het middelpunt van zwaarte te vinden van een ligchaam, dat geboren wordt door de omwenteling van een cirkelsegment om eene middellijn van den cirkel, waartoe dit segment be-

behoort, in de onderstelling, dat deze middellijn de koorde van het segment niet snijdt?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Laat DZC *Fig.* 29. het segment, M het middelpunt en BC de omwentelings-as zijn. Snijden wij het gegeven ligchaam door eenig vlak ZW, loodregt door deze as gaande, dan zal deze doorsnede uit het verschil van twee gelijkmiddelpuntige cirkels bestaan, waarvan XZ en XY de stralen zijn; en wanneer wij nog zulk een vlak, op eenen oneindig kleinen afstand van het eerste, door dit ligchaam brengen, dan zal het gedeelte van het ligchaam, tusschen deze twee snijdende vlakken gelegen, deszelfs differentiaal zijn.

Stellen wij nu BC $= h$, DE $= k$ en BX $= x$, dan is: CX $= h - x$. Daar nu:

$$DY : YE = x : h - x \quad \text{en} \quad DY + YE = k$$

is, zoo verkrijgen wij gemakkelijk:

$$DY = \frac{kx}{h} \quad \text{en} \quad EY = \frac{k(x - h)}{h}.$$

Stellen wij verder den inhoud van het gegevene ligchaam, begrepen tusschen de vlakken DD′ en ZW, gelijk V, dan is ∂V gelijk ∂x, vermenigvuldigd met het verschil der cirkels, waarvan XZ en XY de stralen zijn, en bij gevolg hebben wij:

$$\begin{aligned} \partial V &= \pi\, \partial x\, (XZ^2 - XY^2) \\ &= \pi\, \partial x\, (XZ + XY)(XZ - XY) \\ &= \pi\, \partial x \,.\, WY \times ZY; \end{aligned}$$

daar nu ZW en DE koorden van denzelfden cirkel zijn, zoo is:

$$WY \times ZY = DY \times EY = \frac{k^2 x\,(h - x)}{h^2},$$

en hierdoor verkrijgen wij:

$$\partial V = \frac{\pi\, k^2}{h^2}\,(hx - x^2)\,\partial x.$$

Wanneer wij dan het zwaartepunt van het stuk, begrepen tusschen de vlakken DD′ en ZW, in Z stellen, zoo volgt hieruit:

$$BZ' = \frac{\int x \partial V}{V} = \frac{\int (hx^2 - x^3)\,\partial x}{\int (hx - x^2)\,\partial x}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}hx^3 - \frac{1}{4}x^4}{\frac{1}{2}hx^2 - \frac{1}{3}x^3} = \frac{1}{2}x \times \frac{4h - 3x}{3h - 2x} \quad \ldots (1)$$

welke integralen geen van beide eene ſtandvastige behoefden, omdat zij uit den aard der zaak beide voor $x = 0$ moesten verdwijnen,

Stellen wij $x = h$, dan verkrijgen wij, ter bepaling van het zwaartepunt des geheelen ligchaams, door de omwenteling van het ſegment DZE om de as BC voortgebragt:

$$BZ' = \frac{1}{2}h,$$

en dit zwaartepunt is alzoo op de helft van de as BC gelegen.

AANMERKING. Wij kunnen ook tot deze zelfde uitkomst geraken, door op te merken, dat ons gegeven ligchaam het verſchil is tusſchen de bolvormige ſchijf DZEE'WD' en den afgeknotten kegel DEE'D'; doch dan zal de berekening moeijelijker worden. Bovendien heeft onze oplosſing het voordeel, van niet alleen het zwaartepunt van het geheele gegevene ligchaam aan te wijzen; maar de vergelijking (1) doet daarenboven het zwaartepunt van eenig deel van hetzelve kennen, begrepen tusſchen de vlakken DD' en ZW; en wanneer wij de integralen tusſchen de limieten $x = a$ en $x = b$ genomen hadden, zouden wij zelfs gevonden hebben, hoe ver het zwaartepunt van eenig willekeurig ſtuk, begrepen tusſchen twee vlakken, welke loodregt door de as gaan, van het punt B gelegen is. Men zal voor dezen afſtand vinden:

$$\frac{1}{2} \times \frac{4h(b^2 + ab + a^2) - 3(b^3 + ab^2 + a^2b + a^3)}{3h(b + a) - 2(b^2 + ab + a^2)}.$$

XLI. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK Rz.

Zoek drie getallen in eene opklimmende rekenkunſtige reeks, in rangorde door 17, 19 en 23 deelbaar zijnde, onder die bepaling, dat het eerſte quotient 25 meer zij dan het tweede, en het tweede 37 meer dan het derde? (7)

(7) J. DE GELDER, *Beg. der Stelkunst*, No. 43, *pag.* 247.

Opgelost *door* J. van Wijk Rz., R. van Wijk Jz., W. Top Wz., H. Foekes Bakker, J. Pereboom, A. van der Swan en G. Sarlet.

Oplossing *van* J. van Wijk Rz.

Stel de getallen x, $x + y$ en $x + 2y$, dan is, volgens de bepalingen van het Voorstel:

$$\frac{x}{17} = \frac{x+y}{19} + 25 \quad \text{en} \quad \frac{x+y}{19} = \frac{x+2y}{23} + 37;$$

de eerste vergelijking met 17×19 en de tweede met 19×23 vermenigvuldigende, komt er:

$$19x = 17x + 17y + 8075$$

en

$$23x + 23y = 19x + 38y + 16169;$$

of, na behoorlijke herleiding:

$$2x - 17y = 8075,$$

$$4x - 15y = 16169;$$

trekkende nu tweemaal de eerste van de tweede vergelijking af, dan blijft er:

$$19y = 19 \quad \text{of} \quad y = 1,$$

en dus is $x = \dfrac{8075 + 17y}{2} = 4046$. De gevraagde getallen zijn bij gevolg 4046, 4047 en 4048.

XLII. VOORSTEL.

Door J. van Wijk Rz.

Zoek een getal van vijf cijfers, door 9 deelbaar zijnde, hetwelk, door 11 gedeeld wordende, 7 in de deeling overlaat, zoodanig, dat men hetzelve kan omkeeren, zonder dat het van waarde verandert, en dat het eerste cijfer zoo veel meer zij dan het tweede cijfer, als het tweede meer bedraagt dan het derde? (8)

Opgelost *door* J. van Wijk Rz., W. Top Wz., R. van Wijk Jz., A. Volkerse, H. Foekes Bakker en A. van der Swan.

Daar

(8) *Idem* N°. 41.

Daar het getal kan worden omgekeerd, zonder van waarde te veranderen, moet het eerste cijfer gelijk het vijfde en het tweede cijfer gelijk het vierde zijn, en daar bovendien het eerste, tweede en derde cijfer eene afdalende rekenkunstige reeks uitmaken, zoo stellen wij, voor de achtervolgende cijferletters van het gevraagde getal:

$$x + 2y,\ x + y,\ x,\ x + y \text{ en } x + 2y$$

en dan zal het getal worden uitgedrukt door:

$$10000(x+2y) + 1000(x+y) + 100x + 10(x+y) + (x+2y),$$

of, dat hetzelfde is, door:

$$11111x + 21012y.$$

Dit getal moet, door 11 gedeeld zijnde, 7 in de deeling overlaten, en dit geeft ons de vergelijking:

$$x + 2y = 7 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Verder moet dit getal door 9 deelbaar zijn, en dus is ook de som der cijfers door 9 deelbaar; dit geeft ons, tot tweede vergelijking:

$$5x + 6y = 9 \cdot m \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

waarin m nu eenig geheel getal moet zijn.

Trekkende dan driemaal de vergelijking (1) van de vergelijking (2) af, zoo blijft er:

$$2x = 9m - 21$$

waaruit $$x = 4m - 10 + \frac{m-1}{2}.$$

Stellende dus $m - 1 = 2n$, dan is $m = 2n + 1$, waardoor:

$$x = 9n - 6$$

en $$y = \frac{7-x}{2} = \frac{13-9n}{2}.$$

Zal nu y een positief geheel getal zijn, dan kan er voor n niet anders dan 0 of 1 genomen worden, maar $n = 0$ zou x negatief maken; er blijft dus niets anders over dan $n = 1$ te nemen, en dit geeft $y = 2$ en $x = 3$, waaruit dan volgt $x + y = 5$ en $x + 2y = 7$, en het gevraagde getal is dienshalve 75357.

XLIII.

XLIII. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK Rz.

Van eene evenredigheid ſtaan de twee eerſte termen tot elkander in reden als 4 *tot* 9; *bijaldien nu de ſom der uiterſte termen* 129, *en het verſchil der middelſte* 25 *bedraagt, vraagt men welke die getallen zijn?* (9)

OPGELOST *door* W. TOP Wz., H. FOEKES BAKKER, J. VAN WIJK Rz., A. VOLKERSE, R. VAN WIJK Jz., A. VAN DER SWAN, G. J. SARLET en J. PEEREBOOM.

OPLOSSING *van* W. TOP Wz.

Omdat de twee eerſte termen tot elkander in reden ſtaan als 4 tot 9, ſtaan ook de twee laatſte termen tot elkander als 4 tot 9, en wij kunnen de evenredigheid dus voorſtellen door:

$$4x : 9x = 4y : 9y.$$

De ſom der uiterſte termen moet 129 zijn, en dit geeft de vergelijking:

$$4x + 9y = 129 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Het verſchil der middelſte termen moet bovendien gelijk 25 zijn; daar echter in het Voorſtel niet bepaald is, of de tweede dan wel de derde term het grootſte is, zoo beſtaan er twee verſchillende gevallen, namelijk:

$$9x - 4y = 25, \quad \text{of} \quad 4y - 9x = 25,$$

welke wij te gelijker tijd kunnen voorſtellen door:

$$9x - 4y = \pm 25 \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Nemen wij nu de ſom van 4 maal de vergelijking (1) en 9 maal de vergelijking (2), dan verkrijgen wij:

$$97x = 516 \pm 225 = 741 \text{ of } 291,$$

waaruit

$$x = 7\tfrac{62}{97} \text{ of } 3,$$

en bij gevolg

$$y = \frac{129 - 4x}{9} = 10\tfrac{21}{97} \text{ of } 13.$$

Ne-

(9) J. DE GELDER, *Beginſelen der Stelkunst*, No. 45.

Nemende dus $x = 6\frac{62}{97}$ en $y = 10\frac{91}{97}$, dan is de evenredigheid $30\frac{54}{97} : 68\frac{73}{97} = 43\frac{73}{97} : 98\frac{43}{97}$; maar nemen wij $x = 3$ en $y = 13$, dan is de evenredigheid $12 : 27 = 52 : 117$.

XLIV. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK Rz.

Iemand neemt eene zekere som op interest; na verloop van vijf maanden doet hij één vierde van de geheele som met nog 200 gulden af, en laat de rest zes maanden loopen, na verloop van welken tijd hij nog half zoo veel op interest neemt als er bij de eerste aflossing was blijven staan, en lost zeven maanden later 200 gulden meer af dan één derde van de som, die toen op interest stond; het resterende laat hij acht maanden staan, na verloop van welken tijd hij de geheele som aflost. Wanneer hij nu de rekening der verloopene interessen opmaakt, dan bevindt hij, dat er in de eerste vijf maanden zoo veel interessen verloopen zijn als in de laatste acht maanden, als ook, dat de verloopene interest in den tweeden termijn van zes maanden $41\frac{1}{4}$ gulden minder bedraagt dan in den derden termijn van zeven maanden. Men vraagt: welke som hij eerst opgenomen had, en tegen hoeveel ten honderd 's jaars? (10)

OPGELOST door J. VAN WIJK Rz., W. TOP Wz., A. VAN DER SWAN, R. VAN WIJK Jz., H. FOEKES BAKKER, J. PEEREBOOM en G. J. SARLET.

OPLOSSING van J. VAN WIJK Rz.

Stel het kapitaal x en de interest ten honderd y, dan vindt men de interest in de vijf eerste maanden door de evenredigheid:

$$100 \times 12 : y = x \times 5 : \textit{Int. 1}^e \textit{ term} = \frac{xy}{240}.$$

Nu lost hij af $\frac{1}{4}x + 200$, en er blijft dus staan een kapitaal $\frac{3}{4}x - 200$; hetgeen in 6 maanden opbrengt:

100

(10) J. DE GELDER, *Beginselen der Stelkunst*, N°. 57.

$100 \times 12 : y = (\frac{3}{4}x - 200) \times 6$: *Int.* 2e *termijn* $= \frac{3xy - 800y}{800}$.

Verder neemt hij op $\frac{3}{8}x - 100$; het kapitaal wordt dus $1\frac{1}{8}x - 300$, hetgeen in 7 maanden opbrengt:

$100 \times 12 : y = (1\frac{1}{8}x - 300) \times 7$: *Int.* 3e *termijn* $= \frac{7\frac{7}{8}xy - 2100y}{1200}$.

Eindelijk lost hij af $\frac{3}{8}x + 100$, het kapitaal blijft dan $\frac{3}{4}x - 400$, en dit brengt in 8 maanden op:

$100 \times 12 : y = (\frac{3}{4}x - 400) \times 8$: *Int.* 4e *termijn* $= \frac{3xy - 1600y}{600}$.

Wij hebben dus, volgens het voorstel, de volgende vergelijkingen:

$$\frac{5xy}{1200} = \frac{6xy - 3200y}{1200} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{3xy - 800y}{800} = \frac{7\frac{7}{8}xy - 2100y}{1200} - 41\frac{1}{4} \quad \ldots (2)$$

De eerste met 1200 vermenigvuldigd en door y gedeeld, geeft $5x = 6x - 3200$, waaruit terstond volgt $x = 3200$. Deze waarde van x in de tweede brengende, wordt dezelve $11y = 19\frac{1}{4}y - 41\frac{1}{4}$; of $8\frac{1}{4}y = 41\frac{1}{4}$, dat is $33y = 165$, waaruit $y = 5$. De som, welke eerst genomen was, bedroeg dus 3200 gulden, en de interest was gerekend tegen 5 ten honderd in het jaar.

XLV. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK Rz.

Vijf kooplieden hebben te zamen een kapitaal bijeengebragt, en met hetzelve 5681 gulden gewonnen. Wanneer A en B deze geheele winst met hunne kapitalen te zamen nemen, zoo hebben zij viermaal zoo veel als de anderen te zamen hebben ingebragt; deze geheele winst bij de kapitalen van B en C voegende, bedraagt dit vijfmaal de som der inlagen van de drie anderen; C en D deze winst bij hunne kapitalen tellende, hebben zij zesmaal zooveel als de drie anderen hebben ingelegd; D en E deze zelfde winst bij hunne kapitalen nemende, bedraagt deze som zevenmaal zooveel als de drie anderen te zamen hebben ingelegd; eindelijk indien E en A

de-

deze winst bij hunne kapitalen voegen, hebben zij achtmaal zooveel als de drie anderen te zamen hebben ingelegd. Men vraagt: hoeveel elks inlage geweest zij? (11)

OPGELOST *door* L. R. SCHMIDT, J. VAN WIJK Rz., W. TOR Wz., A. VAN DER SWAN, H. FOEKES BAKKER, J. PEERBOOM, R. VAN WIJK Jz. en G. J. SARLET.

OPLOSSING *van* L. R. SCHMIDT.

Stellen wij den inleg van A, B, C, D en E achtervolgens v, w, x, y en z, en stellen wij $x+y+z+v+w=s$, dan hebben wij, 5681 kortheidshalve a stellende, door het Voorstel, de volgende vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} v+w+a=4(s-v-w) \\ w+x+a=5(s-w-x) \\ x+y+a=6(s-x-y) \\ y+z+a=7(s-y-z) \\ z+v+a=8(s-z-v) \end{array}\right\} \text{waaruit} \left\{\begin{array}{l} v+w=\frac{1}{5}(4s-a) \\ w+x=\frac{1}{6}(5s-a) \\ x+y=\frac{1}{7}(6s-a) \\ y+z=\frac{1}{8}(7s-a) \\ z+v=\frac{1}{9}(8s-a) \end{array}\right.$$

de som der vijf laatste vergelijkingen is:

$$2s=\frac{10721s-1879a}{2520},$$

en wanneer wij hieruit s afzonderen, verkrijgen wij,

$$s=v+w+x+y+z=\frac{1879}{5681}a=1879. \quad (A)$$

Nu vinden wij, door de vijf laatste vergelijkingen twee aan twee bij elkander op te tellen:

$$w+x+y+z=\tfrac{1}{24}(41s-7a)=1553,$$
$$v+x+y+z=\tfrac{1}{63}(110s-16a)=1838,$$
$$v+w+y+z=\tfrac{1}{45}(76s-13a)=1301,$$
$$v+w+x+z=\tfrac{1}{54}(93s-15a)=1658,$$
$$v+w+x+y=\tfrac{1}{35}(58s-12a)=1166.$$

Trekkende deze vergelijkingen dan, elk in het bijzonder, af van (A), zoo vinden wij eindelijk:

$$v=326;\ w=41;\ x=578;\ y=221;\ z=713.$$

XLVI.

(11) J. DE GELDER, *Beginselen der Stelkunst*, N°. 60.

XLVI. VOORSTEL.

Door J. VAN DER STOK.

Wanneer men elke der zes ribben van eene willekeurige driehoekige piramide midden door deelt en de deelpunten, gelegen in de overstaande ribben, dat is, in de ribben, welke elkander niet ontmoeten, door regte lijnen vereenigt, dan zal het volgende plaats hebben:

1°. *Deze drie lijnen zullen elkander in een zelfde punt doorsnijden, en elkander in dit snijpunt wederkeerig midden door deelen.*

2°. *De som van de vierkanten op deze drie lijnen zal tot de som der vierkanten op de zes ribben der piramide in reden zijn als* 1 *tot* 4.

3°. *Het vierkant van elke dezer lijnen zal gevonden worden, door één vierde te nemen van het verschil, dat men verkrijgt, door de som van de vierkanten der twee ribben, waardoor deze lijn gaat, van de som der vierkanten op de vier overige ribben af te trekken.*

Men vraagt deze eigenschappen te bewijzen?

OPGELOST *door* J. VAN DER STOK, R. LOBATTO, W. TOP Wz., en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* J. VAN DER STOK.

Laat de ribben van de driehoekige piramide ABCD, *Fig.* 26, in de punten E, F, G, H, I, K midden door gedeeld zijn, dan zijn GK, FH en EI de drie lijnen, waarvan in het Voorstel gesproken wordt.

Trekken wij nu ook in de vlakken der piramide lijnen, welke de deelpunten der ribben vereenigen, dan loopen deze lijnen alle evenwijdig met de ribben, en deelen elk der driehoekige zijvlakken in vier gelijke en gelijkvormige driehoeken. Daar dan GI en EK beide evenwijdig zijn met BC, zoo zijn zij ook onderling evenwijdig, en liggen dus in een zelfde vlak; op dezelfde wijze zijn ook de lijnen EG en KI evenwijdig en liggen in een zelfde vlak, want zij loopen beide evenwijdig met AD: hieruit

volgt dan, dat EGIK een parallelogram is, en de lijnen EI en CK snijden bij gevolg elkander midden door in P.

Daar verder op dezelfde wijze blijkt, dat FI evenwijdig met EH en EF evenwijdig met HI is, zoo is ook EFIH een parallelogram, waarin de diagonalen EI en FH elkander midden door deelen. CK en FH gaan dus beide door het midden van EI, de drie lijnen CH, FH en EI gaan bij gevolg door een zelfde punt P, dat in het midden van elke dezer lijnen gelegen is, en hierdoor is dan het eerste gedeelte der stelling bewezen.

Om het tweede gedeelte der stelling te bewijzen, zoo merken wij op, dat, in elk parallelogram de som der vierkanten van de diagonalen gelijk is aan de som der vierkanten op de vier zijden. De drie parallelogrammen EFIH, KIG en KHGF geven ons alzoo

$$\left.\begin{aligned} IE^2 + FH^2 &= 2FI^2 + 2IH^2 = \tfrac{1}{2}AB^2 + \tfrac{1}{2}CD^2 \\ KG^2 + IE^2 &= 2KI^2 + 2KE^2 = \tfrac{1}{2}AD^2 + \tfrac{1}{2}BC^2 \\ FH^2 + KG^2 &= 2KH^2 + 2FK^2 = \tfrac{1}{2}AC^2 + \tfrac{1}{2}BD^2 \end{aligned}\right\} (a)$$

waarvan de som, met 2 vermenigvuldigd, geeft

$$4(IE^2 + KG^2 + FH^2) = AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2.$$

en hierdoor is dan ook het tweede gedeelte bewezen.

Het derde gedeelte van onze stelling wordt nu zeer gemakkelijk bewezen; want trekkende van de vergelijking

$$IE^2 + KG^2 + FH^2 = \tfrac{1}{4}(AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2),$$

elke der vergelijkingen (a) in het bijzonder af, dan blijft er

$$KG^2 = \tfrac{1}{4}\left\{(AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2) - (AB^2 + CD^2)\right\}$$

$$FH^2 = \tfrac{1}{4}\left\{(AB^2 + AC^2 + BD^2 + CD^2) - (AD^2 + BC^2)\right\}$$

$$IE^2 = \tfrac{1}{4}\left\{(AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2) - (AC^2 + BD^2)\right\}$$

Aanmerking. Het blijkt bovendien nog gemakkelijk, dat het achtvlakkig ligchaam FGIEHK door acht driehoeken begrensd wordt, welke twee aan twee met elkander gelijkvormig en evenwijdig zijn, doch ten opzigte van elkander in omgekeerde rigting staan, en dat de inhoud van dit ligchaam gelijk zal zijn aan de helft van de piramide ABCD.

XLVII. VOORSTEL.

Door H. VAN KRAAIJENOORD.

Een heer huurde een' tuinman en zeide hem, dat hij op zijne twee buitenplaatsen te zamen 10 *bosschen had; in elk bosch waren zoo veel eikenboomen, als er bosschen op elke plaats waren; bij elken eik stonden zoo veel dennen als er zich eiken op elk buitengoed bevonden, en bij elken denneboom stonden zoo veel beukenboomen, als er bosschen op elke plaats waren. Indien gij nu, zeide de heer, van elken beukeboom, welken ik bezit, een' stuiver wilt hebben, kunt gij in mijnen dienst treden. De tuinman dit aannemende, ontving elk jaar* 440 *gulden. Hoeveel bosschen, eiken, dennen en beuken had deze heer dan op iedere plaats?*

OPGELOST *door* W. TOP WZ., H. VAN KRAAIJENOORD, A. VAN DER SWAN, G. J. SARLET, J. PEEREBOOM, H. FOEKES BAKKER, P. A. VAN ALPHEN, A. J. BRINKERINK en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* W. TOP WZ.

Stellen wij het aantal bosschen op de eene plaats $5 + x$, dan is het aantal bosschen op de andere plaats $5 - x$, en wij hebben dus volgens de opgaaf

Eerste plaats.		*Tweede plaats.*	
$5 + x$	*Bosschen*	$5 - x$	*Bosschen*
$(5 + x)^2$	*Eikenboomen*	$(5 - x)^2$	*Eikenboomen*
$(5 + x)^4$	*Denneboomen*	$(5 - x)^4$	*Denneboomen*
$(5 + x)^5$	*Beukenboomen*	$(5 - x)^5$	*Beukenboomen*

Er zijn dus in het geheel $(5 + x)^5 + (5 - x)^5$ beukenboomen, en dit zelfde aantal stuivers, volgens het Voorstel, 440 gulden of 8800 stuivers bedragende, zoo hebben wij,

$$(5 + x)^5 + (5 - x)^5 = 8800,$$

of, behoorlijk ontwikkelende en herleidende,

$$x^4 + 50\,x^2 = 51$$

uit welke vergelijking wij vinden $x = \pm 1$, en dit geeft ons

Eerste plaats.	*Tweede plaats.*
6 *Bosschen*	4 *Bosschen*
36 *Eikenboomen*	16 *Eikenboomen*
1296 *Denneboomen*	256 *Denneboomen*
7776 *Beukenboomen*	1024 *Beukenboomen*

AANMERKING. De vergelijking $x^4 + 50\,x^2 - 51 = 0$ heeft tot wortels $x = 1$, $x = -1$, $x = \pm\sqrt{-51}$. De wortel $x = -1$ geeft hetzelfde, wat wij door $x = 1$ gevonden hebben, en de twee overige wortels onbestaanbaar zijnde, kunnen hier niet worden toegepast.

XLVIII. VOORSTEL.

Door H. VAN KRAAIJENOORD.

De naam van zekere stad in Nederland bestaat uit zes letteren. Wanneer men de letters van het Alphabet door de achtervolgende natuurlijke getallen van 1 *tot* 26 *voorstelt, dan vindt men dezen naam aldus.*

De derde en vierde letters zijn even groot, en derzelver som is gelijk het product der eerste en vijfde; terwijl de vierde plus de zesde gelijk is aan de som van de eerste, derde en vijfde. Het vijfde gedeelte der vijfde letter is juist zoo groot als de tweede letter, en terwijl het quadraat der vijfde letter de som van deszelfs wortel en de vierde letter uitmaakt, zoo is de tweede letter plus deze wortel gelijk 6. *Welke stad is dit?*

OPGELOST *door* H. VAN KRAAIJENOORD, A. VOLKERSE, W. TOP WZ., A. VAN DER SWAN, R. VAN WIJK JZ., H. FOEKES BAKKER, J. PEEREBOOM, P. A. VAN ALPHEN, A. J. BRINKERINK en G. J. SARLET.

OPLOSSING *van* H. VAN KRAAIJENOORD.

Stel de derde letter x, dan is ook de vierde x; stellende dan de eerste letter y, dan is, volgens de voorwaarde van het vraagstuk,

ftuk, de vijfde letter gelijk $\frac{2x}{y}$, de zesde gelijk $\frac{2x}{y} + y$, en de tweede gelijk $\frac{2x}{5y}$. De twee laatfte voorwaarde van het vraagftuk geven ons dus de vergelijkingen

$$x + \frac{2x}{y} = \frac{4x^2}{y^2} \quad \text{en} \quad \frac{2x}{5y} + \frac{2x}{y} = 6.$$

De eerfte vergelijking door x deelende, en beide vergelijkingen van gebrokens zuiverende, komt er

$$y^2 + 2y = 4x \quad \text{en} \quad 12x = 30y,$$

daar nu uit de tweede $4x = 10y$ is, zoo verandert hierdoor de eerfte in $y^2 + 2y = 10y$, of $y + 2 = 10$, dus $y = 8$, waaruit $x = 20$.

De getallen, waardoor de achtervolgende letters van den naam der ftad worden uitgedrukt, zijn dus

Eerfte letter $y = 8$; *tweede letter* $\frac{2x}{5y} = 1$; *derde letter* $x = 10$

Vierde letter $x = 20$; *vijfde letter* $\frac{2x}{y} = 5$; *zesde letter* $\frac{2x}{y} + y = 13$

en de naam der ftad is bij gevolg HATTEM.

XLIX. VOORSTEL.

Door H. VAN KRAAIJENOORD.

Een getal te vinden, dat bij de getallen 2, 4, 6 *en* 10 *in het bijzonder opgeteld, de fommen eene meetkunftige evenredigheid uitmaken?*

OPGELOST *door* H. VAN KRAAIJENOORD, G. J. SARLET, A. VAN DER SWAN, J. PEEREBOOM, H. FOEKES BAKKER, P. A. VAN ALPHEN, R. VAN WIJK JZ., A. J. BRINKERINK en W. TOP WZ.

OPLOSSING *van* H. VAN KRAAIJENOORD.

Stel dat de gegevene getallen algemeener waren a, b, c en d,

en dat het gevraagde getal x is, dan moeten wij x vinden door middel van de evenredigheid

$$x + a : x + b = x + c : x + d,$$

daar nu de fom der termen van de eerfte reden tot derzelver verfchil in reden is, als de fom der termen van de tweede reden tot derzelver verfchil, zoo verkrijgen wij

$$2x + a + b : a - b = 2x + c + d : c - d,$$

en hieruit volgt de vergelijking

$$2x(c-d) + (a+b)(c-d) = 2x(a-b) + (c+d)(a-b)$$

of de termen, waarin x voorkomt, vereenigende

$$2x(a-b-c+d) = (a+b)(c-d) - (a-b)(c+d)$$

of $2x\left\{(a+d) - (b+c)\right\} = 2(bc - ad)$

waaruit $$x = \frac{bc - ad}{(a+d) - (b+c)}.$$

en hierdoor is het Voorftel algemeen opgelost.

In het opgegevene bijzondere geval is $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$, en $d = 10$, waardoor $bc - ad = +4$ en $(a+d) - (b+c) = 2$, zoodat $x = 2$; de evenredigheid wordt alzoo $4 : 6 = 8 : 12$.

AANMERKINGEN. Is $bc = ad$, dan wordt $x = 0$; in dit geval zijn a, b, c en d ook reeds van zelve evenredig, en het is dus klaar, dat men alsdan niets bij de getallen behoeft te tellen, om eene evenredigheid te verkrijgen.

Is daarentegen $a + d = b + c$, dan wordt x oneindig en het vraagftuk is alsdan onmogelijk, of wel de evenredigheid beftaat in dit geval uit vier oneindig groote, doch gelijke termen.

L. VOORSTEL.

Door H. VAN KRAAIJENOORD.

Men verlangt te bepalen, in welk jaar men zich bevindt, wanneer 17 jaren later, federt het begin onzer tijdrekening 11 maal zoo veel jaren, en 150 jaren vroeger dan het begeerde jaar, federt dit zelfde begin, 10 maal zoo veel jaren verloopen zijn, als de jaren, die men telt, tusfchen den ondergang van het Macedonifche Rijk en de geboorte van Christus?

Opgelost *door* H. van Kraaijenoord, J. Peereboom, W. Top Wz., A. van der Swan, H. Foekes Bakker, G. J. Sarlet, P. A. van Alphen, R. van Wijk Jz. en A. J. Brinkerink.

Oplossing *van* H. van Kraaijenoord.

Stel het jaartal x, dan is het jaartal, dat men 150 jaar vroeger schreef, $x - 150$, en het jaartal, dat 17 jaar later invalt, $x + 17$; deelt men nu het eerste door 10 en het tweede door 11, dan moet men in beide gevallen het aantal jaren verkrijgen, verloopen tusschen den ondergang van het Macedonische Rijk en de geboorte van Christus. Wij hebben dus

$$\tfrac{1}{10}(x - 150) = \tfrac{1}{11}(x + 17),$$

of

$$11(x - 150) = 10(x - 17),$$

dat is

$$11x - 1650 = 10x - 170,$$

waaruit

$$x = 1820.$$

waardoor het gevraagde jaartal gevonden is.

Wil men hierdoor nu ook het aantal jaren bepalen, tusschen den ondergang des Macedonischen Rijks en Christus geboorte verloopen, dan vindt men voor hetzelve $\tfrac{1}{10}(x - 150) = 167$ jaren.

LI. Voorstel.

Door J. W. Martini.

Hoe groot moet men de hoogte van eenen regten cirkelvormigen cilinder nemen, opdat het verschil tusschen dezelve en het ingeschreven parallelopipedum, waarvan de bazis een vierkant is, gelijk zij aan den inhoud van eenen cubus, op de zijde van dit vierkant beschreven?

Opgelost *door* J. W. Martini en W. Top Wz.

Oplossing *van* J. W. Martini.

Stellen wij de zijde van het vierkant in de bazis beschreven a, dan is de straal van het grondvlak $r = \tfrac{1}{2}a\sqrt{2}$, en de in-

houd van het grondvlak $r^2 \pi$ of $\frac{1}{2} a^2 \pi$; wanneer wij dan de gevraagde hoogte x stellen, is de inhoud van den cilinder $\frac{1}{2} a^2 \pi x$ en de inhoud van het parallelopipedum $a^2 x$, waaruit dan volgt, dat wij deze vergelijking hebben:

$$\frac{1}{2} a^2 \pi x - a^2 x = a^3$$

of

$$(\frac{1}{2} \pi - 1) x = a$$

waaruit

$$x = \frac{2}{\pi - 2} \times a = 1,7519 . a$$

ten naasten bij.

Willen wij x in r uitdrukken, dan is $a = r \sqrt{2}$, en bij gevolg

$$x = \frac{2\sqrt{2}}{\pi - 2} \times r.$$

LII. VOORSTEL.

Door J. W. MARTINI.

Om en in eenen cirkel is een driehoek beschreven, waarvan de zijden aan elkander evenwijdig loopen: wanneer nu de betrekking der zijden in een' van dezen driehoeken gegeven is, benevens de loodlijn, welke in den eersten uit een der hoekpunten op de overstaande zijde valt, vraagt men hierdoor de zijden van beide driehoeken te berekenen?

OPGELOST door J. W. MARTINI; R. LOBATTO, W. TOP Wz., en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING van J. W. MARTINI.

Laat ABC, *Fig.* 27, de omgeschrevene en A′B′C′ de ingeschrevene driehoek zijn. Stellen wij CD $= h$, en AB : BC : AC $= p : q : r$. Indien wij dan den straal van den cirkel door s en den inhoud van driehoek ABC door I uitdrukken, dan is

$$AB = \frac{2 I}{h}; \; BC = \frac{q}{p} \times \frac{2 I}{h}; \; AC = \frac{r}{p} \times \frac{2 I}{h};$$

deze drie waarden optellende, komt er

om-

$$\textit{omtrek}\ ABC^{\circ} = \frac{p+q+r}{p} \times \frac{2I}{h}$$

en daar de inhoud van eenen driehoek gelijk is aan den omtrek, vermenigvuldigd met den halven ſtraal van den ingeſchrevenen cirkel, zoo verkrijgen wij

$$I = \tfrac{1}{2}\, s \times \frac{p+q+r}{p} \times \frac{2I}{h},$$

hetgeen, door I gedeeld zijnde, geeft

$$1 = s \times \frac{p+q+r}{p} \times \frac{1}{h}$$

en hierdoor verkrijgen wij, voor den ſtraal van den cirkel,

$$s = \frac{p}{p+q+r} \times h \quad \ldots\ldots (1)$$

De driehoeken ABC en A′B′C′ zijn beide gelijkvormig met eenen driehoek, waarvan de zijden p, q en r zijn. Stellende nu den ſtraal des ingeſchrevenen cirkels van dezen driehoek s', dan is, volgens de bekende formulen

$$s' = \frac{\sqrt{(p+q+r)(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)}}{2(p+q+r)},$$

of ſtellende kortheidshalven

$$\sqrt{(p+q+r)(p+q-r)(p-q+r)(-p+q+r)} = P \,..(2)$$

$$s' = \frac{P}{2(p+q+r)},$$

daar nu de zijden der gelijkvormige driehoeken tot elkander in reden zijn, als de ſtralen van den ingeſchrevenen cirkels, zullen wij hebben

$$AB : p = BC : q = AC : r = s : s'$$

waaruit

$$AB = p \times \frac{s}{s'};\ BC = q \times \frac{s}{s'};\ AC = r \times \frac{s}{s'}$$

en daar wij hebben

$$\frac{s}{s'} = \frac{ph}{p+q+r} \times \frac{2(p+q+r)}{P} = \frac{2\,ph}{P}$$

zoo vinden wij, voor de drie zijden van den omgeſchrevenen driehoek:

$$AB = p \times \frac{2\,ph}{P};\ BC = q \times \frac{2\,ph}{P};\ AC = r \times \frac{2\,ph}{P} \ldots (3)$$

waarin P de waarde heeft, die in (2) is opgegeven.

Om de zijden van driehoek $A'B'C'$ te vinden, merken wij op, dat, volgens de bekende formule, de straal des omgeschrevenen cirkels van den driehoek, waarvan de zijden p, q en r zijn, wordt uitgedrukt door;

$$R = \frac{pqr}{P}.$$

daar nu deze driehoek gelijkvormig is, met driehoek $A'B'C'$, en deze laatste driehoek s tot straal van den omgeschrevenen cirkel heeft, zoo hebben wij

$$A'B' : p = B'C' : q = A'C' : r = s : R,$$

waaruit

$$A'B' = p \times \frac{s}{R};\ B'C' = q \times \frac{s}{R};\ A'C' = r \times \frac{s}{R},$$

en daar wij hebben

$$\frac{s}{R} = \frac{ph}{p+q+r} \times \frac{P}{pqr} = \frac{hP}{qr\,(p+q+r)}$$

zoo vinden wij, voor de drie zijden van den ingeschrevenen driehoek,

$$A'B' = \frac{phP}{qr(p+q+r)};\ B'C' = \frac{hP}{r(p+q+r)};\ A'C' = \frac{hP}{q(p+q+r)};$$

waarin P nogmaals de waarde heeft, welke in (a) is opgegeven.

LIII. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Zoo veel getallen te vinden als men wil, waarvan de som der m^e magten door de som der n^e magten deelbaar is? (12)

OPGELOST door H. FOEKES BAKKER, W. TOP Wz., en R. WIJK Jz.

OPLOSSING van H. FOEKES BAKKER.

Stellen wij de getallen achtervolgens

$$px,\ qx,\ rx,\ sx,\ \&c.$$

dan zal, volgens het vraagstuk,

$$\frac{x^m\,(p^m + q^m + r^m + s^m + \&c.)}{x^n\,(p^n + q^n + r^n + s^n + \&c.)} = a$$

een

(12) O. S. BANGMA, *Inl. tot de Algebra*, 2e druk pag. 243 N°. 35.

een geheel getal moeten zijn; en hieruit volgt, dat

$$x^{m-n}(p^m + q^m + r^m + s^m + \&c.) = a(p^n + q^n + r^n + s^n + \&c.)$$

zal moeten zijn.

Onderstellen wij nu, dat p, q, r, s; &c. en x geheele getallen zijn, dan is het klaar, dat aan de vereischte van het vraagstuk niet zal kunnen worden voldaan, ten zij n kleiner dan m is; want anders zou, de noemer, grooter dan de teller zijnde, a onmogelijk een geheel getal kunnen zijn. Wij onderstellen dus m grooter dan n, en in deze onderstelling zal, wanneer x, m en n geheele getallen zijn, ook x^{m-n} een geheel getal wezen.

Dit aangenomen zijnde, stellen wij,

$$x = p^n + q^n + r^n + s^n + \&c.$$

waardoor de vergelijking overgaat in

$$(p^n + q^n + r^n + s^n + \&c)^{m-n} + (p^m + q^m + r^m + s^m + \&c.)$$
$$= a(p^n + q^n + r^n + s^n + \&c.),$$

waaruit terstond volgt:

$$a = (p^n + q^n + r^n s^n + \&c.)^{m-n-1}(p^m + q^m + r^m + s^m + \&c.).$$

Worden dus voor p, q, r, s, &c, willekeurige geheele getallen aangenomen, dan zal ook x een geheel getal zijn; al de gevraagde getallen zullen dan geheele getallen worden, en tevens zal ook a een geheel getal zijn, waardoor dan aan den eisch van het vraagstuk beantwoord zal worden.

Uit dit alles volgt dan, dat wanneer

$$x = p^n + q^n + r^n + s^n + \&c.$$

genomen wordt, de getallen

$$px,\ qx,\ rx,\ sx,\ \&c.$$

zoodanig zullen zijn, dat de som hunner m^e magten door die van hunne n^e magten deelbaar zal zijn, indien slechts m grooter dan n genomen wordt.

VOORBEELDEN. 1°. Onderstel dat er vijf getallen gevraagd worden, waarvan de som der derde magten door die der tweede magten deelbaar is, dan is $n = 2$; nemende dus p, q, r, s en t achtervolgens 1, 2, 3, 4, en 5, dan vinden wij

$$x = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$$

en dus zijn de gevraagde getallen 55, 110, 165, 220 en 275.

2°. Waren er vijf getallen gevraagd, waarvan de som der vierde magten door die der eerste magten moet deelbaar zijn,

dan

dan is $n = 1$, en wanneer wij dus p, q, r, s en t gelijk 1, 2, 3, 4 en 5 nemen, dan is

$$x = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

de gevraagde getallen zijn dus 15, 30, 45, 60, en 75.

LIV. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK, Jz.

Een wijnkooper heeft 20 mengelen wijn, van welke hij 5 mengelen aftapt, en de rest wederom met 5 mengelen water aanvult. Na dit tot driemaal toe herhaald te hebben, bevindt hij, dat de waarde van het mengel een cubiek getal stuivers is, waarvan de wortel één minder is dan de cubuswortel uit het aantal stuivers, dat elk mengel voor de aftapping waardig was. Men vraagt de waarde van elk mengel vóór en na de aftapping.

OPGELOST *door* W. TOP WZ., R. VAN WIJK JZ, J. PEERENBOOM, H. FOEKES BAKKER en A. VAN DER SWAN.

OPLOSSING *van* W. TOP WZ.

Bij de eerste aftapping is er 5 mengelen wijn door 5 mengelen water vervangen, en er is dus 15 mengelen wijn overgebleven. De wijn, welke bij de tweede aftapping uit het vat gaat, wordt gevonden door de evenredigheid $20 : 5 = 15 : p$, waaruit $p = 3\frac{3}{4}$; er blijft dus, nadat het vat met water tot op 20 mengelen is aangevuld, slechts $11\frac{1}{4}$ mengelen wijn in hetzelve; bij de derde aftapping gaat er een aantal mengelen wijn uit, dat gevonden wordt door de evenredigheid $20 : 5 = 11\frac{1}{4} : q$; hieruit vindt men $q = 2\frac{13}{16}$, en wordt het vat nu nogmaals tot 20 mengelen aangevuld, dan is er onder deze 20 mengelen vochts slechts $8\frac{7}{16}$ mengelen wijns.

Stellen wij nu de waarde van het mengel vóór de aftapping $(x + 1)^3$ en na de aftapping x^3, dan is de waarde van het laatste mengsel $20x^3$ stuivers; doch daar het water hier, als geene waarde hebbende, niet in aanmerking komt, zoo is de waarde van dit

dit mengsel ook $8\frac{7}{16}(x+1)^3$ stuivers, en dit geeft ons de vergelijking:

$$20x^3 = 8\tfrac{7}{16}(x+1)^3,$$

of $$64x^3 = 27(x+1)^3,$$

waaruit $$4x = 3x + 3,$$

en bijgevolg $x = 3$ en $x + 1 = 4$: de prijs vóór de aftapping was dus 4 stuivers, en na de aftapping 3 stuivers, het mengelen.

LV. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Een boer heeft eenen cilindervormigen put, welke zoo veel waters bevatten kan, dat indien hij het quadraat van het getal zijner osfen daarmede drenken wilde, hij 2266,40625 *cubieke voeten waters zou overhouden; doch indien hij de cubus van het aantal zijner osfen had, zou hij* 12933,59375 *cubieken voeten water te kort komen. Indien men nu stelt, dat elke os* 2 *cubieke voeten water dronk, en de hoogte van den put tot de middellijn van de bazis als* 16 *tot* 1 *staat, dan vraagt men naar de afmetingen van den put? De reden van de middellijn tot den omtrek wordt hier als* 100 : 314 *aangenomen.*

OPGELOST door R. VAN WIJK Jz., W. TOP Wz., H. FOEKES BAKKER, J. PEEREBOOM en A. VAN DER SWAN.

OPLOSSING door R. VAN WIJK Jz.

Stel het aantal osfen x, dan wordt de inhoud van den put uitgedrukt door

$$2x^3 - 12933,59375$$

en door $$2x^2 + 2266,40625;$$

het verschil dezer uitdrukkingen moet dus gelijk o zijn, en dit geeft ons de derdemagts-vergelijking:

$$2x^3 - 2x^2 - 15200 = 0,$$

of $$x^3 - x^2 - 7600 = 0,$$

welke vergelijking slechts een' bestaanbaren wortel heeft, namelijk

$x =$

$x = 20$, het gevraagde aantal osfen is dus 20, en men vindt hierdoor tevens voor den inhoud

$$2x^2 + 226,40625 = 3066,40625$$

kubieke voeten.

Stellen wij nu de middellijn van het grondvlak y, dan is de hoogte van den put $16y$ en dus de inhoud van den put $16y \times \frac{1}{4} y^2 \pi = 4 \times 3,14 y^3 = 12,56 y^3$; daar wij nu zoo aanstonds dezen inhoud gevonden hebben, verkrijgen wij de vergelijking

$$12,56 y^3 = 3066,40625,$$

of

$$y^3 = 244,140625,$$

waaruit wij, door worteltrekking, voor de middellijn van het grondvlak vinden $y = 6,25$ voeten. De hoogte van den put is dus $16y = 100$ voeten.

LVI. VOORSTEL.

Door J. P. DELPRAT.

Drie punten gegeven zijnde vraagt men een vierde punt te vinden, zoodanig, dat de som der lijnen, welke dit punt met de drie gegevene punten vereenigen, een minimum zij?

OPLOSSING. *Door* J. P. DELPRAT.

Onderstellen wij, dat A, B en C, *Fig.* 28, de drie gegevene punten zijn, waarvan de ligging ten opzigte van twee assen OY en OX, door middel der regthoekige coördinaten, bekend is. Noemen wij die van het punt A, a en b; die van het punt B, a_1 en b_1; en die van het punt C, a_2 en b_2; wanneer wij dan de coördinaten, van het gevraagde punt D door x en y uitdrukken, dan hebben wij

$$AD = \sqrt{\left\{ (x - a)^2 + (y - b)^2 \right\}}$$
$$BD = \sqrt{\left\{ (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 \right\}}$$
$$CD = \sqrt{\left\{ (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 \right\}}.$$

Volgens het vereischte moet de som dezer afstanden, welke wij door S zullen uitdrukken, een minimum wezen, en daar de-

zel-

zelve twee van elkander onafhankelijke veranderlijke grootheden x en y bevat, zoo moeten de differentiaal coefficienten van S, ten opzigte van x en van y, ieder in het bijzonder, gelijk nul zijn. Hierdoor verkrijgen wij dan de vergelijkingen:

$$\frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 0,$$

en daar

$$S = \sqrt{\left\{(x-a)^2+(y-b)^2\right\}} + \sqrt{\left\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2\right\}} + \sqrt{\left\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2\right\}}$$

is, de vergelijkingen

$$(1)\ \frac{x-a}{\sqrt{\left\{(x-a)^2+(y-b)^2\right\}}} + \frac{x-a_1}{\sqrt{\left\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2\right\}}} + \frac{x-a_2}{\sqrt{\left\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2\right\}}} = 0$$

$$(2)\ \frac{y-b}{\sqrt{\left\{(x-a)^2+(y-b)^2\right\}}} + \frac{y-b_1}{\sqrt{\left\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2\right\}}} + \frac{y-b_2}{\sqrt{\left\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2\right\}}} = 0$$

waaruit men nu de onbekenden x en y vinden moet.

Indien wij hiertoe den gewonen weg wilden volgen, en alzoo de gebrokens en wortelteekens wilden doen verdwijnen, is het blijkbaar, dat wij tot zeer omflagtige vergelijkingen zouden vervallen, waarvan de eindvergelijking tot eenen zeer aanmerkelijken graad zou opklimmen. Om deze zwarigheden te vermijden, zullen wij de hoeken, welke de lijnen AD, BD en CD met de as OX der abscisfen maken, in plaats van x en y in de vergelijkingen (1) en (2) invoeren.

Verlengen wij dan AD, BD en CD tot dat zij OX in A′, B′ en C′ doorfnijden, en ftellen wij de hoeken DA′X, DB′X en DC′X gelijk ϕ, ϕ_1 en ϕ_2, dan hebben wij, AE evenwijdig aan OX trekkende,

$$Sin.\,DAE = \frac{ED}{AD} \quad \text{en} \quad Cos.\,DAE = \frac{AE}{AD},$$

of, omdat $\angle$ DAE $= \phi$, ED $= y - b$, AE $= x - a$ en AD $= \sqrt{\left\{(x-a)^2 + (y-b)^2\right\}}$ is,

$$Sin.\,\phi = \frac{y-b}{\sqrt{\left\{(x-a)^2+(y-b)^2\right\}}} \text{ en } Cos.\,\phi = \frac{x-a}{\sqrt{\left\{(x-a)^2+(y-b)^2\right\}}}$$

en het is klaar, dat men, op dezelfde wijze, vinden zal:

$$Sin.\,\phi_1 = \frac{b_1-y}{\sqrt{\left\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2\right\}}},\ Cos.\,\phi_1 = \frac{a_1-x}{\sqrt{\left\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2\right\}}}$$

Sin.

$$Sin.\phi_2 = \frac{b_2 - y}{\sqrt{\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2\}}}, Cos.\phi_2 = \frac{a_2 - x}{\sqrt{\{(x-a_2)^2+(y-b^2)^2\}}}$$

welke waarden, in de vergelijkingen (1) en (2) overgebragt, geven:

$$Cos.\ \phi - Cos.\ \phi_1 - Cos.\ \phi_2 = 0 \ldots\ldots (3)$$

en $$Sin.\ \phi - Sin.\ \phi_1 - Sin.\ \phi_2 = 0 \ldots\ldots (4)$$

of, dat hetzelfde is.

$Cos.\ \phi - Cos\ \phi_1 = Cos.\ \phi_2$ en $Sin.\ \phi - Sin.\ \phi_1 = Sin.\ \phi_2$ nemende nu de som der vierkanten van deze vergelijkingen, dan vindt men, omdat $Sin.^2\ \phi + Cos.^2\ \phi = 1$ en $Cos.\ \phi \times Cos.\ \phi_1 + Sin.\ \phi\ Sin.\ \phi_1 = Cos.\ (\phi - \phi_1)$ is,

$1 - 2\ Cos.\ (\phi - \phi_1) = 0$, of $Cos.\ (\phi - \phi_1) = \frac{1}{2}$.

waaruit $\phi - \phi_1 = 60°$.

Nu is $\phi - \phi_1 = \angle$ B'DA', wij hebben dus $\angle$ B'DA' $= 60°$ en bijgevolg $\angle$ ADB $= 120°$.

Brengen wij in de vergelijkingen (3) en (4) de termen $Cos.\ \phi_1$ en $Sin.\ \phi_1$ in het tweede lid over, dan verkrijgen wij, op dezelfde wijze handelende, $\phi_2 - \phi = 60$, waaruit volgt $\angle$ A'DC' $= 60°$ en bij gevolg $\angle$ ADC $= 120°$; en daar $\angle$ ADB $= 120°$ is, zoo moet dan ook $\angle$ BDC $= 120°$ zijn. *Het punt D is dus ten opzigte van de drie gegevene punten zoodanig gelegen, dat de drie lijnen AD, BD en CD met elkander gelijke hoeken maken.*

Het gezochte punt D is dus zeer gemakkelijk door constructie te bepalen. Men vereenige namelijk de gegevene punten A, B en C, *Fig.* 29, door regte lijnen AB, BC en AC; en beschrijve op twee van dezelve, AB en BC, cirkel-segmenten, welke eenen hoek van 120° bevatten, en dan zullen dezelve door hunne snijding het punt D doen kennen.

De afstanden AD, BD en CD kan men door berekening aldus vinden. Stel AB $= a$, BC $= b$, AC $= c$, hoek CBA $= C$, hoek BCA $= A$ en hoek CAB $= B$, welke wij als bekend kunnen aannemen, wanneer a, b en c bekend zijn. Stellen wij verder hoek BDA $= \alpha$, hoek BCD $= \beta$, BD $= d$, AD $= d'$ en CD $= d''$, dan heeft men in de driehoeken BDA en BDC.

BD : AB $=$ *Sin.* BAD : *Sin.* BDA

en BC : BD $=$ *Sin.* BDC : *Sin.* BCD;

of

of $d : a = Sin.\ a : Sin.\ 120^\circ$
en $b : d = Sin.\ 120^\circ : Sin.\ \beta$,
waaruit volgt

$$b : a = Sin.\ a : Sin.\ \beta \quad \text{en} \quad Sin.\ a = \frac{b}{a}\ Sin.\ \beta \quad (5)$$

Maar DAB + DBA + CBD + BCD = 120°, of $\beta + a + C = 120^\circ$ zijnde, is $\beta = 120 - C - a$. Stellende dus $120^\circ - C = \delta$, dan is $\beta = \delta - a$ én bij gevolg uit (5)

$$Sin.\ a = \frac{b}{a}\ Sin. (\delta - a) = \frac{b}{a}\ (Sin.\ \delta\ Cos.\ a - Sin.\ a\ Cos.\ \delta),$$

of deelende door $Cos.\ a$

$$Tang.\ a = \frac{b}{a}\ (Sin.\ \delta - Cos.\ \delta\ Tang.\ a),$$

waaruit

$$Tang.\ a = \frac{b\ Sin.\ \delta}{a + b\ Cos.\ \delta};$$

maar $Tang.\ a = \frac{Sin.\ a}{Cos.\ a} = \frac{Sin.\ a}{\sqrt{(1 - Sin^2.\ a)}}$, derhalve

$$\frac{Sin.\ a}{\sqrt{(1 - Sin^2.\ a)}} = \frac{b\ Sin.\ \delta}{a + b\ Cos.\ \delta},$$

en losfende dit op ten opzigte van $Sin.\ a$, komt er

$$Sin.\ a = \frac{b\ Sin.\ \delta}{\sqrt{(b^2 + 2ab\ Cos.\ \delta + a^2)}} \quad \dots\ (6)$$

Daar wij nu reeds vroeger vonden

$$a : d = Sin.\ 120^\circ : Sin.\ a,$$

zoo verkrijgen wij

$$d = a \times \frac{Sin.\ a}{Sin.\ 120^\circ} = \frac{a}{Sin.\ 120^\circ} \times \frac{b\ Sin.\ \delta}{\sqrt{(b^2 + 2ab\ Cos.\ \delta + a^2)}},$$

en wanneer wij nu in plaats van δ schrijven $120^\circ - C$, en verder $Sin.\ (120^\circ - C)$ ontwikkeld hebbende, onder en boven door $Sin.\ 120^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ deelen, verkrijgen wij

$$d = \frac{ab\ (Cos.\ C + \frac{1}{3}\sqrt{3}\ .\ Sin.\ C)}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab\ Cos.\ (120^\circ - C))}},$$

en op dezelfde wijze vinden wij

$$d' = \frac{ac\ (Cos.\ B + \frac{1}{3}\sqrt{3}\ .\ Sin.\ B)}{\sqrt{\{a^2 + c^2 + 2ac\ Cos.\ (120^\circ - B)\}}},$$

$$d'' = \frac{bc\ (Cos.\ A + \frac{1}{3}\sqrt{3}\ .\ Sin.\ A)}{\sqrt{\{b^2 + c^2 + 2bc\ Cos.\ (120^\circ - A)\}}}.$$

1°. Aanmerking. Wanneer een der hoeken A, B of C gelijk 120° wordt, dan wordt de overeenkomstige afstand gelijk o. Voor A = 120° heeft men, omdat *Cos.* 120° = − ½ en *Sin.* 120° = ½ √3 is;

$$d'' = \frac{bc\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sqrt{3} \times \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}{\sqrt{(b^2 + c^2 + 2bc)}} = \frac{0}{b+c} = 0,$$

dat is, het gezochte punt ligt dan in het hoekpunt A zelfs, zoodat er in dit geval geen punt binnen den driehoek bestaat, waarvan de som der afstanden tot de hoekpunten een minimum is.

Is de hoek A grooter dan 120°, dan wordt d'' negatief, dat is, het gezochte punt ligt dan buiten den driehoek en beantwoordt op eene onëigenlijke wijze aan het vraagstuk; want het is duidelijk, dat in den driehoek ABC *Fig.* 30, de som der zijden AC en BC kleiner dan AD + DB zijnde, AD + BD + CD geen minimum kan zijn; wanneer men echter DC als *negatief* beschouwt, voldoet het punt D aan het vraagstuk, want dan zal AD + BD − CD een minimum wezen.

De constructie door middel van de twee cirkel-segmenten toont dit alles duidelijk aan; want als men in *Fig.* 29, hoek ABC = 120° neemt, dan zal men, omdat EBA = FBC = 90° − 60° = 30° is, FBE = FBC + CBA + ABE = 30° + 120° + 30° = 180° zijn; dat is, FBE zal eene regte lijn wezen, en gevolgelijk zullen beide cirkels elkander niet snijden, maar raken in het punt B, dat is, het snijpunt valt alsdan in B.

Neemt men verder hoek ABC > 120°, dan wordt ∠ FBE > 180° en derhalve snijden de cirkel-segmenten DC en AD elkander niet meer, maar wel de segmenten DIC en DKA, welke nu in plaats van 120° eenen hoek van 60° bevatten.

2°. Aanmerking. Dit vraagstuk vindt zijne toepassing, wanneer men vraagt om den kortsten of min kostbaren weg, van eene plaats naar drie anderen, aan te leggen, of om het punt te vinden, waar men eenen mijnput zoude moeten aanleggen, om het spoedigst mijnen onder drie gegevene punten te brengen, enz.

3°. Aanmerking. Indien men in plaats van drie een grooter aantal punten gegeven had, en men even eens naar het punt vroeg, waarvan de som der afstanden tot al de gegevene punten een minimum was, zoo zou men de oplossing op de-

zelf-

zelfde wijze kunnen behandelen, als wij hier voor de drie punten gedaan hebben. Men vindt, door a, a_1, a_2, a_3 &c. voor de abscissen en b, b_1, b_2, b_3 &c. voor de ordinaten der gegevene punten aan te nemen, en x en y voor de coördinaten van het gevraagde punt te stellen, in plaats der vergelijkingen (1) en (2),

$$\frac{x-a}{\sqrt{\{(x-a)^2+(y-b)^2\}}}+\frac{x-a_1}{\sqrt{\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2\}}}+\frac{x-a_2}{\sqrt{\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2\}}}$$

$$+\frac{x-a_3}{\sqrt{\{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2\}}}+\&c.=0 \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

$$\frac{y-b}{\sqrt{\{(x-a)^2+(y-b)^2\}}}+\frac{y-b_1}{\sqrt{\{(x-a_1)^2+(y-b_1)^2\}}}+\frac{y-b_2}{\sqrt{\{(x-a_2)^2+(y-b_2)^2\}}}$$

$$+\frac{y-b_3}{\sqrt{\{(x-a_3)^2+(y-b_3)^2\}}}+\&c.=0 \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

welke vergelijkingen, offchoon genoegzaam zijnde om de onbekenden x en y te bepalen, evenwel, wanneer men de wortelgrootheden wilde doen verdwijnen, hoogere magts-vergelijkingen zouden voortbrengen, die niet dan bij benadering, en dan nog met zeer veel moeite, zouden kunnen worden opgelost. — Brengt men, tot vermijding hiervan, in plaats van x en y, de hoeken in rekening, welke de lijnen, die van het gezochte punt naar de gegevene punten gaan, met de as der abscissen raken, even zoo als wij dit voor het bijzonder geval van drie punten gedaan hebben, dan verkrijgt men, in plaats van de vergelijkingen (7) en (8), in het algemeen de volgende vergelijkingen

$$Cos.\ \phi + Cos.\ \phi_1 + Cos.\ \phi_2 + Cos.\ \phi_3 + \&c. = 0 \quad \ldots \quad (9)$$

$$Sin.\ \phi + Sin.\ \phi_1 + Sin.\ \phi_2 + Sin.\ \phi_3 + \&c. = 0 \quad \ldots \quad (10)$$

hangende het van den bijzonderen stand dezer lijnen af, welke termen in deze vergelijkingen het negatieve teeken moeten verkrijgen. — Geen der hoeken ϕ, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, &c. bekend zijnde, zoo kunnen de vergelijkingen (9) en (10) alleen niet toereiken om dezelve te bepalen; zij geven alleen twee voorwaarden aan, waaraan deze hoeken voldoen moeten, en offchoon dezelve in het bijzonder geval van drie punten genoegzaam waren om het gezochte punt te bepalen, is zulks in alle andere gevallen geenszins zoodanig gelegen.

 Voor

Voor vier punten zijn ondertusschen deze twee vergelijkingen nog toereikend, want voor de punten A, B, C en D, *Fig.* 31, zullen wij hebben

$$Sin\ \phi + Sin.\ \phi_1 + Sin.\ \phi_2 + Sin.\ \phi_3 = 0 \ldots (11)$$

$$Cos.\ \phi + Cos.\ \phi_1 + Cos.\ \phi_2 + Cos.\ \phi_3 = 0 \ldots (12)$$

of

$$Sin\ \phi + Sin.\ \phi_2 = -(Sin.\ \phi_1 + Sin.\ \phi_3)$$

$$Cos.\ \phi + Cos.\ \phi_2 = -(Cos.\ \phi_1 + Cos.\ \phi_3)$$

welke laatste vergelijkingen in het vierkant gebragt, en bij elkander geteld, na behoorlijke herleiding, geven

$$Sin.\phi\ .\ Sin.\phi_2 + Cos.\phi.Cos.\phi_2 = Sin\ \phi_1\ Sin.\phi_3 + Cos.\phi_1\ Cos.\ \phi_3$$

dat is $Cos.\ (\phi - \phi_2) = Cos.\ (\phi_1 - \phi_3)$

waaruit $\phi - \phi_2 = \phi_1 - \phi_3 \ldots (13)$.

De vergelijkingen (11) en (12), onder den vorm

$$Sin.\ \phi + Sin.\ \phi_3 = -(Sin.\ \phi_1 + Sin.\ \phi_2)$$

$$Cos.\ \phi + Cos.\ \phi_3 = -(Cos.\ \phi_1 + Cos.\ \phi_2)$$

gesteld, en op dezelfde wijze behandeld, geven ook $Cos.(\phi - \phi_3) = Cos.\ (\phi_1 - \phi_2)$, en bij gevolg

$$\phi - \phi_3 = \phi_1 - \phi_2$$

of

$$\phi + \phi_2 = \phi_1 + \phi_3 \ldots (14)$$

Nemende dan de halve som en het halve verschil der vergelijkingen (13) en (14), dan vinden wij $\phi = \phi_1$ en $\phi_2 = \phi_3$, en hieruit volgt, dat de lijn EB in het verlengde van AE en de lijn EC in het verlengde van DE zal vallen, waaruit dan blijkt, dat de figuur de gedaante van *Fig.* 32 zal aannemen, dat is, dat het gevraagde punt E gelegen zal zijn in de doorsnijding der diagonalen van den vierhoek ADBC.

Het is ook gemakkelijk uit den aard der zaak op te maken, dat dit punt E werkelijk zoodanig gelegen is, dat AE + BE + CE + DE een minimum is; want nemen wij eenig ander punt F, dat niet in de doorsnijding van de diagonalen gelegen is, dan is

$$AF + FB > AB \quad \text{en} \quad CF + FD > CD,$$

waaruit klaarblijkelijk volgt

$$AF + BF + CF + DF > AB + CD.$$

4e. Aanmerking. Voor vijf punten eveneens handelende, zoo verkrijgt men, uit de vergelijkingen

$$Cos.\ \phi + Cos.\ \phi_1 + Cos.\ \phi_2 + Cos.\ \phi_3 + Cos.\ \phi_4 = 0$$

en $Sin.\ \phi + Sin.\ \phi_1 + Sin.\ \phi_2 + Sin.\ \phi_3 + Sin.\ \phi_4 = 0$, de volgende

Cos.

$$Cos.(\phi - \phi_1) = \tfrac{1}{2} + Cos.(\phi_2 - \phi_3) + Cos.(\phi_3 - \phi_4) + Cos\,(\phi_2 - \phi_4),$$
$$Cos.(\phi - \phi_2) = \tfrac{1}{2} + Cos.(\phi_1 - \phi_3) + Cos.(\phi_1 - \phi_4) + Cos.(\phi_3 - \phi_4),$$
&c. &c.

waaruit echter niet gemakkelijk eene eigenſchap gevonden kan worden, welke de ligging van het gezochte punt doet kennen.

De hoeken ϕ, ϕ_1, ϕ_2, &c. hebben ondertusſchen zulk eene onderlinge betrekking, dat men dezelve alle kan bepalen, wanneer er ſlechts twee van dezelve bekend zijn; het is hieruit klaar, dat de vergelijkingen (7) en (8) ſlechts twee onbekenden bevatten, en dat het voorſtel dus niet meer dan de bepaling van twee onbekende grootheden vordert. Trekt men bovendien door twee der gegevene punten lijnen, welke met de as der abscisſen hoeken ϕ en ϕ_1 maken, dan bepalen dezelve, door hunne ſnijding, het gevraagde punt, en dus al de overige hoeken ϕ_2, ϕ_3, &c.

Om de betrekking tusſchen drie dezer hoeken naar welgevallen te vinden, merken wij op, dat uit de vergelijkingen

$$Cos.\phi = \frac{x - a}{\sqrt{\{(x-a)^2 + (y-b)^2\}}} \text{ en } Sin.\phi = \frac{y - b}{\sqrt{\{(x-a)^2 + (y-b)^2\}}},$$

terſtond volgt

$$Tang.\,\phi = \frac{y - b}{x - a};\ Tang.\,\phi_1 = \frac{y - b_1}{x - a_1},\ Tang.\,\phi_2 = \frac{y - b_2}{x - a_2}.$$

Lost men nu de twee eerſte op, ten opzigte van x en y, dan vindt men x en y uitgedrukt in ϕ en ϕ_1, en deze waarde van x en y in de derde overbrengende, vindt men, dat er tusſchen de hoeken ϕ, ϕ_1 en ϕ_2 de volgende betrekking beſtaat:

$$\left\{\begin{array}{l} Tang.\phi\, Tang.\phi_1\,(a_1 - a) + Tang.\phi\,(b_2 - b_1) \\ + Tang.\phi\, Tang\,\phi_2\,(a - a_2) + Tang.\phi_1\,(b - b_2) \\ + Tang.\phi_1\, Tang.\,\phi_2\,(a_2 - a_1) + Tang.\phi_2\,(b_1 - b) \end{array}\right\} = 0 \ldots (15)$$

Uit deze vergelijking laat zich elk der tangenten gemakkelijk afzonderen, wanneer de twee andere gegeven zijn; willen wij ϕ_2 berekenen, dan hebben wij

$$Tang.\phi_2 = -\frac{(a_1 - a)Tang.\phi\, Tang.\phi_1 + (b_2 - b_1)Tang.\phi + (b - b_2)T.\phi_1}{(a_2 - a_1)\,Tang.\,\phi_1 + (a - a_2)\,Tang.\,\phi + (b_1 - b)}$$

en wij zullen de Tangenten van ϕ_3, ϕ_4, &c. op dezelfde wijze in ϕ en ϕ_1 kunnen uitdrukken; het zal namelijk hiertoe genoegzaam zijn, in de formulen voor *Tang.* ϕ_2, a_2 en b_2 achtervolgens te doen veranderen in a_3 en b_3, a_4 en b_4, &c.

Zijn er dus n punten gegeven, dan zijn er ook n onbekende hoeken ϕ, ϕ_1, ϕ_2, &c. en men heeft dus, om dezelve te bepalen, vooreerst de algemeene vergelijkingen (9) en (10); en bovendien $n - 2$ vergelijkingen van den vorm (15), door welke $n - 2$ dezer hoeken in de twee overige worden uitgedrukt. Men heeft dus werkelijk n vergelijkingen met n onbekenden, en hieruit blijkt, dat langs dezen weg de oplossing, offchoon dan in sommige gevallen zeer langwijlig, altijd mogelijk zal zijn.

5e. Aanmerking. Wil men alleen ten naasten bij en op eene praktische wijze het gevraagde punt bepalen, zoo geven de vergelijkingen (9) en (10) hiertoe een gemakkelijk middel aan de hand. Men weet namelijk, uit de leer van het evenwigt der krachten, dat wanneer een onbepaald aantal krachten, welke wij door P, P′, P″, &c. zullen voorstellen, in een zelfde vlak op eenig punt werken; en men de hoeken, welke de rigtingen van deze krachten met eene onbepaalde lijn maken, ϕ, ϕ_1, ϕ_2, *enz.* noemt, voor het evenwigt dezer krachten de volgende vergelijkingen zullen moeten bestaan:

$$P\ Sin.\ \phi + P'\ Sin.\ \phi_1 + P''\ Sin.\ \phi_2 + \&c. = 0$$
$$P\ Cos.\ \phi + P'\ Cos.\ \phi_1 + P''\ Cos.\ \phi_2 + \&c. = 0.$$

Zijn nu al die krachten even groot, dan veranderen deze vergelijkingen in

$$Sin.\ \phi + Sin.\ \phi_1 + Sin.\ \phi_2 + \&c. = 0$$
$$Cos.\ \phi + Cos.\ \phi_1 + Cos.\ \phi_2 + \&c. = 0$$

welke juist de algemeene vergelijkingen (9) en (10) van ons voorstel zijn. Hieruit volgt dus, dat wanneer men zoo veel buigbare koorden, als er punten gegeven zijn, in éénen knoop vereenigt, de uiteinde dezer koorden met gelijke gewigten bezwaart, en dan elke dezer koorden over schijven, in de gegevene punten geplaatst, heen legt; zoodat al deze gewigten onbelemmerd kunnen werken, het punt, waarin de knoop, nadat alles in rust gekomen is, zich zal bevinden, het gevraagde punt aantoont.

Hieruit volgt dan ook bij omkeering, dat wanneer een willekeurig aantal gelijke krachten, op eenig punt werkende, in evenwigt is, en men in de rigtingen van elke dezer krachten een willekeurig punt aanneemt, de som der afstanden van al deze pun-

ten tot het punt van zamènkomst kleiner zal zijn, dan de som der afstanden van dezelfde punten tot eenig ander punt.

LVII. VOORSTEL.

Door J. R. Schmidt.

Men vraagt de vergelijking van de gewone kettinglijn, dat is:

$$y = \pm l \,.\, \textit{Nep. Log} \,.\, \frac{l + x \sqrt{(2\,lx + x^2)}}{l}$$

door punten te construeren.

Oplossing. *Door* J. R. Schmidt.

Laten XX′ en YY′ de assen der abscissen en ordinaten zijn, en laat, OA = 1 onderstellende, ZZ′ de kromme lijn zijn, waarvan de vergelijking, voor ieder punt Q, is PQ = *Nep. Log.* OP, of wel de Logarithmische kromme voor de bazis *e*. (*)

Laat verder OP = OW eene willekeurige lijn zijn, welke de waarde van de constante l voorstelt, dan is PQ = *Nep. Log.* l. Het punt Q alzoo bepaald hebbende, trekken wij door hetzelve de onbepaalde lijn BB′ evenwijdig met XX′.

Zij verder ON eene willekeurige waarde van x, dan moeten wij, voor deze waarde van x, de overeenkomstige waarde NM van y door constructie bepalen.

Daar ON = x en OP = l is, zoo is PN = $l + x$; beschrijft men dus, met PO als straal, uit P als middelpunt eenen cirkelboog, de as YY′ in R doorsnijdende, dan is ook PR = $l + x$, en bij gevolg

$$\text{OR} = \sqrt{\{(l + x)^2 - l^2\}} = \sqrt{(2\,lx + x^2)}.$$

Nemen wij verder OT = PN + OR of PT = ON + OR, dan is OT = $l + x + \sqrt{(2\,lx + x^2)}$, trekken wij dus TV even-

(*) Wij hebben, in de Oplossing van *Voorstel* CCV, *Deel* I, aangetoond hoe deze logarithmische lijn op eene gemakkelijke wijze, kan worden geconstrueerd.

evenwijdig met YY′, tot dat zij de logarithmische kromme in V doorsnijdt, dan is

$$UV = TV - TU = TV - PQ = Nep.\ Log.\ OT - Nep.\ Log.\ OP$$
$$= Nep.\ Log.\ \{l + x + \sqrt{(2\,lx + x^2)}\} - Nep.\ Log.\ l$$
$$= Nep.\ Log.\ \frac{l + x + \sqrt{(2\,lx + x^2)}}{l}.$$

Trekken wij dan AW, nemen wij OC = UV en trekken wij CD evenwijdig met AW, dan is

$$OA : OW = OC : OD,$$

of

$$OA : OW = UV : OD,$$

dat is, $1 : l = Nep.\ Log.\ \frac{l + x + \sqrt{(2\,lx + x^2)}}{l} : OD$

en $OD = l\ Nep.\ Log.\ \frac{l + x + \sqrt{(2\,lx + x^2)}}{l} = y,$

nemende dus NM = OD, dan zal M een punt van de kettinglijn zijn.

Trekken wij dit alles te zamen, dan komt de constructie der gewone kettinglijn, dat is der kettinglijn, waarin men elk punt van de ketting of van het touw beschouwt als met een gelijk gewigt bezwaard te zijn, hierop neder:

I°. *Voorbereidende constructie.* 1°. Trek de lijnen XX′ en YY′ loodregt door elkander, maak OA = 1 en construeer de lijn ZZ′, waarin overal PQ = *Nep. Log.* OP is.

2°. Maak OP = OW = *l*, trek PQ evenwijdig met YY′ en trek door Q de onbepaalde lijn BB′ evenwijdig met XX′.

3°. Vereenig de punten A en W door de lijn AW.

II°. *Constructie voor de bijzondere punten.* 1°. Laat ON een gegeven abscis *x* zijn.

2°. Beschrijf uit P, met PN als straal, een' cirkelboog, snijdende YY′ in R.

3°. Maak OT = PN + OR en trek TV evenwijdig aan YY′, snijdende BB′ in U.

4°. Maak OC = VU en trek CD evenwijdig met AW.

5°. Trek MM′ door het punt N′, en loodregt op XX′, en maak NM = NM′ = OD, dan zijn M en M′ punten van de kettinglijn.

GEVOLG. *Alle gewone kettinglijnen zijn gelijkvormige figuren.*

Om

Om dit te bewijzen, behoeven wij alleen aan te toonen, dat wanneer (de lijn ZZ' onveranderd blijvende) OP $= l$ en ON $= x$ in dezelfde reden aangroeijen of afnemen, ook NM in deze zelfde reden vermeerderen of verminderen zal; want dit plaats hebbende is het klaar, dat de figuur in alle gevallen nergens in zal verschillen, dan ten opzigte van de grootere of kleinere schaal, waarop dezelve geteekend is. Onderstellen wij nu, dat OP en ON in onze figuur n maal zoo groot genomen worden, doch dat de kromme lijn ZZ' en dus ook OA onveranderd blijft, dan wordt ook OT in dezelfde reden vergroot en dus mede n maal grooter; de lijnen PQ en TV zullen dus beide, als de logarithmen van OP en OT, met de logarithmus van n vermeerderd worden, waaruit dan volgt, dat hun verschil UV, en dus ook OC $=$ UV, even groot zal blijven. Daar dan OA en OC onveranderd zijn gebleven, terwijl OW $= l$ met n vermenigvuldigd is, zal ook OD of y, n maal zoo groot geworden zijn, en daar dit voor al de abscisfen en ordinaten doorgaat, zoo zal de kromme lijn met IOI′ gelijkvormig blijven, maar op eenen schaal geteekend zijn, welke n maal zoo groot is als die van de gegevene figuur.

1e. Aanmerking. Misschien zal men hiertegen inbrengen, dat wanneer aan twee punten A en B, *Fig* 34, gelegen in eene waterpasse lijn AB, een volmaakt buigbaar touw ACB wordt opgehangen, en men aan twee andere punten A′ en B′ een ander touw ophangt, waarvan de lengte niet tot A′B′ in reden is, als de lengte van het eerste touw tot AB, het onmogelijk is, dat de kromme lijnen ACB en A′C′B′ gelijkvormig zijn. Men moet ondertusschen niet uit het oog verliezen, dat beide deze kromme lijnen slechts stukken of gedeelten van kettinglijnen zijn; omdat uit de vergelijking blijkbaar is, dat de takken van de kettinglijn tot in het oneindige voortloopen. De figuren ACB en A′C′B′ zijn dus slechts ongelijkvormige segmenten van gelijkvormige kromme lijnen; en wanneer men $\angle$ DCA″ $= \angle$ D′C′A′ maakt en A″B″ evenwijdig met AB trekt, dan zal de figuur A″CB″ werkelijk met A′C′B′ gelijkvormig worden. Het is hiermede eveneens gelegen als met cirkels en met parabolen; zij zijn alle gelijkgevormig, offchoon men er ongelijkvormige segmenten van kan affnijden.

2e Aanmerking. Indien men dus eens en vooral eene naauwkeurige kettinglijn, door deze opgegevene constructie, of door de berekening van een genoegzaam aantal ordinaten, geteekend heeft, is het zeer gemakkelijk, om door middel van dezelve in alle voorkomende gevallen de benoodigde kettinglijn te construeren. Onderstel dat ACB, *Fig.* 34, deze naauwkeurig geteekende kettinglijn zij, en dat men eene kettinglijn moest teekenen, waarvan A′B′ de breedte en D′C′ de hoogte of diepte was, dan zou men, na A′C′ getrokken te hebben, alleen ∠ DCA″ = ∠ DCB″ = ∠ D′C′A′ behoeven te maken, en dan op A′B′ eene figuur moeten construeren, gelijkvormig met A″CB″, en deze zou dan de begeerde kettinglijn zijn.

3e. Aanmerking. Het moeijelijkste gedeelte van onze constructie bestaat in het zuiver teekenen van de logarithmische lijn, voor de bazis l; deze echter eens bij nadering geconstrueerd zijnde, kan men in weinig tijds een groot aantal punten der kettinglijn bepalen. Vergelijkt men deze handelwijze met den weg, welken EYTELWEIN in zijne *Statick fester Körper* inslaat, om eene kettinglijn van gegevene breedte en hoogte te construeren, dan komt het ons voor, dat, niettegenstaande zijne berekende hulptafels, onze voorgeslagene constructie verkieslijker is, daar dezelve, de kettinglijnééns geconstrueerd zijnde, het voorstel altijd terug brengt tot het construeren van eene figuur, welke met eene gegevene figuur gelijkvormig is.

LVIII. Voorstel.

Door I. R. Schmidt.

Men vraagt de betrekking der volstrekte gewigten A en A' van twee ligchamen te bepalen, waarvan de soortelijke gewigten G en G' zijn, in de onderstelling, dat deze ligchamen in evenwigt zijn, wanneer zij aan de armen van eene volmaakte balans zijn opgehangen in twee vloeistoffen, van welke de soortelijke zwaarten zijn g en g'?

Op-

Opgelost door I. R. Schmidt en R. Lobatto.

Oplossing van I. R. Schmidt.

Stellen wij de volumen of inhouden der ligchamen V en V' en het gewigt van eene cubieke eenheid waters γ, dan hebben wij, omdat het volstrekte gewigt gelijk is aan den inhoud, vermenigvuldigd met het product van het soortelijk gewigt en het gewigt van eene cubieke eenheid water,

$$A = V \times G \times \gamma \quad \text{en} \quad A' = V' \times G' \times \gamma \;..\;(1)$$

waaruit voor de volumen der twee ligchamen volgt;

$$V = \frac{A}{G \times \gamma} \quad \text{en} \quad V' = \frac{A'}{G' \times \gamma} \;.......\;(2)$$

en daar deze volumen tevens de volumen van de verplaatste vloeistoffen zijn, zoo zullen wij, de volstrekte gewigten van deze verplaatste vloeistoffen Q en Q' stellende, hebben

$$Q = V \times g \times \gamma \quad \text{en} \quad Q' = V' \times g' \times \gamma,$$

en brengende hierin de waarden van V en V' over

$$Q = A \times \frac{g}{G} \quad \text{en} \quad Q' = A' \times \frac{g'}{G} \;.......\;(3)$$

Om alles duidelijk te maken, hebben wij in Figuur 35 den geheelen toestel voorgesteld. De volumen V en V' hangen namelijk aan draden, waarvan wij het gewigt niet in aanmerking nemen, in de twee verschillende vloeistoffen, en deze draden zijn in de punten M en N aan eenen hefboom MSN vastgemaakt, waarvan de armen MS en SN volkomen gelijk zijn.

Daar nu eenig ligchaam in eene vloeistof gedompeld zoo veel van zijn gewigt verliest, als het gewigt van de verplaatste volume der vloeistof bedraagt, zoo zou er in N, om met V in de vloeistof gedompeld evenwigt te maken, in de ledige ruimte een gewigt P moeten hangen gelijk aan A — Q, en in M, om met de volume V' in de vloeistof gedompeld evenwigt te maken, een gewigt P' = A' — Q'; worden dus in M en N, in de ledige ruimte, gewigten

$$P = A - Q = A\left(1 - \frac{g}{G}\right) \quad \text{en} \quad P' = A' - Q' = A'\left(1 - \frac{g'}{G'}\right) \;.\;(4)$$

opgehangen, dan zal het eerste met V en het tweede met V'

even-

evenwigt maken; maar omdat, volgens de onderstelling, V en V′ in de verschillende vloeistoffen gedompeld, evenwigt maken, zoo zullen de gewigten P en P′ aan den gelijkarmigen hefboom MN mede evenwigt moeten maken, en wij hebben dus P = P′, of

$$A\left(1 - \frac{g}{G}\right) = A'\left(1 - \frac{g'}{G'}\right) \ldots\ldots (5)$$

waaruit terstond volgt

$$\frac{A}{A'} = \frac{1 - g' : G'}{1 - g : G} = \frac{G}{G'} \times \frac{G' - g'}{G - g} \ldots\ldots (6)$$

1°. Aanmerking. Zijn de ligchamen beide van dezelfde stof en dus G = G′, dan vindt men

$$\frac{A}{A'} = \frac{G - g'}{G - g} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

en losfen wij deze vergelijking ten opzigte van G op, dan vinden wij

$$G = \frac{Ag - A'g'}{A - A'} \ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

2°. Aanmerking. Worden de ligchamen in dezelfde vloeistof gedompeld, en is dus $g = g'$, dan verandert de vergelijking (6) in

$$\frac{A}{A'} = \frac{G}{G'} \times \frac{G' - g}{G - g} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

en losfen wij deze vergelijking ten opzigte van g op, dan vinden wij

$$g = GG' \times \frac{A' - A}{A'G - AG'} \ldots\ldots\ldots (10)$$

3°. Aanmerking. Uit de vergelijking (9) blijkt, dat wanneer twee ligchamen van verschillende stof, bij voorbeeld, een stuk koper en een stuk ijzer, in eene zelfde vloeistof, bij voorbeeld, zoo als dagelijks plaats heeft, in de lucht gewogen wordende, met elkander evenwigt maken, deze ligchamen daarom niet evenveel wegen; want deze formule toont ten duidelijkste aan, dat A niet gelijk A′ kan worden, ten zij $g = 0$ is, in welk geval de ligchamen in het luchtledige zouden zijn. Offchoon het dus onverschillig moge schijnen, uit welke stof de gewigten, waarvan men zich in het dagelijksche leven bedient, zijn zamengesteld, zoo blijkt hieruit ondertusschen, dat bij proeven, waarin het op zeer groote naauwkeurigheid aankomt, de stof, waaruit de gewigten bestaan, zoo geheel on-

onverschillig niet is, en dat twee gelijke gewigten, bij voorbeeld twee ponden, het eerste van koper en het tweede van ijzer, volmaakt evenwigt met elkander makende, alleen dán evenwigt zullen blijven maken, wanneer de digtheid der lucht niet verandert.

4°. Aanmerking. Men kan uit de gevondene vergelijkingen nog vele andere afleiden; wij zullen ons hier niet mede ophouden, daar zulks gemakkelijk genoeg is; alleen merken wij aan, dat elke dezer vergelijkingen de oplossing van een verschillend problema in zich bevat: zoo lost de vergelijking (8), welke onder deze gedaante geschreven kan worden,

$$G = \frac{\frac{A}{A'}g - g'}{\frac{A}{A'} - 1} = \frac{\frac{V}{V'}g - g'}{\frac{V}{V'} - 1} = \frac{Vg - V'g'}{V - V'},$$

het volgende vraagstuk op: *wanneer twee verschillende massa's van dezelfde stof, in twee verschillende vloeistoffen opgehangen, met elkander aan eene volmaakte balans, buiten die vloeistoffen geplaatst, evenwigt maken, en de twee verschillende volumen benevens de soortelijke gewigten der vloeistoffen bekend zijn, vraagt men hierdoor het soortelijk gewigt van de ingedompelde massa's te bepalen.*

LIX. Voorstel.

Door I. R. Schmidt.

Het moment van traagheid te vinden, voor eenen massiven ring, dat is, voor een ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van eenen cirkel om eene regte lijn, buiten dien cirkel, doch met denzelve in hetzelfde vlak gelegen; in de onderstelling, dat deze omwentelings-as te gelijker tijd de as voor de momenten van traagheid is?

Oplossing. Door I. R. Schmidt.

Wij nemen als bekend aan, dat men door het moment van traagheid, van eenige kracht P, ten opzigte van eenige omwentelings-as XY, *Fig.* 36, niets anders verstaat, dan het product van

de.

deze kracht P met het vierkant van den afstand p, welken het punt, waarin deze kracht P werkt, van de omwentelings-as XY heeft; en dat door het moment van traagheid van een zamenstel van krachten P, Q en R, ten opzigte van de omwentelings-as XY, de som der momenten van traagheid der bijzondere krachten verstaan wordt. Zoo zou het moment van traagheid den krachten P, Q en R, *Fig.* 36, zijn $P \times p^2 + Q \times q^2 + R \times r^2$.

Door het moment van traagheid van eenig ligchaam, ten opzigte van eenige as van omwenteling, verstaan wij alzoo de som der momenten van traagheid van al de bijzondere punten des ligchaams, in de onderstelling, dat al deze punten door gelijke krachten worden aangedaan.

Dit aangemerkt hebbende, gaan wij tot de oplossing van ons vraagstuk over; doch alvorens hetzelve op te lossen, zullen wij moeten aanwijzen, hoe het moment van traagheid voor eenen cilinder en uitgeholden cilinder gevonden wordt.

Zij ABCD, *Fig.* 37, een cilinder, welke om de as XY omwentelt, en A′B′C′D′ een andere, welke dezelfde as heeft en waarvan al de punten des oppervlaks op eenen afstand x van de omwentelings-as staan. Indien wij dan de kracht, welke in ieder punt des ligchaams wordt gehouden te werken, voor de eenheid der kracht aannemen, is het moment van traagheid voor elk punt van dit oppervlak gelijk x^2; en daar dit geheele oppervlak, de as MN van den cilinder gelijk p stellende, $2\pi x \times p$ is, zoo zal het moment van traagheid voor dit geheele oppervlak gelijk zijn aan $2\pi x \times p \times x^2$ of $2\pi p x^3$. Nemen wij nu de ruimte besloten tusschen twee zulke oppervlakken, welke op eenen afstand δx van elkander geplaatst zijn, als de differentiaal van den cilinder aan, dan is het moment van traagheid voor deze differentiaal, dat is, de differentiaal van het moment van traagheid des geheelen ligchaams, gelijk aan $2\pi p x^3 \delta x$, en wij vinden dus, door dit te integreren, voor het geheele moment van traagheid $\frac{1}{2}\pi p x^4 + C$.

Willen wij nu het moment van traagheid voor eenen uitgeholden cilinder berekenen, waarvan de stralen MA′ en MA gelijk b en a gegeven zijn, dan moet deze integraal tusschen de limieten $x = b$ en $x = a$ genomen worden, dit geeft ons $C = -\frac{1}{2}\pi p b^4$, en het moment van traagheid, voor eenen

uit-

uitgeholden cilinder, waarvan de stralen der buitenste en binnenste oppervlakten a en b zijn, en de as gelijk p is, wordt dus uitgedrukt door $\frac{1}{2}\pi p(a^4 - b^4)$. — Voor den geheelen cilinder is $b = 0$, en dus het moment van traagheid $\frac{1}{2}\pi p a^4$.

Laat nu BRCS, *Fig.* 38, de cirkel zijn, welke door de omwenteling om de as XY het ringvormige ligchaam beschrijft; stellen wij den afstand van het middelpunt M des cirkels tot deze as MN $= a$, den straal des cirkels MB $= r$, en laten wij, op eenen afstand BQ $= x$ en Q$q = \partial x$, lijnen RSP en rsp loodregt door de as XY gaan, dan beschrijft de figuur rsSR, gedurende de omwenteling om de as XY, de differentiaal van het ringvormig ligchaam; deze differentiaal kan nu worden beschouwd als een uitgeholde cilinder, waarin PR en PS de stralen van het buitenste en binnenste oppervlak zijn, en waarvan Pp = Qq $= \partial x$ de as is. Het moment van traagheid van dezen uitgeholden cilinder, dat is, de differentiaal van het moment van traagheid des gegevenen ligchaams, is dus gelijk aan

$$\tfrac{1}{2}\pi(\mathrm{PR}^4 - \mathrm{PS}^4) \times \partial x$$

Stellende dus QR $=$ QS $= y$ en drukkende het gevraagde moment van traagheid door X uit, zullen wij, omdat alsdan PR $= a + y$ en PS $= a - y$ is, hebben

$$\partial \mathrm{X} = \tfrac{1}{2}\pi\left\{(a+y)^4 - (a-y)^4\right\} \times \partial x$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi\left\{(a+y)^2 - (a-y)^2\right\} \times \left\{(a+y)^2 + (a-y)^2\right\}\partial x$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi \times 4ay \times 2\,(a^2 + y^2) \cdot \partial x$$

$$= 4\pi\, ay\,(a^2 + y^2)\,\partial x\,.$$

Nu is uit de eigenschap van den cirkel $y^2 = 2rx - x^2$ en $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$, waaruit dan volgt

$$\partial \mathrm{X} = 4\pi a\,(a^2 + 2rx - x^2)\sqrt{(2rx - x^2)} \cdot \partial x,$$

het gevraagde moment van traagheid is bij gevolg

$$\mathrm{X} = 4\pi a \int (a^2 + 2rx - x^2)\,\partial x \,.\, \sqrt{(2rx - x^2)},$$

en wij zullen dus de aangewezene integratie nog moeten verrigten.

Vooreerst is het klaar, dat X geschreven kan worden onder dezen vorm

$$\mathrm{X} = 4\pi a\left\{a^2\int \partial x \,.\, (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} + \int \partial x \,.\, (2rx - x^2)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$= 4\pi a^3 \int \partial x \,.\, (2rx - x^2)^{\frac{1}{2}} + 4\pi a \int \partial x \,.\, (2rx - x^2)^{\frac{3}{2}}$$

Stel-

Stellende nu $x = r - z$, dan is $\partial x = -\partial z$ en $2rx - x^2 = r^2 - z^2$, en hierdoor gaat X over in

$$X = -4a^3\pi \int (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \partial z - 4a\pi \int (r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \partial z$$

Vergelijken wij nu de formulen $\int (r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \partial z$ met de bekende formule $\int u \partial v = uv - v \partial u$, welke uit $\partial . uv = u \partial v + v \partial u$ voortkomt, dan verkrijgen wij

$$\int (r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \partial z = z(r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - \int z \times \partial . (r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$= z(r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{2} \int z (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \times -2z\partial z$$

$$= z(r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - 3 \int - z^2 (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \partial z$$

$$= z(r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - 3 \int (-r^2 + r^2 - z^2)(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \partial z$$

$$= z(r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} + 3r^2 \int (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \partial z - 3 \int (r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} \partial z$$

of $\quad 4 \int \partial z (r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} = z(r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} + 3r^2 \int (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \partial z$

dus $\quad \int \partial z (r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{4} z (r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4} r^2 \int (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \partial z$,

en hierdoor verandert X in

$$X = -a\pi z (r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - a\pi (4a^2 + 3r^2) \int \partial z (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

De formule $\int \partial z (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ andermaal vergelijkende met $\int u \partial v = uv - \int v \partial u$, verkrijgen wij

$$\int \partial z (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} = z(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} - \int z . \partial (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= z(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} \int z (r^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} \times -2z\partial z$$

$$= z(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} - \int - z^2 (r^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} \partial z$$

$$= z(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} - \int (-r^2 + r^2 - z^2)(r^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} \partial z$$

$$= z(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} + r^2 \int (r^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} \partial z - \int (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} \partial z$$

of $\quad 2 \int \partial z (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} = z(r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} + r^2 \int (r^2 - z^2)^{-\frac{1}{2}} \partial z$

dus $\quad \int \partial z (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} z (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} r^2 \int \frac{\partial z}{\sqrt{(r^2 - z^2)}}$

waardoor wij dan verkrijgen

$$X = -a\pi z (r^2 - z^2)^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{2} a\pi (4a^2 + 3r^2) z (r^2 - z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$- \tfrac{1}{2} a\pi r^2 (4a^2 + 3r^2) \text{ Boog Sin. } \frac{z}{r}$$

daar nu $z = r - x$ en $r^2 - z^2 = 2rx - x^2$ is, zoo verandert deze uitdrukking in

$$X = -\tfrac{1}{2} a\pi \{ 2(r - x)(2rx - x^2)^{\frac{3}{2}} + (4a^2 + 3r^2)(r - x)(2rx - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\ldots\ldots + (4a^2 + 3r^2) r^2 \text{ Boog Sin. } \frac{r - x}{r} \}$$

het

hetgeen na behoorlijke herleiding overgaat in

$$X = -\tfrac{1}{2}a\pi\Big\{(4a^2+3r^2+4rx-2x^2)(r-x)\sqrt{(2rx-x^2)}$$
$$\ldots + (4a^2+3r^2)\times r^2\ \textit{Boog-Sin.}\ \frac{r-x}{r}\Big\} + C.$$

Door middel van deze formule heeft men nu niet alleen het moment van traagheid des geheelen ringvormigen ligchaams bekend, maar ook dat van elk ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van het vlak, begrepen tusschen twee willekeurige koorden HI en HI′, om de as XY; want BK $= m$ en BK′ $= n$ stellende, behoeft de integraal alleen zoodanig bepaald te worden, dat zij voor $x = m$ verdwijnt, waarna men in de formule $x = n$ zal moeten stellen.

Voor het geheele ringvormige ligchaam moet de integraal tusschen de limieten $x = 0$ en $x = 2r$ genomen worden; dit geeft vooreerst

$$C = \tfrac{1}{4}ar^2\pi^2(4a^2+3r^2),$$

waardoor de waarde van X overgaat in

$$X = \tfrac{1}{2}a\pi\Big\{r^2(4a^2+3r^2)\ \textit{Boog. Cos.}\ \frac{r-x}{r} - \ldots$$
$$(4a^2+3r^2+4rx-2x^2)(r-x)\sqrt{(2rx-x^2)}\Big\}\ (\alpha)$$

en stellende hierin $x = 2r$, dan komt er voor het moment van traagheid van het geheele ligchaam

$$X = \tfrac{1}{2}a\pi^2r^2(4a^2+3r^2);\ \ldots\ (\beta)$$

nemen wij verder in aanmerking, dat de inhoud van het ringvormig ligchaam I $= 2ar^2\pi^2$ is, dan kunnen wij onze formule ook aldus schrijven:

$$X = \tfrac{1}{4}(4a^2+3r^2)\times I.\ \ldots\ (\gamma)$$

Gevolg. Is $a = r$, dat is, raakt de cirkel de as, dan vinden wij voor het moment van traagheid:

$$X = \tfrac{1}{2}\pi^2r^3\times 7r^2 = \tfrac{7}{2}\pi^2r^5 = \tfrac{7}{4}r^2\times I.$$

1°. Aanmerking. Wordt in de formule (α) $x = r$ genomen, dan verkrijgen wij het moment van traagheid voor het halve ligchaam, door den halven cirkel LBO voortgebragt. Daar nu de twee helften, door de halve cirkels LBO en LCO voortgebragt, ten opzigte van de omwentelingsas, op dezelfde wijze gelegen zijn, moet het moment van traagheid van elk dezer helften de helft van het moment van traagheid des geheelen ligchaams zijn.

De formule (α) bevestigt dit volkomen; want stellende in dezelve $x = r$, dan vinden wij $X = \frac{1}{4} a \pi^2 r^2 (4a^2 + 3r^2)$ en dus juist de helft van de formule (β).

2°. Aanmerking. De twee ligchamen, door de halve cirkels BLC en BOC, *Fig.* 39, voortgebragt, zijn ten opzigte van de omwentelings-as op geheel verschillende wijze gelegen; derzelver inhouden zijn ongelijk, en het is dus klaar, dat hun moment van traagheid mede zal verschillen. Om de momenten van traagheid dezer ligchamen, en in het algemeen, van het ligchaam, geboren door de omwenteling van eenig stuk, besloten tusschen twee koorden HH′ en II′, welke met de as evenwijdig loopen, te berekenen, moeten wij de oplossing van ons voorstel van eenen anderen kant aanvatten, en de differentiaal van het ligchaam aanmerken als voortgebragt door de omwenteling van het vlak RQqr, begrepen tusschen de oneindig digt bij elkander gelegene koorden, die evenwijdig met de as loopen.

Stellen wij dan, a en r hetzelfde als in de eerste oplossing blijvende, $OP = x$ en $PR = PQ = y$, dan is $RQ = 2y = 2\sqrt{(2rx - x^2)}$ en het moment van RQ is dus gelijk aan $NP^2 \times RQ$, of

$$= 2(a - r + x)^2 \sqrt{(2rx - x^2)}.$$

Hieruit volgt voor het moment van het oppervlak door RQ beschreven

$$4\pi (a - r + x)^3 \sqrt{(2rx - x^2)},$$

en bijgevolg voor de differentiaal van het gevraagde moment van traagheid:

$$\partial X' = 4\pi (a - r + x)^3 \partial x \sqrt{(2rx - x^2)}$$

of $$X' = 4\pi \int (a - r + x)^3 \partial x \sqrt{(2rx - x^2)}.$$

Om dit te integreren stellen wij vooreerst $x = r - z$, en dan verkrijgen wij:

$$X' = -4\pi \int (a - z)^3 \partial z \sqrt{(r^2 - z^2)}$$
$$= -4\pi \int (a^3 - 3a^2 z + 3az^2 - z^3) \partial z \sqrt{(r^2 - z^2)}$$
$$= -4\pi r \int (a^3 - 3a^2 z + 3az^2 - z^3) \partial z \sqrt{\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)};$$

stellende verder $\frac{z}{r} = u$ of $z = ru$, dan gaat X' over in

$$X' = -4\pi r^2 \int (a^3 - 3a^2 ru + 3ar^2 u^2 - r^3 u^3) \partial u \sqrt{(1 - u^2)}$$
$$= -4\pi r^2 a^3 \int \partial u \sqrt{(1 - u^2)} + 12\pi r^3 a^2 \int u \partial u \sqrt{(1 - u^2)}$$
$$- 12\pi r^4 a \int u^2 \partial u \sqrt{(1 - u^2)} + 4\pi r^5 \int u^3 \partial u \sqrt{(1 - u^2)}.$$

Nu

Nu vindt men, op eene gelijksoortige wijze als in de eerste oplossing te werk gaande:

$$\int \partial u \sqrt{(1-u^2)} = \tfrac{1}{2} u \sqrt{(1-u^2)} + \tfrac{1}{2}\,\text{Boog Sin. } u\,;$$
$$\int u\partial u \sqrt{(1-u^2)} = -\tfrac{1}{3}(1-u^2)\sqrt{(1-u^2)},$$
$$\int u^2\partial u \sqrt{(1-u^2)} = \tfrac{1}{4}(u^3-\tfrac{1}{2}u)\sqrt{(1-u^2)} + \tfrac{1}{8}\,\text{Boog Sin. } u\,;$$
$$\int u^3\partial u \sqrt{(1-u^2)} = (\tfrac{1}{5}u^4 - \tfrac{1}{15}u^2 - \tfrac{2}{15})\sqrt{(1-u^2)}\,;$$

en deze waarden substituerende, komt er

$$\begin{aligned} X' = & -2\pi a^3 r^2 u\sqrt{(1-u^2)} \ldots\ldots - 2\pi a^3 r^2\,\text{Boog Sin. } u \\ & -4\pi a^2 r^3 (1-u^2)\sqrt{(1-u^2)} \\ & -3\pi a r^4 (u^3-\tfrac{1}{2}u)\sqrt{(1-u^2)} \ldots - \tfrac{3}{8}\pi a r^4\,\text{Boog Sin. } u \\ & + 4\pi r^5 (\tfrac{1}{5}u^4 - \tfrac{1}{15}u^2 - \tfrac{2}{15})\sqrt{(1-u^2)}\,; \end{aligned}$$

hetgeen na behoorlijke herleiding overgaat in

$$\begin{aligned} X' = & \tfrac{1}{30}\pi r^2 \{24 r^3 u^4 - 90 a r^2 u^3 + 8r(15a^2 - r^2)u^2 + \ldots \\ & \ldots 15a(3r^2 - 4a^2)u - 8r(2r^2 + 15a^2)\} \sqrt{(1-u^2)} - \ldots \\ & \ldots \tfrac{1}{2}\pi a r^2 (4a^2 + 3r^2)\,\text{Boog Sin. } u, \end{aligned}$$

en substituerende hierin de waarde van u, dat is, $u = \frac{z}{r} = \frac{r-x}{r}$, dan komt er eindelijk

$$\begin{aligned} X' = & \tfrac{1}{30}\pi \{24x^4 + 6(15a - 16r)x^3 + 2(68r^2 - 135ar + \ldots \\ & 60a^2)x^2 - 5(16r^3 - 45ar^2 + 48a^2 r - 12a^3)x - \ldots \\ & 15ar(4a^2 + 3r^2)\} \sqrt{(2rx - x^2)} - \ldots \\ & \tfrac{1}{2}\pi a r^2 (4a^2 + 3r^2)\,\text{Boog Sin. } \frac{r-x}{r} + C. \end{aligned}$$

Bepalende deze integraal zoodanig, dat zij voor $x = 0$ verdwijnt, dan vinden wij

$$C = \tfrac{1}{4}\pi^2 a r^2 (4a^2 + 3r^2)$$

en dan wordt voor $x = 2r$, de waarde van X' volkomen dezelfde als die, welke wij in (β) gevonden hebben.

Door $x = r$ te stellen, vinden wij voor het moment van het ligchaam, door den halven cirkel BOC voortgebragt

$$X' = r^2\pi \{\tfrac{1}{4}a\pi(4a^2 + 3r^2) - \tfrac{8}{15}r(2r^2 + 15a^2)\},$$

en trekkende dit van het moment des geheelen ligchaams af, dan blijft, er voor het moment van traagheid des ligchaams, door den halven cirkel BLC voortgebragt,

$$X' = r^2\pi \{\tfrac{1}{4}a\pi(4a^2 + 3r^2) + \tfrac{8}{15}r(2r^2 + 15a^2)\}.$$

LX. VOORSTEL.

Door I. P. DELPRAT.

Een klomp van zekere stof, welke eene volume of uitgebreidheid van K cubieke eenheden bevat, wordt in de lucht door een tegenwigt van P ponden opgehouden, zijnde de soortelijke zwaarte van de stof, waaruit dit tegenwigt bestaat, tot die van den klomp K als a tot 1. Wordt deze klomp K in het water gedompeld, dan wordt hij, wanneer het tegenwigt in de lucht hangt, door p ponden, van dezelfde stof als die van het eerste tegenwigt, opgehouden. Wanneer nu de soortelijke zwaarte van het water tot die van de lucht in reden is als 1 : δ, dan vraagt men hierdoor te bepalen, hoeveel eene hoeveelheid water, welke K cubieke eenheden bevat, in het luchtledige zal wegen.

OPGELOST *door* I. P. DELPRAT, I. R. SCHMIDT, W. TOP WZ. en R. LOBATTO.

OPLOSSING *van* I. P. DELPRAT.

Wij verstaan hierdoor een waar pond, de drukking in het luchtledige, veroorzaakt door de eenheid van het gewigt van dezelfde stof, waarvan men zich tot de opgegevene proef heeft bediend; en de vraag is alzoo, om te bepalen, hoeveel van zulke ponden men in de luchtledige ruimte aan eene volmaakte balans zou moeten hangen, om evenwigt te maken met de hoeveelheid water, door het ligchaam K verplaatst.

Het is duidelijk, dat het gezochte gewigt gevonden zal zijn; als men vinden kan het gewigt P′ van den klomp K in het luchtledige, en het gewigt p′, dat in het luchtledige tegenwigt maakt met K in het water gedompeld; want dan zal het gezochte gewigt zijn $P' - p' = v'$.

Stellen wij nu den inhoud of de volume van den klomp K gelijk Q, dan zal de inhoud van het tegenwigt P′, dat in het luchtledige met den klomp K evenwigt maakt, gelijk zijn aan $\frac{Q}{a}$, omdat de

de ſoortelijke gewigten dezer ſtoffen in reden zijn als 1 : a; de inhoud van het gewigt P zal derhalve worden uitgedrukt door $\frac{PQ}{P'a}$.

Daar verder Q de inhoud van den klomp K en v' het ware gewigt van het water is, dat door den klomp K wordt verplaatst, zoo zullen wij, het ware gewigt van eene cubieke eenheid water gelijk g ſtellende, hebben $v' = Qg$ of $Q = \frac{v'}{g}$; hieruit volgt dus, dat de inhoud van het gewigt P′ gelijk $\frac{v'}{ga}$ en de inhoud van het gewigt $P = \frac{Pv'}{P'ga}$ is.

Het gewigt der lucht, door K verplaatst, is dus $Q \times g \times \delta$ of $v'\delta$ en het gewigt der lucht, door P verplaatst, $P \times \frac{v'}{P'ga} \times g \times \delta$ of $\frac{P}{P'} \times \frac{v'\delta}{a}$, en men zal dus voor het evenwigt in het luchtledige hebben

$$P' - v'\delta = P - \frac{P}{P'} \times \frac{\delta}{a} \times v' \quad \ldots \; (1)$$

Het gewigt der lucht door p verplaatst, wordt, omdat p en P van dezelfde ſtof zijn, gevonden door de evenredigheid $P : p = \frac{P}{P'} \times \frac{\delta}{a} \times v' : x$; dit gewigt is dus $\frac{p}{P'} \times \frac{\delta}{a} \times v'$, en men zal dus ook hebben

$$p' = p - \frac{p}{P'} \times \frac{\delta}{a} v' \quad \ldots \; (2)$$

De vergelijking (2) van (1) aftrekkende, houdt men over, omdat $P' - p' = v'$ is,

$$v'(1 - \delta) = P - p + v'\left(\frac{\delta}{a} \times \frac{p}{P'} - \frac{\delta}{a} \times \frac{P}{P'}\right)$$

$$= P - p + v' \times \frac{\delta}{a} \times \frac{p - P}{P'},$$

of

$$v'(1 - \delta) = (P - p)\left(1 - \frac{v'}{P'} \times \frac{\delta}{a}\right) \quad \ldots \; (3)$$

Vermenigvuldigende de vergelijking (1) met p en de vergelijking (2) met P, dan komt er

$$P'p - pv'\delta = Pp - p \,.\, \frac{P}{P'} \times \frac{\delta}{a} \,.\, v'$$

en $$p'P = Pp - p \,.\, \frac{P}{P'} \times \frac{\delta}{a} \,.\, v'$$

en het verschil dezer vergelijkingen geeft ons

$$P'p - pv'\delta - p'P = 0,$$

of voor p' de waarde $P' - v'$ in de plaats schrijvende

$$P'p - pv'\delta - P'P + Pv' = 0,$$

en zonderende hieruit de waarde van P' af

$$P' = \frac{P - p\delta}{P - p} \times v',$$

en brengende deze waarde over in de vergelijking (3)

$$v'(1 - \delta) = (P - p) \times \left(1 - \frac{\delta}{a} \times \frac{P - p}{P - p\delta}\right),$$

waaruit dan eindelijk gevonden wordt

$$v' = \frac{P - p}{1 - \delta} \times \left(1 - \frac{\delta}{a} \times \frac{P - p}{P - p\delta}\right) \quad . \quad . \quad (4).$$

ANDERE OPLOSSING. *Door* I. R. SCHMIDT.

Wij verstaan het voorstel zoodanig, dat het aantal ponden of eenheden van gewigt, uit dezelfde stof zamengesteld als die, waarvan men zich bij de proeven tot tegengewigt bediend heeft, gevonden moet worden, dat in het luchtledige aan eene volmaakte balans zal moeten worden gehangen, om met het gewigt van de hoeveelheid waters, door den klomp K verplaatst, en in het luchtledige aan den anderen arm van deze balans aangebragt, evenwigt te maken. . . .

Stel het ligchaam K wege in de ledige ruimte P' zulke ponden, en dat zelfde ligchaam K, in het water gedompeld, worde in het luchtledige door p' zulke ponden opgehouden, dan zal $v' = P' - p'$ het gevraagde gewigt zijn.

Stellen wij de soortelijke zwaarte van de stof K tot die van het water als $a : 1$ en die van de tegenwigten als $\beta : 1$, dan is vooreerst door de opgaaf

$$\beta = a \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

De klomp K, welke in het luchtledige door P' ponden in evenwigt zou worden gehouden, heeft eene soortelijke zwaarte a. In

dien

dien, wij dus het gewigt van eene cubieke eenheid waters, in het luchtledige gewogen, g ponden stellen, dan is de volume van het ligchaam K gelijk $\frac{P'}{g\alpha}$; deze volume verplaatst eene volume lucht van gelijke grootte, en deze volume lucht weegt alzoo $\frac{P'\delta}{\alpha}$ ponden. De klomp K in de lucht gedompeld, zal dus door een tegenwigt in het luchtledige worden opgehouden, dat een aantal ponden weegt, uitgedrukt door $P' - P' \times \frac{\delta}{\alpha}$ of $P' \times \frac{\alpha - \delta}{\alpha}$.

Het tegenwigt, dat uit P ware ponden bestaat, heeft eene soortelijke zwaarte β; zijne volume is dus $\frac{P}{\beta g}$, en de volume lucht, door dit tegenwigt verplaatst, weegt alzoo $\frac{P\delta}{\beta}$ ponden; dit tegenwigt in de lucht gedompeld, wordt dus in het luchtledige opgehouden door een gewigt, wegende $P - \frac{P\delta}{\beta}$ of $P \times \frac{\beta - \delta}{\beta}$ ponden.

Daar nu de klomp K met het tegenwigt P, beide in de lucht gedompeld, evenwigt maken, moeten ook de gewigten, welke in het luchtledige deze klompen opwegen, te zamen evenwigt maken, en dit geeft ons de vergelijking:

$$P' \times \frac{\alpha - \delta}{\alpha} = P \times \frac{\beta - \delta}{\beta} \quad . \; . \; . \; (2).$$

Dompelen wij nu den klomp K in het water, en hangen het tegenwigt p' in het luchtledige, dan weegt de verplaatste watervolume, welke door $\frac{P'}{g\alpha}$ wordt uitgedrukt, een aantal $\frac{P'}{g\alpha} \times g$ of $\frac{P'}{\alpha}$ ponden, en wij hebben dus $p' = P' - \frac{P'}{\alpha}$, waaruit, omdat $P' - p' = \nu'$ is,

$$\nu' = \frac{P'}{\alpha} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

Eindelijk heeft het ware gewigt p, dat, in de lucht gedompeld, met het ware gewigt P' van den klomp K, in het water gedompeld, evenwigt maakt, eene soortelijke zwaarte β; zijne

volume is dus $\frac{p}{\beta g}$ en dezelfde volume lucht weegt alzoo $\frac{p\delta}{\beta}$ ponden; het zal bijgevolg in het luchtledige worden opgehouden door een gewigt van $p - \frac{p\delta}{\beta}$, dat is van $p \times \frac{\beta - \delta}{\beta}$ ponden. Dit gewigt moet dan nu ook klaarblijkelijk evenwigt maken met, of gelijk zijn aan het gewigt p', of $P' \times \frac{\alpha - 1}{\alpha}$, dat, in het luchtledige, de klomp K, in het water gedompeld, opweegt; en dit geeft ons de vergelijking:

$$P' \times \frac{\alpha - 1}{\alpha} = p \times \frac{\beta - \delta}{\beta} \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Wij hebben dus, tot de oplossing van ons vraagstuk, deze vier vergelijkingen:

$$\beta = a\alpha \ . \ . \ . \ (1), \quad P' \times \frac{\alpha - \delta}{\alpha} = P \times \frac{\beta - \delta}{\beta} \ . \ . \ (2)$$

$$\nu' = \frac{P'}{\alpha} \ . \ . \ . \ (3), \quad P' \times \frac{\alpha - 1}{\alpha} = p \times \frac{\beta - \delta}{\beta} \ . \ . \ (4)$$

in welke vergelijkingen P, p, a en δ als bekenden, maar α, β, P' en ν' als onbekenden moeten worden beschouwd.

De tweede en vierde door elkander deelende, komt er

$$\frac{\alpha - \delta}{\alpha - 1} = \frac{P}{p},$$

of $$\alpha P - P = \alpha p - \delta p,$$

en hieruit α afzonderende, vinden wij

$$\alpha = \frac{P - \delta p}{P - p}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

daar verder, uit (1), $\beta = a\alpha$ is, zoo is ook

$$\beta = a \times \frac{P - \delta p}{P - p}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

waardoor de soortelijke zwaarte van den klomp K, benevens die van de tegenwigten, bekend wordt.

Brengen wij deze waarden over in de vergelijking (4), dan verkrijgen wij, daar dezelve onder den vorm

$$P' = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta - \delta}{\alpha - 1} \times p$$

kan worden geschreven,

$$P' = \frac{1}{a}(a \times \frac{P - \delta p}{P - p} - \delta \times \frac{P - p}{p(1 - \delta)}) \times p$$
$$= (\frac{P - \delta p}{P - p} - \frac{\delta}{a}) \times \frac{P - p}{1 - \delta}.$$

Daar eindelijk uit (3)

$$y' = P' \times \frac{1}{a} = P' \times \frac{P - p}{P - \delta p}$$

is, zoo verkrijgen wij

$$y' = (\frac{P - \delta p}{P - p} - \frac{\delta}{a}) \times \frac{P - p}{P - \delta p} \times \frac{P - p}{1 - \delta},$$

dat is, na behoorlijke herleiding,

$$y' = \frac{P - p}{1 - \delta} \times (1 - \frac{\delta}{a} \times \frac{P - p}{P - \delta p}) \ldots \ldots (7)$$

zijnde die volkomen dezelfde vergelijking, welke in de eerste oplossing, onder N°. (4), gevonden is.

Aanmerking. Het is van belang op te merken, dat de vergelijkingen (5) en (6) ons de soortelijke zwaarte van de stoffen doen kennen, waaruit de klomp K en de tegenwigten bestaan, en vooral, dat in de vergelijking (5), welke de soortelijke zwaarte van den klomp K doet kennen, de grootheid a niet voorkomt. Het vinden der soortelijke zwaarte van K is dus geheel onafhankelijk van de stof, waaruit de tegenwigten bestaan, en hieruit volgt, dat men, om de soortelijke zwaarte van eenige stof te kennen, eenen willekeurigen klomp van deze stof in de lucht en in het water zal moeten wegen, met tegenwigten van *willekeurige doch dezelfde* stof, en dat men deze tegenwigten P en p, en de digtheid of soortelijke zwaarte van de lucht δ stellende, alsdan voor de soortelijke zwaarte van het gegevene ligchaam zal hebben.

$$a = \frac{P - \delta p}{P - p}.$$

Deze handelwijze wijkt af van die, welke gewoonlijk in de beginselen der Hydrostatica gegeven wordt; want men neemt aldaar de digtheid der lucht niet in aanmerking, en vindt alzoo $a = \frac{P}{P - p}$, welke formule ook uit de onze volgt, door in dezelve $\delta = 0$ te stellen.

LXI. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK Rz.

Een Magazijnmeester heeft een zeker aantal kogels; bijaldien hij dezelve in eenen driehoek, dat is, in rijen, welke met één beginnen en met één opklimmen, rangschikt, dan houdt hij er eindelijk 104 over, die te weinig zijn om de volgende rij vol te maken; doch bijaldien hij dezelve in een vierkant schikt, dan verkrijgt hij in de zijde van het vierkant 42 kogels minder dan in de zijde van den gezegden driehoek, en hij houdt nog 199 kogels over, welke te weinig zijn, om elke zijde van zijn vierkant met eenen kogel te vergrooten: men vraagt hierdoor het getal der kogels te bepalen? (13)

OPGELOST *door* W. TOP WZ., M. B. JUNG, H. FOEKES BAKKER, C. F. JULIUS, J. PEEREBOOM, A. VAN DER SWAN, J. VAN WIJK RZ, R. VAN WIJK JZ. en A. J. BRINKERINK.

OPLOSSING *van* W. TOP WZ.

Stel de zijde van den driehoek x, dan is de zijde van het vierkant $x - 42$; het aantal kogels in den driehoek en in het vierkant wordt bijgevolg uitgedrukt door

$$\frac{x(x+1)}{2} \quad \text{en} \quad (x-42)^2;$$

daar in de eerste uitdrukking 104 en de tweede 199 kleiner is dan het geheele aantal kogels, zoo hebben wij de vergelijking:

$$\frac{x(x+1)}{2} + 104 = (x-42)^2 + 199,$$

waaruit wij achtervolgens vinden

$$x^2 + x + 208 = 2x^2 - 168x + 3926,$$

$$x^2 - 169x + 3718 = 0,$$

$$x = \frac{169}{2} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{169}{2}\right)^2 - 3718\right\}} = \frac{169 \pm 117}{2},$$

zoo-

(13) J. DE GELDER, *Beginselen der Stelkunst*, pag. 257, N°. 98.

zoodat $x = 143$ of $x = 26$.

Het eerste antwoordt $x = 143$ geeft van het aantal der kogels $\frac{1}{2} x (x + 1) + 104 = 10400$.

Het tweede antwoord $x = 26$, lost het vraagstuk niet in den opgegevenen zin op; want alsdan zou het aantal der kogels in de zijde van het vierkant negatief worden. Dit antwoordt voldoet aan de vergelijking:

$$\frac{x (x + 1)}{2} + 104 = (42 - x)^2 + 199,$$

welke tot dezelfde eindvergelijking aanleiding geeft; en het is niet moeijelijk de opgaaf van het vraagstuk zoodanig te wijzigen, dat er dit tweede antwoord op toepasselijk worde.

LXII. VOORSTEL,

Door J. VAN WIJK, Rz.

Wanneer men het getal 524433 door een zeker getal deelt, dan gaat de deeling juist op; maar dit zelfde getal door een getal, dat twee meer is, deelende, dan is het quotient negen minder dan in het eerste geval, en er blijft 293 over. Men vraagt: door welk getal er eerst is gedeeld geworden? (14)

OPGELOST door W. TOP Wz., G. J. SARLET, J. PEEREBOOM, H. BOEKES BAKKER, A. VAN DER SWAN, C. F. JULIUS, R. VAN WIJK Jz., J. VAN WIJK Rz., M. B. JUNG en A. J. BRINKERINK.

Oplossing van W. TOP Wz.

Stel het getal, waardoor het eerst is gedeeld geworden x, dan is het quotient der deeling $\frac{524433}{x}$, de tweede deeler is alsdan $x + 2$ en het tweede quotient $\frac{524433}{x} - 9$; daar er echter bij deze laat-

(14) J. DE GELDER, Beg. der Stelkunst, pag. 257, No. 99.

laatste deeling 293 moet overblijven, zoo hebben wij de vergelijking

$$\frac{524433}{x+2} = \frac{524433}{x} - 9 + \frac{293}{x+2},$$

of, den laatsten term van het tweede lid in het eerste lid brengende,

$$\frac{524140}{x+2} = \frac{524433}{x} - 9,$$

of, met het product der noemers vermenigvuldigende,

$$524140x = 524433\,(x+2) - 9x\,(x+2),$$

dat is, na behoorlijke ontwikkeling en herleiding,

$$9x^2 - 275x = 1048866,$$

uit welke vierkantsvergelijking gevonden wordt

$$x = 15\tfrac{5}{18} \pm 341\tfrac{13}{18}.$$

Wilden wij nu het benedenste teeken gebruiken, dan zou x niet alleen negatief, maar bovendien een gebroken worden; wij bepalen ons dus tot het bovenste teeken, en vinden alzoo, voor het gevraagde getal, $x = 357$.

LXIII. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK Rz.

Een getal te vinden, dat te gelijk een driehoekig en een vijfhoekig getal is, welker wortels acht van elkander verschillen? (15)

OPGELOST *door* M. B. JUNG, W. TOP Wz., J. VAN WIJK Rz. R. VAN WIJK Jz., A. J. BRINKERINK, J. PEEREBOOM, H. FOEKKS BAKKER, en C. F. JULIUS.

OPLOSSING *van* M. B. JUNG.

Stel den wortel van het driehoekige getal x en die van het vijfhoekige getal y, dan is het driehoekige getal $\frac{1}{2}x(x+1)$ en het vijfhoekige getal $\frac{1}{2}y(3y-1)$; daar nu deze getallen aan elkander gelijk moeten zijn, en bovendien, volgens het voorstel, $y = x - 8$ is, zoo verkrijgen wij de vergelijking

$$x(x+1) = (x-8) \times \{3\,(x-8) - 1\},$$

of

(15) J. DE GELDER, *Beginselen der Stelkunst*, *pag.* 257. N°. 100.

of $x^2 + x = 3x^2 - 49x + 200$,
dus $2x^2 - 50x + 200 = 0$,
en $x^2 - 25x + 100 = 0$,
waaruit $x = \frac{25}{2} \pm \sqrt{\left\{(\frac{25}{2})^2 - 100\right\}}$,

dat is $x = 20$ of $x = 5$. Nemende nu $x = 20$, dan is $y = 12$ en het gevraagde getal is $\frac{1}{2}x(x+1) = 210$; maar nemende $x = 5$, dan is $y = -3$, en dan is het gevraagde getal 15, welke beide antwoorden even goed aan de vraag voldoen.

LXIV. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK Rz.

De drie zijden van eenen driehoek gegeven zijnde, vraagt men naar den inhoud der cirkelsegmenten, welke door dezen driehoek van den omgeschrevenen cirkel worden afgesneden.

OPLOSSING. *Door* W. TOP Wz.

Laat ABC, *Fig.* 40, de gegeven driehoek zijn, en stellen wij BC $= a$, AC $= b$ en BA $= c$; indien wij dan de halve som der zijden $\frac{1}{2}(a + b + c) = s$ stellen, dan is, volgens de bekende formule, de straal van den omgeschrevenen cirkel

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

terwijl de hoeken A, B en C gevonden worden door de formulen

$$Sin.\ A = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{bc} = \frac{a}{2r},$$

$$Sin.\ B = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{ca} = \frac{b}{2r},$$

$$Sin.\ C = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{ab} = \frac{c}{2r}.$$

Deze laatste formulen worden ook gevonden, door op te merken, dat de hoeken CEB, AEC en BEA het dubbel zijn van de hoeken A, B en C; indien men dus de lijnen ED, EF en EG lood-

loodregt op de zijden van den driehoek trekt, dan worden de zijden niet alleen midden door gedeeld, maar dan zijn de hoeken, die hierdoor om het middelpunt ontstaan, gelijk aan de hoeken van den driehoek; men heeft alzoo in den regthoekigen driehoek EBF:

$$BF = BE\ Sin.\ BEF \quad \text{of} \quad \tfrac{1}{2} a = r\ Sin.\ A,$$

waaruit $Sin.\ A = \frac{a}{2r}$, en zoo met de overige.

Voor den inhoud van de driehoeken ECB, EAC en EBA hebben wij

$$\triangle\ EBC = \tfrac{1}{2}\ EC \times EB \times Sin.\ BEC = \tfrac{1}{2}\ r^2\ Sin.\ 2\ A,$$
$$\triangle\ EAC = \tfrac{1}{2}\ EC \times EA \times Sin.\ AEC = \tfrac{1}{2}\ r^2\ Sin.\ 2\ B,$$
$$\triangle\ EBA = \tfrac{1}{2}\ EB \times EA \times Sin.\ AEB = \tfrac{1}{2}\ r^2\ Sin.\ 2\ C.$$

Daar verder de inhouden der sectors ECB, EAC en EBA tot den inhoud van den cirkel in reden staan als de hoeken aan het middelpunt tot 360°, zoo hebben wij, daar de inhoud van den cirkel gelijk $r^2 \pi$ is,

$$Sector\ EBC = r^2 \pi \times \frac{A}{180^\circ},$$
$$Sector\ EAC = r^2 \pi \times \frac{B}{180^\circ},$$
$$Sector\ EAB = r^2 \pi \times \frac{C}{180^\circ}.$$

Trekkende eindelijk de driehoeken van de overeenkomstige sectors af, dan blijft er, voor de gevraagde segmenten:

$$Segment\ BC = r^2 \left\{ \pi \times \frac{A}{180^\circ} - \tfrac{1}{2}\ Sin.\ 2\ A \right\}$$
$$Segment\ AC = r^2 \left\{ \pi \times \frac{B}{180^\circ} - \tfrac{1}{2}\ Sin.\ 2\ B \right\}$$
$$Segment\ AB = r^2 \left\{ \pi \times \frac{C}{180^\circ} - \tfrac{1}{2}\ Sin.\ 2\ C \right\}$$

waardoor het voorstel is opgelost, omdat wij de formulen voor r benevens de hoeken A, B en C hebben opgegeven.

LXV.

LXV. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK JZ.

De aarde als een volmaakten bol beschouwende, vraagt men de oppervlakte der drie bolvormige schijven, alsmede der twee bolvormige segmenten, welke door de keerkringen en poolcirkels gevormd worden, te bepalen?

OPGELOST *door* R. VAN WIJK JZ. en W. TOP WZ.

OPLOSSING *door* R. VAN WIJK JZ.

Daar het oppervlak van eene bolvormige schijf, of van een bolvormig segment, gelijk is aan de hoogte vermenigvuldigd met den omtrek van eenen grooten cirkel des bols, zoo hebben wij alleen de hoogten FD, DH en HM, *Fig.* 41 te bepalen, waarbij de bogen FC en AB gelijk 23°28′ ondersteld worden.

De omtrek der aarde 5400 duitsche mijlen bedragende, zoo is de straal gelijk $\frac{5400}{2\pi} = 859,44$ mijlen; wij hebben alzoo

$$MD = MC \times Cos.\ CMF = 859,44 \times Cos.\ 23^\circ 28'$$
$$= 788,35$$
$$MH = MB \times Sin.\ BMA = 859,44 \times Sin.\ 23^\circ 28'$$
$$= 342,24$$

en hierdoor hebben wij verder

$$FD = MF - MD = 71,09,$$
$$DH = MD - MH = 446,11,$$
$$HE = 2\ MH = 684,48,$$

waardoor dan eindelijk gevonden wordt:

Voor het oppervlak, gelegen tusschen elk der poolcirkels, $5400 \times FD = 5400 \times 71,09 = 383886$ vierkante mijlen.

Voor elk der oppervlakken, begrepen tusschen de poolcirkels en keerkringen, $5400 \times DH = 5400 \times 446,11 = 2408994$ vierkante mijlen.

Voor het oppervlak, besloten tusschen de keerkringen, $5400 \times HE = 5400 \times 684,48 = 3696192$ vierkante mijlen.

De som dezer oppervlakken nemende, vinden wij, voor de

ge

geheele oppervlakte van den aardbol, 9281952 vierkante mijlen, en dit zelfde vinden wij ook, door den omtrek 5400 met de middellijn 1718,88 te vermenigvuldigen.

LXVI. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

In dezelfde onderstelling, als die van het voorgaande Voorstel, den ligchamelijken inhoud dier schijven en segmenten te vinden?

OPGELOST *door* W. TOP Wz. en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* W. TOP Wz.

In het voorgaande Voorstel hebben wij voor den straal des bols gevonden 859,44 mijlen, terwijl wij *Fig* 41. gevonden hebben FD = 71,09, HD = 446,11, HM = 342,24 en MD = 788,35.

Omdat nu de regthoekige driehoeken MCD en MBH gelijk en gelijkvormig zijn, zoo hebben wij verder:

DC = MH = 342,14 en HB = MD = 788,35.

Daar eindelijk de inhoud van eene bolvormige schijf, waarvan de stralen van het grond- en bovenvlak gelijk R en r zijn, en waarvan de hoogte gelijk h is, wordt uitgedrukt door de formule:

$$\tfrac{1}{2}\,\pi\,(R^2 + r^2) \times h + \tfrac{1}{6}\,\pi\,h^3,$$

en men hieruit, door $r = 0$ te stellen, voor den inhoud van een bolvormig segment vindt,

$$\tfrac{1}{2}\,\pi\,R^2 h + \tfrac{1}{6}\,\pi\,h^3$$

zoo verkrijgen wij, door in deze formulen de gevondene getallen te substitueren:

Voor elk der twee bolvormige segmenten, door de poolcirkels afgesneden, 13267609,7462 cubieke mijlen.

Voor de bolvormige schijven, begrepen tusschen de poolcirkels en keerkringen, 564076787,5304 cubieke mijlen.

Voor de bolvormige schijf, begrepen tusschen de twee keerkringen, 1500838982,726 cubieke mijlen.

LXVII.

LXVII. VOORSTEL.

Door H. FOEKES BAKKER.

Toen ik mijn' vader vroeg hoe oud hij was, antwoordde hij: ik ben geboren in het jaar toen de zonnecirkel 11 *en het guldengetal* 7 *was, terwijl nu de zonnecirkel* 7 *en het guldengetal* 11 *is. Vrage naar mijns vaders ouderdom?* (16) (*)

OPGELOST *door* M. B. JUNG, H. FOEKES BAKKER, R. VAN WIJK Jz., A. VAN DER SWAN, C. F. JULIUS, W. TOP Wz., en A. J. BRINKERINK.

OPLOSSING *van* M. B. JUNG.

Stel het geboortejaar x en het tegenwoordige jaar y, dan is de ouderdom $y - x$ jaren.

Ingevolge van het Voorstel en het aangeteekende in de noot, hebben wij dan de volgende vergelijkingen:

$x + 9 = 28\,p + 11 \;.\;.\; (1)$, $\quad y + 9 = 28\,r + 7 \;.\;.\; (3)$,

$x + 1 = 19\,q + 7 \;.\;.\; (2)$, $\quad y + 1 = 19\,s + 11 \;.\;.\; (4)$.

Daar wij hier nu zes onbekenden en slechts vier vergelijkingen hebben, kunnen wij p en r naar welgevallen aannemen, en alzoo de overige onbekenden in p en r uitdrukken. Hiertoe hebben wij uit (1) en (2)

$$x = 28\,p + 2 = 19\,q + 6;$$

en hieruit volgt gemakkelijk

$$q = \frac{28\,p - 4}{19} = p + \frac{9\,p - 4}{19};$$

zal nu q een geheel getal zijn, dan moet $9\,p - 4$ door 19 deel:

(16) O. S. BANGMA, *Algebra, bladz.* 276. *Voorst.* 46.

(*) Het guldengetal wordt voor eenig jaar gevonden, door bij hetzelve 1 op te tellen en de som door 19 te deelen, de zonnecirkel door bij het jaargetal 9 op te tellen en de som door 28 te deelen. In beide gevallen is de rest der deeling het gevraagde. (*Wetensch. Commissie.*)

deelbaar wezen, en hiertoe ſtellen wij $9p - 4 = 19t$, waaruit volgt

$$p = \frac{19t + 4}{9} = 2t + \frac{t + 4}{9}.$$

Om verder p tot een geheel getal te maken, ſtellen wij $t + 4 = 9u$, en hieruit volgt dan

$$t = 9u - 4,$$
$$p = 19u - 8,$$
$$q = 28u - 12,$$
$$x = 532u - 222.$$

Uit de vergelijkingen (3) en (4) vinden wij, even eens handelende,

$$y = 28r - 2 = 19s + 10,$$

dus $$s = \frac{28r - 12}{19} = r + \frac{9r - 12}{19}.$$

ſtellende dus, om voor s een geheel getal te hebben, $9r - 12 = 19v$, dan vinden wij

$$r = \frac{19v + 12}{9} = 2v + 1 + \frac{v + 3}{9},$$

en om voor r een geheel getal te verkrijgen, ſtellen wij $v + 3 = 9w$, waaruit

$$v = 9w - 3$$
$$r = 19w - 5$$
$$s = 28w - 8$$
$$y = 532w - 142.$$

Wij hebben alzoo voor de twee jaartallen gevonden,

$$x = 532u - 222 \quad \text{en} \quad y = 532w - 142$$

waarin men nu w en u naar welgevallen nemen kan; om echter voor x en y de kleinst mogelijke poſitieve getallen te bekomen, moeten wij $u = w = 1$ nemen; dit geeft $y = 390$ en $x = 310$, waaruit voor den gevraagden ouderdom volgt $y - x = 80$ jaren.

LXVIII. VOORSTEL.

Door H. Foekes Bakker.

De jaren des ouderdoms van twee perſonen ſtaan thans tot elkander als 5 tot 8; wanneer men de jaren der beide perſonen, op den

den tijd wanneer dezelve tot elkander staan als 1 tot 2, te zamen vermenigvuldigt, dan komt er 288. Men vraagt naar den tegenwoordigen ouderdom dezer beide personen?

Opgelost *door* H. Foekes Bakker, A. J. Brinkerink, M. B. Jung, A. van der Swan, C. F. Julius, W. Top Wz., G. J. Sarlet en R. van Wijk Jz.

Oplossing *van* H. Foekes Bakker.

Stel den ouderdom van den jongsten, op het oogenblik dat dezelve tot dien van den oudsten in reden is als 1 tot 2, gelijk x; dan is de ouderdom van den oudsten op dit zelfde oogenblik, $2x$. Daar nu, volgens de opgaaf, het product dezer twee getallen 288 moet zijn, zoo hebben wij $2x^2 = 288$, of $x^2 = 144$, waaruit $x = 12$; op dit oogenblik had dus de jongste 12 en de oudste 24 jaren bereikt.

Nu is het klaar, dat de verhouding of het quotient der jaren van twee personen kleiner en kleiner wordt, naardat de ouderdom van deze personen toeneemt; want, daar het verschil hunner jaren altijd even groot blijft, zoo komt hetzelve, bij het klimmen der jaren, minder en minder in aanmerking; het oogenblik, waarin de ouderdom der beide personen in reden staat als 5 tot 8, valt dus eenige jaren later in dan het oogenblik, waarop hunne ouderdom in reden is als 1 tot 2. Stellen wij dus dit aantal jaren gelijk y, dan is de ouderdom van den jongsten $12 + y$ en de ouderdom van den oudsten $24 + y$, en wij hebben bijgevolg door het Voorstel,

$$12 + y : 24 + y = 5 : 8$$

of

$$96 + 8y = 120 + 5y$$

dus $3y = 24$, waaruit $y = 8$. De tegenwoordige ouderdom van den jongsten is dus 20, en die van den oudsten 32 jaren.

Het was zelfs niet eens noodig te onderzoeken, of het tijdstip, waarin de ouderdom der personen in reden is als 5 tot 8, vroeger of later invalt dan het tijdstip, waarin die ouderdom in reden is als 1 tot 2; want al hadden wij ondersteld, dat dit eerste tijdstip z jaren vroeger inviel dan het tweede, dan zou de evenre-

digheid $12 - z : 24 - z = 5 : 8$ ons gegeven hebben $z = -8$, en dit negatieve teeken zou dan van zelf hebben aangetoond, dat dit eerste tijdstip geenszins 8 jaren vroeger, maar 8 jaren later dan het andere moet plaats hebben.

LXIX. VOORSTEL.

Door H. FOEKES BAKKER.

Drie getallen, waarvan het grootste uit twee getalmerken bestaat en de eenheid tot laatste cijferletter heeft, maken eene gedurige evenredigheid of eene meetkunstige reeks van drie termen uit, waarvan de reden gelijk is aan den vierkantswortel uit het kleinste getal. Trekt men dit kleinste getal van het grootste af, dan blijft er het omgekeerde van het middelste getal over, en deelt men dit overschot, waarvan de som der cijfers gelijk is aan het kleinste getal, door dit zelfde kleinste getal, zoo is de uitkomst de cijferletter der tientallen van het grootste der gevraagde getallen. Vrage naar die getallen?

OPGELOST *door* H. FOEKES BAKKER, M. B. JONG, W. TOP Wz., R. VAN WIJK Jz., G. J. SARLET, C. F. JULIUS, A. VAN DER SWAN en J. PEEREBOOM.

OPLOSSING *van* H. FOEKES BAKKER.

Naardien de gemeene reden der meetkunstige reeks gelijk is aan den vierkantswortel uit den kleinsten term, zoo verkrijgt men den grootsten of derden term, door den eersten twee achtervolgende malen met zijnen vierkantswortel te vermenigvuldigen, en hieruit volgt, dat de derde term gelijk moet zijn aan het vierkant van den eersten; stellen wij dus den eersten term x, dan is de derde x^2.

Daar verder de laatste cijfer van dezen derden term de eenheid is, zoo moet de cijfer der tientallen gelijk zijn $\frac{1}{10}(x^2-1)$.

Stellen wij nu het middelste getal gelijk aan $10y + z$, dan hebben wij, omdat het verschil tusschen het derde en eerste ge-

getal gelijk moet zijn aan het omgekeerde van het middelste, de vergelijking

$$x^2 - x = 10z + y$$

terwijl de overige voorwaarden aanleiding geven tot de vergelijkingen

$$\frac{10z + y}{x} = \frac{x^2 - 1}{10} \quad \text{en} \quad y + z = x.$$

De tweede met $10x$ vermenigvuldigd geeft

$$10(10z + y) = x^3 - x,$$

en deze vergelijking door de eerste gedeeld, komt er

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = 10,$$

of $x + 1 = 10$, waaruit $x = 9$. De eerste term is dus 9 en de derde x^2 of 81.

Brengen wij de waarde van x in de eerste en derde vergelijking, dan verkrijgen wij

$$10z + y = 72 \quad \text{en} \quad z + y = 9,$$

waaruit door aftrekking volgt $9z = 63$, dus $z = 7$ en $y = 9 - z = 2$, zoodat het middelste getal of $10y + z$ gelijk is aan 27. De drie gevraagde getallen zijn dus 9, 27 en 81.

LXX. Voorstel.

Door H. Foekes Bakker.

De zonnecirkel en het guldengetal van zeker jaar zijn aan elkander gelijk. Wanneer men het quotient van het guldengetal bij dat van den zonnecirkel vergadert, bekomt men 148 (*), *en* $1\frac{1}{2}$ *maal het quotient des zonnecirkels met het quotient van het guldengetal verminderd, is gelijk aan de som van den zonnecirkel en het guldengetal. Vrage naar het jaargetal, deszelfs zonnecirkel en guldengetal?*

Opgelost door H. Foekes Bakker, W. Top Wz., C. F. Julius, R. van Wijk Jz, M. B. Jung en A. van der Swan.

Oplossing van H. Foekes Bakker.

Stel het gevraagde jaartal x en het getal, dat de zonnecirkel en

(*) Zie de noot bij Voorstel LXVII.

en het guldengetal aanduidt z; indien dan het quotient van het guldengetal p en dat van den zonnecirkel q gesteld wordt, dan hebben wij, door de vorming van den zonnecirkel en het guldengetal, de vergelijkingen

$$x + 1 = 19p + z \quad \text{en} \quad x + 9 = 28q + z,$$

terwijl de voorwaarden van het vraagstuk ons bovendien geven

$$p + q = 142 \quad \text{en} \quad 1\tfrac{1}{2}q - p = 2z.$$

De twee eerste vergelijkingen van elkander aftrekkende, blijft er

$$28q - 19p = 8;$$

en tellende hierbij 19 maal de derde vergelijking, verkrijgen wij

$$47q = 2820, \quad \text{dus} \quad q = 60 \text{ en } p = 148 - q = 88.$$

De vierde vergelijking gaat hierdoor over in

$$2z = 90 - 88 = 2 \quad \text{dus} \quad z = 1,$$

en de eerste vergelijking geeft bijgevolg

$$x = 19p + z - 1 = 1672.$$

De zonnecirkel en het guldengetal zijn dus gelijk 1, terwijl het gevraagde jaartal 1672 is.

LXXI. VOORSTEL.

Door A. VOLKERSEN.

Iemand wedt, dat hij in 100 worpen met drie dobbelsteenen ten minste éénmaal drie zessen zal gooijen; welke is zijne kans?

OPGELOST door A. VOLKERSEN, R. VAN WIJK Jz. en W. TOP Wz.

OPLOSSING van A. VOLKERSEN.

Omdat een dobbelsteen zes verschillende kanten heeft, zal men, terwijl twee der dobbelsteenen stil blijven liggen, den derden zes verschillende standen kunnen geven.

Laat men dus alleen den eersten dobbelsteen onaangeroerd, dan zal men, terwijl de tweede op elke van zijne zes zijden ligt, den derden zes maal kunnen verplaatsen, en dus den tweeden en derden dobbelsteen 36 verschikkingen kunnen doen ondergaan.

Daar dit zelfde nu blijft doorgaan voor elke der zes zijden, waar-

waarop de eerste dobbelsteen kan liggen, zoo volgt hieruit, dat er met drie dobbelsteenen 6 × 36 of 216 verschillende worpen mogelijk zijn.

Onder deze 216 worpen komt de worp van drie zesfen slechts éénmaal voor, en daar de speler tot elk der verschillende worpen evenveel kans heeft, zoo volgt hieruit, dat indien hij slechts éénmaal werpt, zijne kans om drie zesfen te gooijen is als 1 tot 216. Gooit hij dus honderdmaal, dan is zijne kans als 100 tot 216, dat is: hij zou 100 tegen 216 gulden kunnen wedden, om in 100 worpen drie zesfen te gooijen.

LXXII. VOORSTEL.

Door J. W. MARTINI.

In eenen gegevenen bol een' kegel zoodanig te plaatsen, dat zijne geheele oppervlakte gelijk is aan die van eenen anderen bol, welke de straal van het grondvlak des kegels tot straal heeft?

OPGELOST door J. W. MARTINI en W. TOP Wz.

OPLOSSING van J. W. MARTINI.

Stellen wij dat ACD, *Fig.* 49, de gevraagde kegel is, en stellen wij verder $AB = BC = x$, $AD = DC = y$, dan is $BD = \sqrt{(y^2 - x^2)}$. Indien wij nu den straal van den gegevenen bol gelijk r stellen, dan is uit de bekende eigenschap van den cirkel $AB^2 = BD \times BE$ of $x^2 = \sqrt{(y^2 - x^2)} \times \{2r - \sqrt{(y^2 - x^2)}\}$, waaruit wij vinden

$$r = \frac{y^2}{2\sqrt{(y^2 - x^2)}} \quad \ldots \quad (1).$$

Het geheele oppervlak van den kegel is gelijk

$$\pi \times AC \times \tfrac{1}{2} AD + \pi AB^2 = \pi x (y + x),$$

terwijl het oppervlak van den bol, welke AB tot straal heeft, wordt uitgedrukt door

$$4 AB^2 \pi = 4 \pi x^2;$$

ſtellende dus deze uitdrukkingen, ingevolge de voorwaarde van het Voorſtel, aan elkander gelijk, dan verkrijgen wij, tot tweede vergelijking,

$$\pi x (y + x) = 4 \pi x^2,$$

of, na door πx gedeeld te hebben,

$$y + x = 4 x,$$

waaruit volgt $$y = 3 x.$$

Deze waarde van y in de vergelijking (1) geſubſtitueerd, komt er

$$r = \frac{9x^2}{2\sqrt{9x^2 - x^2}} = \frac{9}{2} x \cdot \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{9}{4} \cdot \frac{x}{\sqrt{2}},$$

waaruit $$x = \frac{4}{9} r \sqrt{2},$$

en $$y = 3 x = \frac{4}{3} r \sqrt{2},$$

terwijl wij eindelijk voor de hoogte vinden

$$BD = \sqrt{(y^2 - x^2)} = \sqrt{8x^2} = 2x\sqrt{2} = \frac{16}{9} r.$$

Deze laatſte uitdrukking maakt het conſtrueren van den kegel in den bol zeer gemakkelijk, want uit dezelve volgt BD = $\frac{8}{9}$ DE en dus BE = $\frac{1}{9}$ DE; nemende dus BD = $\frac{8}{9}$ van de middellijn, dan is hierdoor de geheele kegel bepaald.

LXXIII. VOORSTEL,

Door J. W. MARTINI,

Een' regten kegel zoodanig in eenen gegevenen bol te conſtrueren, dat zijn inhoud gelijk zij aan dien van eenen anderen bol, wiens ſtraal gelijk is aan den ſtraal van het grondvlak des kegels?

OPGELOST door W. TOP Wz. en J. W. MARTINI.

OPLOSSING van W. TOP Wz.

Laat ACD, *Fig.* 42, de gevraagde kegel zijn, beſchreven in den gegevenen bol, waarvan de ſtraal gelijk r is, en ſtellen wij AB = BC = x en de hoogte DB = y, dan is de ſchuinſche zijde gelijk $\sqrt{(x^2 + y^2)}$; en dan hebben wij uit de eigenſchap van den cirkel $AB^2 = DB \times BE$, dat is

$$x^2 = y(2r - y) \quad . \ . \ . \ . \ (1)$$

Nu

Nu is de inhoud van den kegel gelijk

$$AB^2 \times \pi \times \tfrac{1}{3}\,BD = \tfrac{1}{3}\,\pi\, x^2 y,$$

en de inhoud van den bol, welke AB tot ſtraal heeft,

$$\tfrac{4}{3}\,AB^3 \times \pi = \tfrac{4}{3}\,\pi\, x^3,$$

zoodat wij door het Voorſtel hebben

$$\tfrac{1}{3}\,\pi\, x^2 y = \tfrac{4}{3}\,\pi\, x^3 \quad \text{of} \quad y = 4x.$$

De gevraagde kegel heeft dus de eigenſchap, dat zijne hoogte gelijk moet zijn aan viermaal den ſtraal van het grondvlak.

Brengende deze waarde van y over in de vergelijking (1), dan komt er

$$x^2 = 4x\,(2r - 4x),$$

of $\quad x = 8r - 16x,$

waaruit $\quad x = \tfrac{8}{17}\,r,$

dus $\quad y = 4x = \tfrac{32}{17}\,r = \tfrac{16}{17}\,DE.$

Nemende dus $EB = \tfrac{1}{17}\,DE$, dan zal hierdoor de geheele kegel bepaald zijn.

LXXIV. VOORSTEL

Door H. VAN KRAAIJENOORD.

Van eene meetkunſtige reeks, die uit vier termen beſtaat, is de derde term, verminderd met de ſom der twee eerſte termen, gelijk 2, *en de vierde term, verminderd met de ſom der twee middelſte termen, gelijk* 4. *Men vraagt deze reeks te bepalen?*

OPGELOST *door* R. VAN WIJK JZ., J. PEEREBOOM, H. FOEKES BAKKER, G. J. SARLÉT, A. VAN DER SWAN, C. F. JULIUS, M. B. JUNG, A. J. BRINKERINK, H. VAN KRAAIJENOORD en W. TOP WZ.

OPLOSSING *van* R. VAN WIJK JZ.

Stel voor de termen der gevraagde meetkunſtige reeks x, xy, xy^2 en xy^3, dan geeft het vraagſtuk ons de vergelijkingen

$$xy^2 - (x + xy) = 2,$$

en

$$xy^3 - (xy + xy^2) = 4.$$

de tweede vergelijking kan aldus geschreven worden

$$y \left\{ xy^2 - (x + xy) \right\} = 4,$$

en deelende dezelve door de eerste vergelijking, hebben wij terstond $y = 2$.

Uit de eerste vergelijking is verder

$$x = \frac{2}{y^2 - y - 1} = \frac{2}{4 - 3} = 2,$$

de gevraagde reeks is dus 2, 4, 8, 16.

LXXV. VOORSTEL.

Door G. J. SARLET.

Twee getallen te vinden, waarvan het product gelijk is aan een gegeven getal a, terwijl de som der vijfde magten, opgeteld met p maal de som der derde magten, gelijk is aan q maal de som der getallen?

OPGELOST door W. TOP Wz., C. F. JULIUS en G. J. SARLET.

OPLOSSING van W. TOP Wz.

Stellen wij de gevraagde getallen $x + y$ en $x - y$, dan hebben wij:

som der vijfde magten $= 2x^5 + 20x^3y^2 + 10xy^4$,

som der derde magten $= 2x^3 + 6xy^2$,

som der eerste magten $= 2x$;

daar nu de som der vijfde magten plus p maal de som der derde magten gelijk moet zijn aan q maal de som der getallen, zoo geeft ons dit de vergelijking

$$2x^5 + 20x^3y^2 + 10xy^4 + p(2x^3 + 6xy^2) = 2qx,$$

of alles door $2x$ deelende

$$x^4 + 10x^2y^2 + 5y^4 + p(x^2 + 3y^2) = q,$$

dat is, alles volgens de magten van y rangschikkende,

$$5y^4 + (10x^2 + 3p)y^2 + x^4 + px^2 - q = 0 \ldots\ldots (1)$$

Het product der getallen gelijk a zijnde, hebben wij bovendien

$$x^2 - y^2 = a \quad \text{of} \quad y^2 = x^2 - a \ldots\ldots (2)$$

en

en brengende dit in de tweede vergelijking over, dan komt er

$$5(x^2-a)^2+(10x^2+3p)(x^2-a)+x^4+px^2-q=0,$$

hetgeen, na ontwikkeling en herleiding der termen, geeft

$$16x^4+4(p-5a)x^2+(5a^2-3ap-q)=0,$$

of $$x^4+\tfrac{1}{4}(p-5a)x^2+\tfrac{1}{16}(5a^2-3ap-q)=0,$$

dus $$x=\pm\sqrt{\left\{\tfrac{1}{8}(5a-p)\pm\tfrac{1}{8}\sqrt{(5a^2+2ap+p^2+4q)}\right\}},$$

en wanneer wij dit in de vergelijking (2) substitueren, verkrijgen wij

$$y=\pm\sqrt{\left\{-\tfrac{1}{8}(3a+p)\pm\tfrac{1}{8}\sqrt{(5a^2+2ap+p^2+4q)}\right\}}$$

waardoor x en y, en dus ook de gevraagde getallen $x+y$ en $x-y$, bepaald zijn.

Voorbeeld. Nemende $a=8$, $p=16$ en $q=368$, dan vinden wij voor x en y de volgende vier waarden

$$x=3,\quad -3,\quad +\sqrt{-3},\quad -\sqrt{-3}$$
$$y=1,\quad -1,\quad +\sqrt{-11},\quad -\sqrt{-11}$$

het éénigste positieve bestaanbaar antwoord is dus $x+y=4$ en $x-y=2$.

LXXVI. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK, Rz.

Op eene zekere plaats liggen drie schepen A, B en C in een punt D bij elkander, van waar zij alle te gelijk om de noord zeilen, zoodanig, dat de koers tusschen A en B is drie streken, en tusschen B en C vier streken, tot dat zij alle onder de linie komen; zoo dan A komt op 350 graden lengte, B op 6 graden lengte en C op 26 graden lengte, vraagt men op welke lengte zij bij elkander waren, en welke koers en verheid ieder schip gezeild heeft? (17)

Opgelost *door* J. VAN WIJK Rz., K. VAN WIJK Jz. en W. TOP Wz.

Oplossing *van* J. VAN WIJK Rz.

Laat door de punten A, D en C een cirkel beschreven zijn,

Fig.

(17) J. A. VAN DAM, *Nieuwe Hoornsche Schatkamer. Besluit-Questiën*, N°. 39

Fig. 43, dan hebben wij, volgens de opgaaf, $\angle ADB = 33°45'$, $\angle BDC = 45°$, $AB = 16° = 240$ mijlen en $BC = 20° = 300$ mijlen, dus $AC = 36° = 540$ mijlen.

Verlengen wij nu DB tot zij den omtrek in F ontmoet, en trekken wij FG en DE loodregt op AC, dan hebben wij $\angle FAC = \angle BDC = 45°$, $\angle FCA = \angle BDA = 33°45'$ en $\angle AFC = 180° - \angle ADC = 101°15'$.

Trekken wij verder AF en CF, dan is in driehoek AFC

$$\textit{Sin.}\ AFC : \textit{Sin.}\ ACF = AC : AF,$$

dus $$AF = \frac{\textit{Sin.}\ ACF}{\textit{Sin.}\ AFC} \times AC = \frac{\textit{Sin.}\ 33°\ 45'}{\textit{Sin.}\ 101°\ 15} \times 540 = 306 \text{ mijlen},$$

waaruit verder gevonden wordt

$$FG = AF \times \textit{Sin.}\ FAC = 306 \times \textit{Sin.}\ 45° = 216\tfrac{1}{4} \text{ mijlen},$$

en $$AG = AF \times \textit{Cos.}\ FAC = 306 \times \textit{Cos.}\ 45° = 216\tfrac{1}{4} \text{ mijlen},$$

daar nu $AB = 240$ mijlen is, zoo volgt hieruit $BG = 23\tfrac{3}{4}$ mijlen.

Verder is $FG = BG \times \textit{Tang.}\ FBG$ en bijgevolg

$$\textit{Tang.}\ FBG = \frac{FG}{BG} = \frac{216\frac{1}{4}}{23\frac{3}{4}} = \frac{173}{19} = 9\frac{2}{19},$$

waaruit $\angle FBG = \angle EBD = 83°44'$, en bijgevolg $\angle EDB = 90° - \angle EBD = 6°16'$, zijnde dit de koers van B bewesten het noorden, terwijl hieruit verder volgt $\angle EDC = \angle BDC - \angle EDB = 38°44'$ voor den koers van C beoosten het noorden, en $\angle EDA = \angle EDB + \angle BDA = 40°1'$ voor den koers van A bewesten het noorden.

Om de lengte voor het punt D te vinden, van waar de schepen zijn afgevaren, hebben wij

$$BE = DE \times \textit{Tang.}\ EDB \quad \text{en} \quad CE = DE \times \textit{Tang.}\ EDC,$$

dus $$BE : CE = \textit{Tang.}\ EDB : \textit{Tang.}\ EDC,$$

of $$BE : BC = \textit{Tang.}\ EDB : \textit{Tang.}\ EDB + \textit{Tang.}\ EDC,$$

waaruit $$BE = BC \times \frac{\textit{Tang.}\ EDB}{\textit{Tang.}\ EDB + \textit{Tang.}\ EDC} = 38\tfrac{1}{4} \text{ mijlen},$$

dat is $BE = 2°25'$ ten oosten van B, en daar B op 6° lengte ligt, zoo ligt het punt D op 8°25' lengte.

Ter bepaling van de zuiderbreedte, waarop het punt D ligt, hebben wij

$$DE = BE \times \textit{Tang.}\ EBD = 1315',9$$

zijnde dit de vergrootende breedte van 21°25'.

Om

Om eindelijk de gezeilde verheden te vinden, hebben wij AD = DE × *Sec.* EDA = $419\frac{1}{2}$ mijlen, DB = DE × *Sec.* EDB = $323\frac{1}{4}$ mijlen, CD = DE × *Sec.* EDC = $411\frac{3}{4}$ mijlen.

LXXVII. VOORSTEL.

Door J. van Wijk Rz.

Twee schepen A en B zijn bij elkander op 30° 11′ noorderbreedte, B zeilt 5 streken en 2° 22′ westelijker dan A, tot op de lengte van 326° en 14° 51′ noorderbreedte, terwijl A mede op 14° 51′ noorderbreedte, doch op 356° lengte komt. Vrage op wat lengte deze twee schepen bij malkander waren, en wat koers en verheid ieder gezeild heeft? (18).

Opgelost *door* J. van Wijk Rz., R. van Wijk Jz. en W. Top Wz.

Oplossing *van* J. van Wijk Rz.

Onderstellen wij, *Fig.* 44, dat door de punten A, B en C een cirkel beschreven is, waarvan het middelpunt in F is. Trekken wij de stralen AF, BF en CF, en verder de lijnen CD en FG loodregt op BA, en FE evenwijdig met BA, dan is, omdat C op 30° 11′ en D op 14° 51′ noorderbreedte gelegen is, CD = 15° 20′ = 1000 *verg. breedte.* Verder is AB gelijk aan het verschil in lengte, en dus gelijk 356° — 326°, dat is gelijk 30°, zoodat BG = GA = 15°.

Daar 5 streken 56° 15′ uitmaakt, zoo is ∠ BFG = ∠ BCA = 56° 15′ + 2° 22′ = 58° 37′ en dus ∠ FBG = 31° 23′, waaruit volgt FG = DE = BG × *Tang.* FBG = 549 en BF = AF = CF = BG × *Sec.* FBG = 1054,2.

Verder is CE = CD — DE = 451 en EF = GD = $\sqrt{(CF^2 - CE^2)}$ = 952,8, zoodat AD = GD — AG = 52,8. Hier-

(18) J. A. van Dam, *Nieuwe Hoornsche Schatkamer. Besluit-Questiën*, N°. 41.

Hierdoor is *Tang*. DCA $= \frac{AD}{CD}$ en dus DCA $= 3^\circ 1'$ koers van A bewesten het zuiden, en BCD $= 58^\circ 37' + 3^\circ 1' = 61^\circ 38'$ koers van B bewesten het zuiden.

Voor de gezeilde verheden hebben wij AC $=$ CD $\times$ *Sec.* DCA $= 230\frac{1}{4}$ mijlen en BC $=$ CD $\times$ *Sec.* BCD $= 484$ mijlen. Eindelijk AD $= 0^\circ 53'$ zuide en A op 356° lengte liggende, ligt C op $356^\circ 53'$ lengte.

LXXVIII. VOORSTEL.

Door R. van Wijk Jz.

De formule $\sqrt[4]{c^2 (a^2 + b^2)}$, *waarin a, b en c gegevene lijnen zijn, te construeren?*

Opgelost *door* R. van Wijk Jz. en W. Top Wz.

Oplossing *van* R. van Wijk Jz.

De gegevene uitdrukking kan onder deze gedaante geschreven worden

$$\sqrt{\{\sqrt{c^2 (a^2 + b^2)}\}} \quad \text{of} \quad \sqrt{\{c \sqrt{(a^2 + b^2)}\}},$$

waaruit blijkt, dat dezelve de middelevenredige is tusschen de lijn c en de hypothenuza van eenen regthoekigen driehoek, waarvan a en b de zijden zijn. Dit opgemerkt hebbende, kan 'er tot de constructie geene zwarigheid meer overblijven, omdat het construeren van eenen regthoekigen driehoek, en het vinden van de middelevenredige tusschen twee gegevene lijnen, tot de allergemakkelijkste meetkunstige constructiën behooren.

LXXIX. VOORSTEL.

Door R. van Wijk Jz.

Van twee cirkels, welke elkander snijden, zijn gegeven de stralen, benevens de afstand der middelpunten. Men vraagt den inhoud der drie stukken te bepalen, welke door deze snijding ontstaan?

Op-

OPGELOST door W. TOP Wz. en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING van W. TOP Wz.

Laat in *Fig.* 45 gegeven zijn AB $= r$, BC $= s$ en AC $= a$, dan moeten wij den inhoud van elk der drie ftukken P, Q en R in deze gegevens uitdrukken.

Het ftuk Q is gelijk aan de fom der fegmenten BFD en BGD, en bijgevolg hebben wij

$$Q = Sector\, ABGD + Sector\, CBFD - Drieh\, ABD - Drieh.\, CBD$$

Daar r, s en a de zijden van driehoek ABC zijn, zoo hebben wij, de hoeken BAC en BCA gelijk α en β ftellende, door de bekende trigonometrifche formulen,

$$Cos.\, \alpha = \frac{a^2 + r^2 - s^2}{2ar}, \qquad Cos.\, \beta = \frac{a^2 + s^2 - r^2}{2as}.$$

Hierdoor de hoeken α en β gevonden hebbende, is $\angle$ BAD $= 2\alpha$ en $\angle$ BCD $= 2\beta$, waaruit volgt

$$Boog\ BGD = 2r\alpha'; \qquad Boog\ BFD = 2s\beta';$$

wel te verftaan wanneer α' en β' de lengte beteekenen, voor den ftraal 1, van de bogen, welke α en β graden hebben.

Daar nu de inhoud van eenen fector gelijk is aan de lengte van zijnen boog, vermenigvuldigd met den halven ftraal, zoo hebben wij

$$Sector\ ABGD = r^2\alpha', \qquad Sector\ CBFD = s^2\beta',$$

en daar de inhoud van eenen driehoek gelijk is aan het product van twee der zijden vermenigvuldigd met den halven finus van den ingeflotenen hoek, zoo is

$$Drieh.\, ABD = \tfrac{1}{2} r^2\, Sin.\, 2\alpha, \qquad Drieh\, CBD = \tfrac{1}{2} s^2\, Sin.\, 2\beta,$$

fubftituerende alzoo deze waarden in de uitdrukking voor Q, dan komt er

$$Q = r^2(\alpha' - \tfrac{1}{2} Sin.\, 2\alpha) + s^2(\beta' - \tfrac{1}{2} Sin.\, 2\beta).$$

De ftukken P en R worden gevonden door Q van elk der cirkels in het bijzonder af te trekken; daar nu de inhoud van deze cirkels wordt uitgedrukt door $r^2\pi$ en $s^2\pi$, zoo verkrijgen wij

$$P = r^2\pi - Q \qquad \text{en} \qquad R = s^2\pi - Q.$$

LXXX. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Twee lijnen gegeven zijnde, vraagt men den straal van eenen cirkel te vinden, ten opzigte van welken deze twee lijnen de tangens en sinus van eenen zelfden hoek zijn; bovendien vraagt men ook de grootte van dezen hoek te bepalen?

OPGELOST *door* W. TOP Wz. en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* W. TOP. Wz.

Figuur 46 stelle de gegevene lijnen BC $= a$ en DE $= b$ in den gevraagden stand voor oogen, dan moeten wij AC $=$ AD $= x$, benevens den hoek A bepalen.

De figuur geeft ons terstond deze evenredigheid:

$$AB : BC = AD : DE,$$

of $$\sqrt{(x^2 - a^2)} : a = x : b,$$

dus $$x^2 - a^2 : a^2 = x^2 : b^2,$$

en $$b^2 x^2 - a^2 b^2 = a^2 x^2,$$

of $$(b^2 - a^2)\, x^2 = a^2 b^2,$$

waaruit $$x = \frac{ab}{\sqrt{(b^2 - a^2)}} = \frac{ab}{\sqrt{(a+b)(b-a)}}.$$

De waarde van den straal x wordt gemakkelijk geconstrueerd, want indien m middelevenredig tusschen $a + b$ en $b - a$ genomen wordt, dan is $x = \frac{ab}{m}$ en bijgevolg vierde evenredig tot m, a en b.

Den straal AD alzoo geconstrueerd hebbende, behoeven wij slechts DE $= b$, loodregt op denzelven te stellen en AE te trekken, waardoor dan de hoek A geconstrueerd is. Willen wij echter dezen hoek A berekenen, dan hebben wij $a = x$ *Sin.* A dus

$$\text{Sin. } A = \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{(b^2 - a^2)}}{b} = \frac{\sqrt{(b+a)(b-a)}}{b}.$$

De formule $x = \frac{ab}{\sqrt{(b^2 - a^2)}}$ toont eindelijk aan, dat het

vrag-

vraagstuk niet mogelijk kan zijn, als b gelijk of kleiner dan a wordt; want in het eerste geval zou x hierdoor oneindig en in het tweede geval onbestaanbaar worden.

LXXXI. VOORSTEL.

Door W. TOP WZ.

Wanneer om eene regelmatige driehoekige piramide, waarvan elke der opstaande ribben het dubbel van de zijden des grondvlaks is, een bol beschreven wordt, dan vraagt men 1°. welke de betrekking der inhouden van deze piramide en dezen bol is? en 2°. de straal van den omgeschrevenen bol gegeven zijnde, de ribben van de piramide te berekenen?

OPGELOST door J. W. MARTINI en W. TOP WZ.

OPLOSSING van J. W. MARTINI.

Laat ABCD, *Fig.* 47. de piramide zijn; indien men dan BC = CD = BD = a stelt, dan is AB = AC = AD = $2a$. Nu is het uit de gelijkheid der opstaande zijden AB, AC en AD duidelijk, dat het middelpunt van den omgeschrevenen bol gelegen moet zijn in de loodlijn, welke uit A op de bazis CBD valt, en dat deze loodlijn de bazis in het middelpunt E van den in- en omgeschreven' cirkel zal ontmoeten. Daar verder AB eene koorde van den bol is, zal het vlak, dat door het midden F van AB loodregt door AB gaat, mede het middelpunt van den bol in zich bevatten, waaruit volgt, dat dit middelpunt gevonden zal worden, door in den driehoek BAE de lijn FG loodregt op AB te trekken, en dat alsdan G het middelpunt van den omgeschrevenen bol zal zijn.

Daar E het middelpunt des omgeschreven' cirkels van den gelijkzijdigen driehoek BCD is, zoo wordt hetzelve gevonden door CH en BI loodregt op BD en DC te trekken, en wij nemen als genoegzaam bekend aan, dat alsdan BE = CE = $\frac{2}{3}$ CH is. Wij hebben alzoo

$$CH = \tfrac{1}{2} a \sqrt{3}, \qquad BE = \tfrac{2}{3} CH = \tfrac{1}{3} a \sqrt{3},$$

en hieruit volgt, voor de hoogte van de piramide

$$AE = \sqrt{(AB^2 - BE^2)} = \sqrt{(4a^2 - \tfrac{1}{3}a^2)} = \tfrac{1}{3} a \sqrt{33}.$$

Om den ſtraal van den omgeſchrevenen bol te vinden, hebben wij, volgens de boven opgegevene conſtructie,

$$AG : AB = AF : AG,$$

dus $$AG = \frac{AB \times AF}{AE} = \frac{2a \times a}{\tfrac{1}{3} a \sqrt{33}} = \frac{6a}{\sqrt{33}} = \tfrac{2}{11} a \sqrt{33},$$

en hieruit volgt voor den inhoud van de piramide en van den bol

$$Inh. pir. = \triangle BCD \times \tfrac{1}{3} AE = \tfrac{1}{4} a^2 \sqrt{3} \times \tfrac{1}{9} a \sqrt{33} = \tfrac{1}{12} a^3 \sqrt{11},$$

$$Inh. bol = \tfrac{4}{3} AG^3 . \pi = \tfrac{4}{3} . \frac{3 . 8}{121} a^3 \pi \sqrt{33} = \tfrac{32}{121} a^3 \pi \sqrt{33}.$$

De gevraagde betrekking tuſſchen deze twee inhouden is bijgevolg

$$Inh\ bol : Inh. pir. = \tfrac{32}{121} . \pi \sqrt{3} : \tfrac{1}{12} = 384 . \pi \sqrt{3} : 121.$$

Voor het tweede gedeelte van het vraagſtuk ſtellen wij den ſtraal van den bol $AG = r$, en dan hebben wij gevonden

$$r = \tfrac{2}{11} a \sqrt{33},$$

waaruit wij gemakkelijk voor de ribben vinden

$$BC = CD = DB = a = \tfrac{1}{6} r \sqrt{33},$$
$$AB = AC = AD = 2a = \tfrac{1}{3} r \sqrt{33}.$$

LXXXII. Voorstel.

Door H. G. Witlage Jr.

Eenige getallen in eene rekenkunſtige reeks te vinden, die gedurig met drie opklimmen, en welker aantal een even getal is, zoodanig, dat de ſom van het kleinſte met het grootſte der twee middelſte gelijk 56, *en de ſom van het grootſte met het kleinſte der twee middelſte gelijk* 110 *is?*

Opgelost *door* H. G. Witlage Jr., H. Foekes Bakker, J. Peereboom, A. van der Swan, R. van Wijk Jz., W. Top Wz., A. J. Brinkerink, G. J. Sarlet en M. B. Jung.

Oplossing *van* H. G. Witlage Jr.

Stel den eerſten term van de reeks x, en het getal der termen $2n$, dan is de reeks

x,

$x;\ x+3,\ x+6,$ *enz.* . . . $x+(2n-1)\times 3$,
en de twee middelste termen, of de n^e en $n+1^e$ term, zijn

$$x+(n-1)\times 3 \quad \text{en} \quad x+n\times 3.$$

Ingevolge van het voorstel hebben wij dus de vergelijkingen

$$2x+3n=56 \quad \text{en} \quad 2x+9n=116,$$

waarvan het verschil geeft $6n=60$ of $n=10$, en hierdoor is $x=\frac{1}{2}(56-3n)=13$. De gevraagde reeks is dus

13, 16, 19, 22, 25, *enz.* . . . . *tot* 70.

LXXXIII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Het getal 135 *in vier deelen te verdeelen, zoodanig, dat in het eerste deel zoo veel maal* 4 *als in het tweede* 5; *en in het derde deel zoo veel maal* 4 *als in het vierde* 7 *begrepen zij; en dat de som van de vierkanten der deelen* 5921 *bedrage?*

OPGELOST *door* W. TOP WZ., J. PEEREBOOM, H. FOEKS BAKKER, G. J. SARLET, R. VAN WIJK JZ., A. VAN DER SWAN, M. B. JONG en H. G. WITLAGE JR.

OPLOSSING *van* W. TOP, WZ.

Stel de deelen, waarin het getal 135 gedeeld moet worden, $4x$, $5x$, $4z$ en $7z$, dan is hierdoor aan twee der voorwaarden voldaan, en er blijven ons nog de volgende vergelijkingen over:

$$9x+11z=135;\qquad 41x^2+65z^2=5921,$$

brengen wij nu de waarde van x uit de eerste vergelijking, dat is

$$x=\frac{135-11z}{9},$$

in de tweede vergelijking over, dan verkrijgen wij

$$\frac{41}{81}(135-11z)^2+65z^2=5921;$$

of, na ontwikkeling en herleiding,

$$z^2-\frac{121770}{10226}z+\frac{267624}{10226}=0,$$

of, wanneer wij $z=9u$ stellen,

$$u^2-\frac{13530}{10226}u+\frac{3304}{10226}=0;$$

 uit

uit welke vierkantsvergelijking gevonden wordt

$$u = 1 \quad \text{en} \quad u = \frac{1652}{5113}.$$

Voor de eerste waarde van u vinden wij $z = 9u = 9$ en $x = \frac{135 - 11z}{9} = 4$, en bijgevolg voor de gevraagde getallen

$$4x = 16,\quad 5x = 20,\quad 4z = 36,\quad 7z = 63.$$

Nemen wij daarentegen $u = \frac{1652}{5113}$, dan vinden wij $z = 9u = 2\,\frac{4642}{5113}$ en $x = \frac{135 - 11z}{9} = 15 - 11\,.\,u = 11\,\frac{2280}{5113}$, en wij verkrijgen alsdan voor de gevraagde getallen:

$$4x = 45\,\frac{4007}{5113},\ 5x = 57\,\frac{1174}{5113},\ 4z = 11\,\frac{3229}{5113},\ 7z = 20\,\frac{1816}{5113}.$$

LXXXIV. VOORSTEL.

Door I. P. DELPRAT.

Eene wig tusschen twee hellende vlakken besloten, welke gelijke hoeken met het waterpasse vlak maken, tracht door hare zwaarte die beide vlakken van elkander te verwijderen, welke ondertusschen niet, dan in horizontale rigting, kunnen uitwijken; men vraagt naar de grootte der krachten, welke, in horizontale rigting tegen deze vlakken aangebragt zijnde, het geheele stelsel in evenwigt zullen houden; de wrijving van de wig langs de hellende vlakken in aanmerking nemende?

OPGELOST. *Door* I. P. DELPRAT.

Zij CDE, *Fig.* 48, eene verticale doorsnede van de wig, en AB en A′B′ die van de hellende vlakken, waartegen de wig rust, kunnende deze vlakken zich niet dan in de rigting GH bewegen. Stellen wij het gewigt van de wig gelijk P, welk gewigt wij vereenigd kunnen denken in de loodregte lijn FE, die door der-

zel-

zelver zwaartepunt gaat. Zij verder ∠ DEF = ∠ FEC = α en de coefficient der wrijving van de wig langs het vlak DE gelijk *Tang* β, dan beteekent, zoo als bekend is, β den hoek van het hellend vlak, waarlangs de wig door de wrijving alleen in evenwigt of in rust gehouden zou worden. Laat eindelijk door F en F′ de krachten voorgesteld worden, welke tegen de hellende vlakken, in horizontale rigting, moeten worden aangebragt, om het geheele stelsel in evenwigt te houden, dan is het klaar, dat deze krachten F en F′ even groot moeten zijn, omdat alles, ter wederzijde van de lijn EF, volkomen hetzelfde is.

Het gewigt van de wig oefent eene drukking loodregt op de hellende vlakken DE en EC uit, welke wij door D zullen voorstellen. Deze drukking brengt eene wrijving langs DE en EC voort, die de beweging langs de hellende vlakken tegenwerkt, en welke voorgesteld kan worden door D *Tang.* β, werkende in de rigtingen ID en KC. Ten einde nu de geheele werking der wrijving door krachten voor te stellen, zoo merke men op, dat wanneer de wrijving langs een hellend vlak een ligchaam in rust houdt, dit vlak, in de rigting der wrijving, eene drukking ondergaat, gelijk aan de werking der wrijving, zoodat, wanneer dit vlak zich in de rigting der wrijving bewegen kon, er eene kracht juist zoo groot als het vermogen der wrijving en in tegengestelde rigting van de wrijving zou moeten worden aangebragt, om het vlak zelf in rust te houden. In ons geval zullen derhalve de vlakken DE en CE, in de rigtingen IE en KE, door eene kracht gelijk D *Tang.* β gedrukt worden, en in plaats van de werking der wrijving, zal men in de punten I en K twee krachten moeten onderstellen, de eene gelijk D *Tang* β, en werkende in de rigting ID en KC op de wig, om derzelver afglijden te verhinderen, en de andere, ook gelijk D *Tang.* β, werkende in de rigting IE en KE op de hellende vlakken DE en EC.

Nu kan men de krachten D *Tang.* β, werkende in de rigtingen KC en ID op de wig, in het punt E, alwaar de zijden van de wig elkander snijden, aangebragt onderstellen, en dezelve aldaar ontbinden in twee krachten, de eene in de rigting EH en EG loodregt op FE, en de andere in de rigting van FE. De krachten in de rigtingen EH en EG vernietigen elkander, als

 zijn-

zijnde even groot en werkende in tegengestelde rigting; die in de rigting van FE, naar denzelfden kant werkende, zoo zal hunne som worden voorgesteld door 2 D *Tang.* β *Cos.* α, welke kracht het gewigt van de wig tegenwerkende, er slechts overblijft P — 2 D *Tang.* β *Cos.* α. Deze kracht in twee andere ontbindende, werkende loodregt op DE en EC in de punten I en K, zoo zal men voor ieder dezer krachten, welke de loodregte drukking D van de wig op de hellende vlakken DE en CE voorstellen, hebben

$$D = \frac{P - 2 D \, Tang. \, \beta \, Cos. \, \alpha}{2 \, Sin. \, \alpha} \quad \ldots\ldots (1),$$

waaruit de grootte der drukking kan gevonden worden.

Verder blijkt het, dat de krachten D, F en D *Tang.* β, welke op het punt I werken, met elkander in evenwigt moeten zijn. Ontbindende dan de kracht D in eene horizontale en in eene verticale kracht, zoo zal men voor de eerste hebben D *Cos.* α en voor de tweede D *Sin.* α.

Op dezelfde wijze de kracht D *Tang.* β, werkende in het vlak DE, ontbindende, zoo heeft men voor de hieruit ontstaande horizontale kracht, in de rigting IM werkende, D *Tang.* $\beta \times$ *Sin.* α, en voor de verticale D *Tang.* $\beta \times$ *Cos.* α.

De kracht F eindelijk zelf horizontaal zijnde, zoo zal men voor het evenwigt in de rigting FI moeten hebben

$$F + D \, Tang. \, \beta \, Sin. \, \alpha = D \, Cos. \, \alpha \quad \ldots (2)$$

terwijl de loodregte drukking op GE zal worden voorgesteld door

$$D \, Sin. \, \alpha + D \, Tang. \, \beta \, Cos. \, \alpha \quad \ldots (3)$$

welke laatste door het vlak GE zal worden gedragen.

Wanneer men nu uit de vergelijking (1) de waarde van D zoekt, dan vindt men

$$D = \frac{P}{2 \, (Sin \, \alpha + Tang. \, \beta \, . \, Cos. \, \alpha)} = \frac{P \, Cos. \, \beta}{2 \, Sin. \, (\alpha + \beta)} \quad \ldots (4)$$

welke waarde in (2) overgebragt, de volgende waarde voor F doet kennen;

$$F = D \, (Cos \, \alpha - Tang. \, \beta \, . \, Sin. \, \alpha) = \frac{P \, Cos. \, \beta}{2 \, Sin. \, (\alpha + \beta)} \, (Cos. \, \alpha - Tang. \, \beta \, Sin \, \alpha)$$

$$= \frac{P}{2 \, Sin. \, (\alpha + \beta)} \, (Cos. \, \alpha \, Cos. \, \beta - Sin. \, \alpha \, Sin \, \beta) = \tfrac{1}{2} P \, Cot. \, (\alpha + \beta) \ldots (5)$$

Wil

Wil men eindelijk de verticale drukking kennen, door de formule (3) voorgesteld, zoo vindt men voor dezelve

$$D\ (Sin.\ \alpha + Tang.\ \beta\ Cos.\ \alpha) = \tfrac{1}{2}\ P,$$

zoo als ook uit den aard der zake moet volgen.

Het voorstel kan ook nog op de volgende wijze worden opgelost, waardoor men, offchoon langs eenen geheel anderen weg, tot dezelfde uitkomsten geraakt.

De horizontale werking der wig op de beide hellende vlakken dezelfde zijnde, zoo hebben wij slechts de eene helft DEF, *Fig.* 49, te beschouwen, daarbij in acht nemende, dat dit gedeelte niet dan in de rigting FE bewogen kan worden, zoodat men onderstellen kan, dat de lijn FE een onbewegelijk verticaal vlak voorstelt, waartegen de wig steunt, zonder tegen dit vlak eenige wrijving uit te oefenen. In plaats van het vlak FE onbewegelijk aan te nemen, stellen wij loodregt tegen hetzelve eene kracht F′, welke evenwigt maakt met de drukking van de wig DEF tegen EF, en dan moet klaarblijkelijk, om het geheele stelsel in rust te houden, tegen het hellende vlak AD eene horizontale kracht F aangebragt worden, welke kracht even zoo groot als F′ moet wezen, dewijl, in de onderstelling van F > of < F′, het geheele stelsel zich ter regter- of linkerhand zijdelings zou bewegen.

De oplossing van ons vraagstuk komt dus hierop neder: de kracht F′ te bepalen, welke loodregt tegen EF aangebragt zijnde, de wig DEF langs het vlak AB in evenwigt zal houden, de wrijving langs AB in aanmerking nemende.

Het gewigt $\frac{1}{2}$ P van de wig DEF dan wederom, even als in de voorgaande oplossing, in eene kracht IH loodregt op AD, en in eene andere langs AD ontbindende, zoo is de wrijving, welke door de drukking op AB voortgebragt wordt, gelijk $\frac{1}{2}$ P *Sin.* α *Tang.* β, en de kracht langs AD gelijk $\frac{1}{2}$ P *Cos.* α. De kracht F′ nu op dezelfde wijze ontbindende, dan is de drukking op AB gelijk F′ *Cos.* α, en de wrijving hierdoor veroorzaakt gelijk F′ *Cos.* α *Tang.* β, terwijl de kracht in de rigting ID gelijk is aan F′ *Sin.* α, en met de wrijving medewerkt, om de wig in rust te houden. Wij hebben alzoo voor de evenwigtsvergelijking:

$$F'\ Sin.\ \alpha + \tfrac{1}{2}\ P\ Sin.\ \alpha\ Tang.\ \beta + F'\ Cos.\ \alpha\ Tang.\ \beta = \tfrac{1}{2}\ P\ Cos.\ \alpha,$$

 waar-

waaruit men vindt:

$$F' = F = \tfrac{1}{2} P \times \frac{Cos.\ \alpha - Sin.\ \alpha\ Tang.\ \beta}{Sin.\ \alpha + Cos.\ \alpha\ Tang.\ \beta}$$

$$= \tfrac{1}{2} P \times \frac{1 - Tang.\ \alpha\ Tang.\ \beta}{Tang.\ \alpha + Tang.\ \beta} = \tfrac{1}{2} P\, Cot.\ (\alpha + \beta),$$

zijnde dit dezelfde uitdrukking, welke wij door de voorgaande oplossing gevonden hebben.

Aanmerkingen. Zoo lang $\alpha + \beta < 90^\circ$ blijft, ziet men, dat F altijd positief zal blijven en grooter zal worden, naarmate $\alpha + \beta$ vermindert. Wordt $\alpha = 0$, dat is, zijn de beide hellende vlakken loodregt, *Fig.* 50, dan wordt

$$F = \tfrac{1}{2} P\ .\ Cot.\ \beta,$$

en duidt de kracht aan, waarmede het prisma AD tusschen twee loodregte vlakken moet geklemd worden, om door de wrijving alleen opgehouden te worden. Deze waarde van F komt ook overeen met hetgeen men zou vinden, door dit bijzonder geval regtstreeks op te lossen; want de wrijving, door de drukking F voortgebragt, is F *Tang.* β; deze moet nu aan het gewigt $\tfrac{1}{2}$ P van het halve prisma AD gelijk zijn, en derhalve heeft men F *Tang.* $\beta = \tfrac{1}{2}$ P of F $= \tfrac{1}{2}$ P *Cot.* β.

Neemt men α negatief aan, dat is, laat men de hellende vlakken in den stand van *Fig.* 51 komen, dan wordt de kracht F voorgesteld door

$$F = \tfrac{1}{2} P\ Cot.\ (\beta - \alpha).$$

Voor $\alpha < \beta$ blijft F alsdan nog positief, doch wordt grooter naarmate α digter tot β nadert, en deze aangroeijing, de reden der cotangenten volgende, neemt dezelve voor kleine verschillen tusschen α en β zeer snel toe. Is $\alpha = \beta$, dan wordt F oneindig, dat is, het wordt onmogelijk, de wig tusschen de hellende vlakken in rust te houden.

Wanneer, in de formule F $= \tfrac{1}{2}$ P *Cot.* $(\alpha + \beta)$, de som der hoeken $\alpha + \beta > 90^\circ$ wordt, dan is F negatief, en voor $\alpha + \beta = 90^\circ$ is F $= 0$. Dit komt weder overeen, met hetgeen uit de enkele beschouwing van de figuur kan worden afgeleid; want $\alpha + \beta = 90^\circ$ zijnde, zoo is $\alpha = 90^\circ - \beta$, dat is, het hellende vlak maakt met eenig waterpas vlak een' hoek, gelijk de wrijvingshoek β, en dan moet de wig, hoe zwaar

de

dezelve dan ook wezen moge, uit zich zelve door de wrijving in rust blijven, en er behoeft alzoo in dit geval geene horizontale kracht te worden aangebragt, om tot dit evenwigt mede te werken. Voor $\alpha + \beta > 90°$ wordt de helling van het hellend vlak met een waterpas vlak kleiner dan de wrijvingshoek β; in dit geval is dus de wrijving niet alleen genoegzaam, om de wig in rust te houden, maar er zou zelfs nog eene kracht in tegengestelde rigting kunnen worden aangebragt, voor en aleer het evenwigt verbroken werd: en dit toont de formule aan, door F negatief te geven.

Het opgeloste Voorstel is van veel belang bij de beschouwing van de werking der steenen van een gewelf, tegen de regtstanden en onderling op elkander.

LXXXV. Voorstel.

Door I. R. Schmidt.

Op het oppervlak van eenen regten cirkelvormigen kegel is eene kromme lijn beschreven, welke met alle schuinsche zijden gelijke hoeken maakt. Men vraagt de vergelijking der projectiën van deze kromme lijn, zoo wel op het grondvlak van den kegel, als op eenig vlak, dat door de as des kegels gaat, te bepalen, en tevens aan te wijzen, hoe deze projectiën door punten kunnen worden geconstrueerd?

Oplossing. *Door* I. R. Schmidt.

Zij TO, *Fig.* 52, de as van den kegel, en ABCD eenig vlak, dat loodregt door het punt O van de as gaat, en dat wij als het horizontale vlak van projectie aannemen. Zij verder APE eenig gedeelte van de kromme lijn, die met al de schuinsche zijden TA, TQ, *enz.* gelijke hoeken maakt, en laat AMF de horizontale projectie verbeelden, gevormd door den voet der loodlijnen, welke uit de punten P der kromme lijn op het grondvlak vallen. Stellen wij nu, ter bepaling van den kegel, de schuinsche

zijde TA $=$ TQ $=$ TB $= a$, de hoogte TO $= h$, den ſtraal van het grondvlak OA $=$ OQ $=$ OB $= r$, en den halve tophoek ATO $=$ QTO $= \alpha$, dan hebben er tusſchen deze gegevens de volgende betrekkingen plaats:

$r^2 + h^2 = a^2$, $r = h$ *Tang.* α, $a = r$ *Coſec.* $\alpha = h$ *Sec.* α.

Laat nu P en p twee naburige punten van de kromme lijn zijn, en brengen wij door P een vlak HPG evenwijdig met het grondvlak; ſtellen wij verder den boog AQ $= z$ en het ſtuk QP $= v$, dan is Q$q = \delta z$ en pR $= \delta v$, en om het boogje PR te berekenen, hebben wij TQ : TP $=$ Qq ; PR of $a : a - v = \delta z$: PR, waaruit

$$\text{PR} = \frac{a - v}{a}\,\delta z.$$

Stellen wij vervolgens den conſtanten hoek pPR, welken de kromme lijn met de ſchuinſche zijden van den kegel maakt, gelijk δ, dan is in het regthoekige driehoekje RPp, dat wij als regtlijnig kunnen beſchouwen,

$$\text{PR} \times Tang.\ \delta = p\text{R},$$

of

$$\frac{a - v}{a}\,\delta z \,.\, Tang.\ \delta = \delta v,$$

waaruit

$$\delta z = \frac{a}{Tang.\ \delta} \cdot \frac{\delta v}{a - v},$$

dus

$$z = \frac{a}{Tang.\ \delta} \int \frac{a - v}{\delta v} = a\,Cot.\ \delta \times Nep.\ Log. \frac{1}{a - v} + \text{C}.$$

Daar wij nu z van het punt A hebben afgerekend, waarin de kromme lijn het horizontale vlak doorſnijdt, zoo moet voor $v = 0$ ook $z = 0$ zijn, en dit geeft ons

$$\text{C} = a\ Cot.\ \delta \times Nep.\ Log.\ a,$$

waardoor wij voor de vergelijking der kromme lijn op het oppervlak verkrijgen

$$z = a\ Cot.\ \delta \times Nep.\ Log. \frac{a}{a - v}.$$

Om hierdoor tot de polaire vergelijking van de horizontale projectie AMF te geraken, ſtellen wij $\angle$ AOM $= \phi$ en OM $= y$; wij hebben hierdoor terſtond

$$z = r\phi \quad \text{of} \quad \phi = \frac{z}{r},$$

en

en brengende hierin de gevondene waarde van z over

$$\phi = \frac{a}{r} \, Cot. \, \delta \times Nep. \, Log. \, \frac{a}{a - v},$$

of, omdat $\frac{a}{r} = Cosec. \, \alpha = \frac{1}{Sin. \, \alpha}$ is,

$$\phi = \frac{Cot. \, \delta}{Sin. \, \alpha} \times Nep. \, Log. \, \frac{a}{a - v},$$

Brengen wij nu door het punt P en de as van den kegel een plat vlak, en trekken wij in hetzelve PS loodregt op TO, dan is PS = OM = y en de gelijkvormige driehoeken TQO en TPS geven ons TQ : TP = OQ : SP of $a : a - v = r : y$ waaruit volgt

$$a - v = \frac{a}{r} \, y \quad \text{en} \quad \frac{a}{a - v} = \frac{r}{y},$$

en wanneer wij dit in de gevondene waarde van ϕ overbrengen, dan komt er voor de gevraagde polaire vergelijking van de horizontale projectie

$$\phi = \frac{Cot. \, \delta}{Sin. \, \alpha} \times Nep. \, Log. \, \frac{r}{y},$$

of

$$y = \frac{r}{e^{\phi \, Sin. \, \alpha \, Tang. \, \delta}} = r \, . \, e^{-\phi \, Sin. \, \alpha \, Tang. \, \delta}.$$

De horizontale projectie is alzoo eene logarithmische spiraal, en doorsnijdt bijgevolg al de stralen van het grondvlak onder gelijke hoeken.

Ter bepaling van de verticale projectie onzer kromme lijn, trekken wij in het grondvlak de middellijn DB loodregt op den straal OA, die door het punt A gaat, waarin de kromme lijn het grondvlak doorsnijdt, en brengen door deze middellijn en den as van den kegel een vlak DTB, hetwelk wij als het verticale vlak van projectie aannemen, en de verticale projectie ONE van de kromme lijn wordt alsdan gevormd door de voetpunten N van de loodlijnen PN, die uit de punten P van de kromme lijn op dit vlak DTB vallen, en alzoo alle evenwijdig met AO loopen.

Stellen wij nu de regthoekige coördinaten van het punt N der verticale projectie, OS = t en SN = u, dan hebben wij vooreerst, omdat OS = OT − TS en TS = SP × $Cot. \, \alpha$ is,

$t =$

$$t = h - y\ Cot.\ \alpha,$$

waaruit $$y = (h - t)\ Tang.\ \alpha;$$

verder is in den driehoek PSN, ∠ N = 90° en ∠ S = 90° − ϕ, waaruit volgt

$$SN = u = y\ Sin.\ \phi,$$

en brengende hierin de waarde van y, dan komt er

$$u = (h - t)\ Tang.\ \alpha\ .\ Sin.\ \phi,$$

waaruit $$Sin.\ \phi = \frac{u}{(h - t)}\ .\ Cot.\ \alpha.$$

Daar nu uit de vergelijking voor de horizontale projectie, dat is,

$$\phi = \frac{Cot\ \delta}{Sin.\ \alpha} \times Nep.\ Log.\ \frac{r}{y}$$

volgt $$Sin.\ \phi = Sin.\ \left\{\frac{Cot.\ \delta}{Sin.\ \alpha} \times Nep.\ Log.\ \frac{r}{y}\right\}$$

zoo verkrijgen wij, door hierin de gevondene waarden van $Sin.\ \phi$ en y te substitueren,

$$\frac{u}{h-t}\ .\ Cot.\ \alpha = Sin.\ \left\{\frac{Cot.\ \delta}{Sin.\ \alpha} \times Nep.\ Log.\ \frac{r\ Cot.\ \alpha}{h - t}\right\},$$

dat is, omdat $r\ Cot.\ \alpha = h$ is, na herleiding,

$$u = (h - t)\ Tang.\ \alpha \times Sin.\ \left\{\frac{Cot.\ \delta}{Sin.\ \alpha}\ Nep.\ Log.\ \frac{h}{h - t}\right\}.$$

Stellen wij dus TS $= h - t = w$, dat is, nemen wij den oorsprong der abscisfen in T aan, dan wordt de vergelijking van de verticale projectie

$$u = w\ Tang.\ \alpha \times Sin.\ \left\{\frac{Cot.\ \delta}{Sin.\ \alpha}\ .\ Nep.\ Log.\ \frac{h}{w}\right\}.$$

De vergelijkingen der twee projectiën alzoo bepaald hebbende, gaan wij over, om het een en ander ten opzigte van den vorm dezer projectiën op te teekenen, en wij bepalen ons hierbij alleen tot de verticale projectie, omdat de horizontale eene logarithmifche fpiraal is, waarvan de eigenfchappen algemeen bekend zijn.

Stellen wij alzoo in de laatfte vergelijking $w = h$, dan wordt de tweede factor nul, en dus $u = o$, de kromme lijn gaat alzoo door het punt O; hetgeen ook uit het voorgaande blijkbaar was.

Stel-

Stellen wij $w = 0$, dan wordt de eerste factor nul en de tweede heeft eene eindige waarde; want offchoon door deze stelling $\frac{h}{w}$ en dus ook $\frac{Cot.\ \delta}{Sin.\ \alpha} \times Nep.\ Log.\ \frac{h}{w}$ oneindig wordt, zoo moet de sinus van dezen oneindig grooten boog toch altijd eene eindige waarde behouden, die niet grooter dan de eenheid kan zijn. Hieruit volgt dan, dat $w = 0$ ook $u = 0$ maakt, en dat alzoo het punt T als een punt van de verticale projectie moet worden beschouwd, en hieruit volgt verder, dat de kromme lijn APE mede door den top van den kegel gaat. Deze kromme lijn kan echter den top niet bereiken, zonder oneindig veel malen om denzelven te hebben heen gewenteld; want de kromme lijn met al de schuinsche zijden eenen standvastigen hoek makende, is het klaar, dat dezelve oneindig veel omwentelingen om den kegel maakt, en meer en meer tot den top nadert, zonder denzelven, offchoon zij er digter bij komt dan eenige te geven grootheid, ooit volkomen te bereiken. Deze omstandigheid wordt nog meer bevestigd door den vorm van de horizontale projectie, welke, als logarithmische spiraal, niet dan na een oneindig aantal omwentelingen in het middelpunt O valt, en hieruit moet het reeds duidelijk worden, dat de verticale projectie niet in den top T kan komen, dan na de as OT oneindig veel malen gesneden, en de lijnen TX en TX′ oneindig veel malen aangeraakt te hebben. De vergelijking van de verticale projectie toont ook deze eigenschappen ten duidelijkste aan. Om, namelijk, de punten te bepalen, waarin de kromme lijn de as OT snijdt, moeten wij

$$Sin.\ \left\{\frac{Cot.\ \delta}{Sin.\ \alpha} \times Nep.\ Log.\ \frac{h}{w}\right\} = 0,$$

en dus

$$\frac{Cot.\ \delta}{Sin.\ \alpha} \times Nep.\ Log.\ \frac{h}{w} = n\pi$$

stellen, waarin alsdan n elk geheel positief of negatief getal verbeeldt. Zonderen wij nu hieruit w af, dan vinden wij

$$w = h \times e^{-n\pi\ Sin.\ \alpha\ Tang.\ \delta}$$

en dit is nu de uitdrukking voor het oneindig aantal abscissen, bij welke $u = 0$ is; $n = 0$ geeft namelijk het punt O; $n = 1, 2, 3$, enz. geeft het oneindig aantal snijpunten tusschen O en T, het punt T zelf wordt verkregen door n oneindig te stel-

ſtellen; en wanneer wij $n = -1, -2, -3$, *enz.* ſtellen; verkrijgen wij het oneindig aantal ſnijpunten, die, beneden O, op de onbepaald verlengde as OY vallen. Negatieve waarden voor w kunnen er eindelijk niet beſtaan, omdat w negatief nemende *Nep. Log.* $\frac{h}{w}$ en dus u onbeſtaanbaar wordt, waaruit wij opmaken, dat de kromme lijn in T te niet loopt, zonder ooit in het bovenſte kegelvlak te kunnen geraken.

Daar verder de ſinus van eenigen boog nooit grooter dan de eenheid kan wezen, zoo volgt hieruit, dat u niet grooter kan zijn dan w *Tang.* α; nu is $u = w$ *Tang.* α de vergelijking van de lijn TX′ en $u = -w$ *Tang.* α die van de lijn TX, waaruit dan volgt, dat de verticale projectie geheel binnen den hoek XTX′ moet gelegen zijn, hetgeen ook bovendien uit den aard der zaak was op te maken, daar deze hoek XTX′ de projectie van al de punten des kegelvlaks in zich bevat. Om alzoo te bepalen, voor welke waarden van w de verticale projectie door de lijnen TX′ en TX wordt aangeraakt, zullen wij alleen

$$w \, Tang.\, \alpha \times Sin. \left\{ \frac{Cot.\, \delta}{Sin.\, \alpha} \cdot Nep.\, Log.\, \frac{h}{w} \right\} = \pm\, w \, Tang.\, \alpha,$$

of

$$Sin. \left\{ \frac{Cot.\, \delta}{Sin.\, \alpha}\, Nep.\, Log.\, \frac{h}{w} \right\} = \pm\, 1,$$

dat is

$$\frac{Cot.\, \delta}{Sin.\, \alpha} \cdot Nep.\, Log.\, \frac{h}{w} = \pm\, (n + \tfrac{1}{2})\, \pi,$$

behoeven te ſtellen, en hierdoor verkrijgen wij ter bepaling van dit oneindig aantal raakpunten

$$w = h\, .\, e^{\mp (n + \frac{1}{2})\pi\, Sin.\, \alpha\, Tang.\, \delta}$$

waarin nu wederom voor n elk geheel getal kan worden genomen.

Er blijft ons dan alleen over om aan te toonen, hoe beide de projectiën door punten kunnen worden geconſtrueerd. Voor de horizontale projectie behoeft dit bijna geene verklaring, omdat wij de eigenſchappen van de logarithmiſche ſpiraal als geheel bekend aanmerken. Wij herinneren dus alleen, dat wij van de logarithmiſche ſpiraal ſlechts twee punten behoeven te kennen, om dezelve gemakkelijk te kunnen conſtrueren; want daar de polaire

ordinaten, die in dezelve gelijke hoeken met elkander maken, in eene meetkunstige reeks voortgaan, zoo zullen wij de twee ordinaten voor de gegevene punten moeten trekken, en na een onbepaald aantal op elkander volgende hoeken geconstrueerd te hebben, welke alle gelijk zijn aan die van de twee gegevene ordinaten, zullen wij op de beenen der geconstrueerde hoeken stukken moeten afzetten, welke met de twee gegevene ordinaten eene meetkunstige reeks uitmaken, en hierdoor zullen wij zoo veel punten van de logarithmische spiraal vinden als ons goeddunkt. Om tusschenpunten te vinden, zal men de geconstrueerde hoeken midden door moeten deelen, en op de deellijnen ordinaten nemen, middenevenredig tusschen de ordinaten, waartusschen die deellijnen invallen, zoodat men, door deze midden door deeling te herhalen, de punten van de logarithmische spiraal zoo digt bij elkander zal kunnen vinden als men verkiest.

Passen wij dit toe op ons geval, dan kunnen wij onze horizontale projectie op de volgende wijze bekomen. Zij, *Fig.* 53, B′D′T″ de verticale projectie van den kegel; wanneer wij dan T″O verlengen en uit T′ met T′B = OB′ = r eenen cirkel beschrijven, dan stelt dezelve de horizontale projectie van den kegel voor; al de stralen T′Q zijn alsdan de horizontale projectiën van de schuinsche zijden des kegels, en de verticale projectiën van deze zelfde schuinsche zijden worden gevormd door QQ′ loodregt op D′B′ en vervolgens de lijnen T″Q′ te trekken, zoodat alsdan overal T′Q en T″Q′ de horizontale en verticale projectiën van eene zelfde schuinsche zijde des kegels zullen voorstellen. Om nu twee punten van de logarithmische spiraal te verkrijgen, die tot de horizontale projectie van onze kromme lijn behoort, zoo merken wij op, dat vooreerst A een dezer punten is, hebbende O in verticale projectie, en dat, ten andere, de formule

$$y = r \,.\, e^{-\,\phi\ \mathit{Sin.}\ a\ \mathit{Tang.}\ \delta}$$

voor $\phi = 90°$ overgaat in

$$T'F = r \times e^{-\,\frac{1}{2}\pi\ \mathit{Sin.}\ a\ \mathit{Tang.}\ \delta};$$

deze waarde van T′F nu zeer naauwkeurig berekend hebbende, kan men dezelve op T′B van T′ naar F overbrengen, en dan zal men, volgens het boven gezegde,

T′A

T′A : T′F = T′F : T′G = T′G : T′H = T′H : T′I = *enz.* moeten nemen, om de punten G, H, I, *enz.* van de kromme lijn te vinden. Wil men meer punten van de kromme lijn construeren, zoo deele men de regte hoeken midden door, de komende hoeken wederom midden door *enz.*, en men make T′M middenevenredig tusschen T′A en T′F, T′M′ middenevenredig tusschen T′A en T′M, *enz.* en wanneer men hierdoor tot zulke kleine hoeken AT′M′, M′T′M, *enz.* gekomen is, als men tot de constructie noodzakelijk oordeelt, dan neme men de lijnen TA′, T′M′, T′M, T′M″, T′F, T′F′, T′F″, *enz.*, zoodanig, dat zij in eene meetkunstige reeks voortgaan, hetgeen geschiedt, door eenvoudig de hoeken T′AM′, T′M′M, T′MM″, T′M″F, *enz.*, alle even groot te maken.

Op deze wijze de horizontale projectie geconstrueerd hebbende, kan er voor het vinden der verticale projectie geene de minste zwarigheid overblijven; want men zal uit de punten M′, M, M″, *enz.* van de horizontale projectie slechts lijnen te trekken hebben, loodregt door D′B′, totdat zij de overeenkomstige verticale projectiën der schuinsche lijnen, waartoe die punten behooren, in N′, N, N″, *enz.* doorsnijden, en offschoon hierdoor de snijpunten der verticale projectie met de as niet dadelijk gevonden worden, kan men ondertusschen punten van de verticale projectie construeren, die ter wederzijden zoo digt bij de as komen als men zelf verkiest.

Eindelijk merken wij op, dat men eigenlijk niet meer dan eenen tak OEH behoeft te construeren; dewijl al de overige, zoo als H*eh*, *enz.*, met dezen tak gelijkvormig zijn, daar wij voor elke lijn T″Q zullen hebben T″N : T″*n* = T″*n* : T″*n*′ = *enz.*, omdat wij in de horizontale projectie hebben T′M : T′*m* = T′*m* : T′*m*′ = *enz.*

LXXXVI. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Wanneer eene der schuinsche zijden van eenen regten cirkelvormigen kegel met eene eenparige beweging over het oppervlak be-

wogen wordt, terwijl eenig punt in deze schuinsche zijde langs dezelve met eene gelijkmatige snelheid voortgaat, dan zal dit punt op het oppervlak van den kegel eene spiraalvormige kromme lijn beschrijven. Men vraagt de vergelijkingen der kromme lijnen te bepalen, welke voortkomen, door de boven omschrevene kromme lijn op het grondvlak, en op een vlak, dat door de as gaat, te projecteren; alsmede aan te wijzen, hoe deze projectiën door punten kunnen worden geconstrueerd?

OPLOSSING. *Door* I. R. SCHMIDT.

Laat, *Fig.* 52, APE wederom de kromme lijn, AMF derzelver horizontale en ONE derzelver verticale projectie voorstellen; waarbij wij het verticale vlak van projectie op dezelfde wijze bepalen als in het voorgaande voorstel. Geven wij verder aan alle de lijnen en letters, die in de figuur voorkomen, dezelfde beteekenis, welke wij er in het voorgaande voorstel aan hebben toegekend, dan is het uit de vorming van onze kromme lijn klaar, dat in ons tegenwoordig geval v overal evenredig zal zijn met z, en dat wij alzoo, den weg, welken het bewegende punt A, bij elken geheelen omloop van de schuinsche lijn TA, op deze schuinsche lijn aflegt c, en dus BE $= \frac{1}{4}c$ stellende, zullen hebben

$$2r\pi : c = z : v, \quad \text{of} \quad z = \frac{2r\pi}{c} \cdot v,$$

dat is, omdat $z = r\phi$ en dus $\phi = \frac{z}{r}$ is,

$$\phi = \frac{2\pi}{c} \cdot v \qquad \text{en} \qquad v = \frac{c}{2\pi}\,\phi,$$

waaruit verder volgt,

$$\text{MQ} = v\,Sin.\,a = \frac{c\,Sin.\,a}{2\pi} \cdot \phi,$$

$$\text{PM} = \text{OS} = t = v\,Cos.\,a = \frac{c\,Cos.\,a}{2\pi} \cdot \phi.$$

Hieruit trekken wij nu terstond

$$y = r - \text{MQ} = r - \frac{c\,Sin.\,a}{2\pi}\,\phi,$$

voor de vergelijking van de horizontale projectie.

Deze horizontale projectie is niets anders dan de spiraal van Archimedes, want omdat MQ evenredig is met ϕ, zoo kan deze projectie worden aangezien, als voortgebragt door de beweging van het punt, dat op den straal OQ gelijkmatig voortgaat, terwijl deze straal eenparig om het middelpunt O draait.

Voor de verticale projectie moeten wij eene vergelijking tusschen TS $= w$ en SN $= u$ vinden. Hiertoe hebben wij in den regthoekigen driehoek SPN

$$u = y \; Sin. \; \phi,$$

en daar wij boven vonden

$$t = \frac{c \; Cos. \; a}{2\pi} \phi \qquad \text{of} \qquad \phi = \frac{2\pi}{c \; Cos. \; a} \, . \, t$$

zoo geeft dit

$$u = y \times Sin. \left\{ \frac{2\pi}{c \; Cos. \; a} \, . \, t \right\}.$$

Daar er verder uit den driehoek TSP volgt

$$y = (h - t) \; Tang. \; a,$$

zoo verkrijgen wij

$$u = (h - t) \; Tang. \; a \, . \, Sin. \left\{ \frac{2\pi}{c \; Cos. \; a} \, . \, t \right\},$$

en dewijl $w = h - t$ is, zoo komt er eindelijk voor de vergelijking van de verticale projectie

$$u = w \; Tang. \; a \times Sin. \left\{ \frac{2\pi}{c \; Cos. \; a} \, . \, (h - w) \right\}.$$

Daar $Sin. \left\{ \frac{2\pi}{c \; Cos. \; a} (h - w) \right\}$ voor alle positieve en negatieve waarden van w bestaanbaar is, zoo zal de kromme lijn zoo wel in het bovenste als in het benedenste kegelvlak tot in het oneindige voortloopen. De verticale projectie zal verder geheel binnen de hoeken XTX′ en xTx' begrepen zijn, omdat de Sinus nooit grooter dan 1 zijnde, u nooit grooter dan w *Tang.* a kan worden. Zij doorsnijdt de as yY in oneindig veel punten, welke gevonden worden door

$$Sin. \left\{ \frac{2\pi}{c \; Cos. \; a} (h - w) \right\} = 0,$$

dat is,

$$\frac{2\pi}{c \; Cos. \; a} (h - w) = \pm n\pi$$

te

te stellen; waaruit ter bepaling dezer snijpunten volgt

$$t = h - w = \pm \tfrac{1}{2} n \, . \, c \, Cos. \, a,$$

waarin n elk geheel getal beteekenen kan, en waaruit volgt, dat al deze snijpunten op gelijke afstanden liggen, die gelijk zijn aan $\frac{1}{2} c \, . \, Cos. \, a$, dat is, gelijk $2 \times$ EF.

Boven en behalve alle deze snijpunten, heeft de verticale projectie met de as yY nog de top T gemeen, omdat voor $w = 0$ ook $u = 0$ wordt.

De verticale projectie raakt de lijnen xX en x'X' in oneindig veel punten aan, welke gevonden worden door $u = \pm w Tang. \, a$, en bijgevolg

$$Sin. \left\{ \frac{2\pi}{c \, Cos. \, a} (h - w) \right\} = \pm 1$$

te stellen; en hiertoe vinden wij

$$t = h - w = \pm (n + \tfrac{1}{2}) \times \tfrac{1}{2} c \, Cos. \, a,$$

waaruit volgt, dat deze raakpunten mede op gelijke afstanden van elkander liggen, en dat derzelver ordinaten u juist op de helft vallen tusschen de punten, waarin de kromme lijn door de as gaat.

De constructie bevestigt alle deze omstandigheden volkomen. Met die van de horizontale projectie zullen wij ons hier niet ophouden, daar de spiraal van Archimedes algemeen bekend is, en wij gaan dus terstond tot de constructie van de verticale projectie over. Het is voor dezelve genoegzaam op te merken, dat $t = \frac{c \, Cos. \, a}{2\pi} \times \phi$ zijnde, t evenredig is met ϕ, en dat alzoo $\phi = \frac{n}{m} \times 2\pi$ zijnde, ook $t = \frac{n}{m} \times c \, Cos. \, a$, dat is, $t = \frac{n}{m} \times 4$ EF zal wezen. Indien dus DTB, *Fig.* 54, het verticale vlak van projectie voorstelt, en wij beschrijven op DB eenen halven cirkel, en nemen OE = 4 EF van figuur 52, dan zullen, voor elk punt Q, OQ en TQ' de projectien van eene zelfde schuinsche zijde zijn. Nemende dus OS : OE = AQ : DAB, en trekken wij SN evenwijdig met DB, zal dan N een punt van de verticale projectie der kromme lijn wezen. Het geschiktste middel, om in weinig tijds een zeer groot aantal punten

 der

der kromme lijn te construeren, bestaat alzoo hierin, dat wij den halven omtrek DAB en de halve hoogte OF, in evenveel gelijke deelen verdeelen (in de figuur hebben wij er acht aangenomen); uit de deelpunten van den halven cirkel loodlijnen op DB, en van daar lijnen naar T trekken; vervolgens op de as Yy een onbepaald aantal stukken gelijk OS naast elkander uitzetten, en door al deze punten evenwijdige lijnen met DB trekken: de doorsnijding van deze achtervolgende lijnen met de achtervolgende lijnen TQ′ zal alsdan zoo veel punten van de kromme lijn doen kennen, als men stukjes OS op Oy heeft uitgezet. De aandachtige beschouwing van *Fig.* 54 zal dit duidelijker maken dan eene wijdloopige verklaring, en zal bovendien aantoonen, dat de kromme lijn in de hoeken XTX′ en xTx', voor al die gevallen, waarin OE, of OF een evenmatig deel van OT is, eenen symetrieken vorm zal hebben.

LXXXVII. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Op welke wijze zal men, uit een gegeven punt, buiten eenen gegevenen cirkel, twee raaklijnen aan dien cirkel kunnen trekken, zonder hiervoor een' passer te gebruiken, dat is, zonder op eenige wijze van cirkelbogen gebruik te maken?

OPLOSSING. *Door* R. LOBATTO.

Men trekke uit het gegeven punt A, *Fig.* 55, twee willekeurige snijlijnen ABC en ADE door den cirkel, trekke vervolgens de koorden BE en CD, welke elkander binnen den cirkel in F, alsmede de koorden DB en EC, welke elkander, verlengd zijnde, buiten den cirkel in G doorsnijden. Trekt men nu de lijn GF, dan zijn de punten M en N, waarin dezelve den cirkel doorsnijdt, de gevraagde raakpunten, en er blijft dan niet meer over, dan de lijnen AM en AN werkelijk te trekken.

Het bewijs dezer constructie is zeer gemakkelijk, wanneer men het

het 14e Boek der Meetkunst van den Heer J. DE GELDER heeft bestudeerd. Want volgens de 8e stelling van dit boek worden de snijlijnen AC en AE, de eerste in de punten P en B, en de tweede in de punten Q en D; harmonisch gesneden, en wanneer wij hierop het 2e gedeelte van de 2e hulpstelling uit dit zelfde boek toepassen, dan blijkt het terstond, dat de lijnen AM en AN raaklijnen aan den cirkel moeten zijn.

LXXXVIII. VOORSTEL.

Door W. TOP WZ.

Het jaartal der geboorte van onzen vaderlandschen geleerde HUGO DE GROOT *wordt met vier getalmerken geschreven; wanneer men het vierde en derde getalmerk, van de eenheden afgerekend, naast elkander plaatst, en alzoo de duizendtallen tot tientallen en de honderdtallen tot eenheden maakt, zoo wordt hierdoor een driehoekig getal geboren, waarvan de wortel het getal is, dat in het jaartal de honderdtallen uitdrukt. Stelt men het tweede cijfer achter het vierde, zoo verkrijgt men hierdoor een getal, waarvan de helft een quadraat is, welks wortel het aantal der eenheden van het jaartal is. Schrijft men eindelijk het vierde getalmerk achter het tweede, dan komt er een quadraat, waarvan de wortel gelijk is aan driemaal het eerste cijfer van het jaartal. Indien de som der cijfers van het jaartal in het zestallig stelsel wordt uitgedrukt, dan wordt deze som met twee getalmerken geschreven, welke drie verschillen, en waarvan het cijfer, dat de eenheden uitdrukt, het grootste is; en indien men dit grootste dezer twee getalmerken quadrateert, dan verkrijgt men in ons talstelsel dezelfde getalmerken, in dezelfde orde naast elkander geplaatst. Men vraagt hierdoor dit jaartal te bepalen?*

OPGELOST *door* M. B. JUNG, W. TOP WZ., A. VAN DER SWAN, H. FOEKES BAKKER, J. PEEREBOOM en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* M. B. JUNG.

Stel het gevraagde jaartal

$$1000\,x + 100\,y + 10\,z + v,$$

 dan

dan geeft het voorstel de volgende vergelijkingen aan de hand

$$x + y + z + v = 6p + q \;(1),\quad q^2 = 10p + q \;(2),$$

$$q = p + 3 \;\ldots\ldots\; (3),\quad 10x + y = \frac{y^2 + y}{2} \;(4),$$

$$\frac{10x + z}{2} = v^2 \;\ldots\ldots\; (5),\quad 10z + x = 9v^2 \;(6).$$

De drie eerste dezer vergelijkingen beschouw ik als niet noodzakelijk tot de oplossing van het vraagstuk, omdat hetzelve door middel van de drie laatste, zonder eenige zwarigheid, kan worden opgelost.

Brengen wij namelijk de waarde van v^2 uit (5) in (6) over, dan verkrijgen wij

$$10z + x = \tfrac{9}{2}(10x + z),$$

waaruit wij gemakkelijk vinden

$$z = 8x.$$

Deze waarde van z in de vergelijking (5) gesubstitueerd, komt er

$$v^2 = 9x,$$

waaruit blijkt, dat x een quadraat moet zijn, omdat anders $9x$ geen quadraat zou kunnen wezen.

Nu moeten x en v beide kleiner dan tien zijn, en hieruit volgt, dat x niet anders dan 1 kan wezen; want namen wij $x = 0$, dan zou het gevraagde getal slechts uit drie cijferletters bestaan, omdat er alsdan geene duizendtallen in hetzelve zouden voorkomen; en namen wij x grooter dan 1, dan zou z grooter dan 9 worden, hetgeen in ons tientallig stelsel niet gebeuren kan.

Daar dan $x = 1$ is, zoo is $z = 8$ en $v = 3$, en hierdoor gaat de vergelijking (4) over in

$$y^2 - y = 20,$$

waaruit gevonden wordt $y = 5$ of $y = -4$; daar y echter in ons geval niet negatief kan genomen worden, zoo hebben wij eindelijk $x = 1$, $y = 5$, $z = 8$ en $v = 3$, waaruit volgt, dat 1583 het gevraagde jaartal is.

LXXXIX. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Men vraagt een' rationalen cubus van drie getalmerken te vinden, zoodanig, dat de som der cijfers een rationaal quadraat zij?

OPGELOST *door* M. B. JUNG, R. VAN WIJK Jz., W. TOP Wz., J. PEERBOOM en H. FOEKES BAKKER.

OPLOSSING *van* M. B. JUNG.

Daar de cubus drie getalmerken moet hebben, kunnen wij denzelven voorstellen door

$$100x + 10y + z = p^3$$

en dan moeten wij bovendien door het voorstel hebben:

$$x + y + z = q^2.$$

Deze vergelijkingen van elkander aftrekkende, blijft er

$$99x + 9y = p^3 - q^2,$$

waaruit
$$y = \frac{p^3 - q^2}{9} - 11x.$$

Stellen wij nu p en q beide deelbaar door 3, dan zal $p^3 - q^2$ deelbaar zijn door 9, en bijgevolg zal y alsdan een geheel getal worden. Stellen wij dus $p = 3m$ en $q = 3n$, dan komt er

$$y = (3m^3 - n^2) - 11x.$$

Hierin kan nu voor n niets anders dan 1 genomen worden, want was $n = 0$ of negatief, dan zou ook q en dus de som der cijfers nul of negatief worden, hetgeen onmogelijk is; en was n gelijk of grooter dan 2, dan zou q gelijk of grooter dan 6 en q^2, dat is de som der cijferletters, gelijk of grooter dan 36 worden, hetgeen mede onmogelijk is, omdat de som der cijferletters van een getal, dat uit drie cijferletters bestaat, nooit grooter dan 27 kan zijn. Wij hebben dus $n = 1$, en bijgevolg $q = 3$, zoodat

$$x + y + z = 9,$$

en
$$y = (3m^3 - 1) - 11x.$$

Verder kan m geene andere waarde hebben dan 2, want was

 de-

dezelve o of negatief, dan zou y negatief worden. Was $m = 1$, dan zou $y = 2 - 11x$ zijn, en dan zou om y positief te maken $x = 0$ moeten genomen worden, en het getal zou dus uit niet meer dan twee cijferletters bestaan, hetgeen tegen de opgaaf strijdt. Was eindelijk m gelijk of grooter dan 3, dan zou p gelijk of grooter dan 9 en dus p^3 of het gevraagde getal gelijk of grooter dan 729 zijn, hetgeen wederom geene plaats kan hebben, omdat 729 niet aan de vraag voldoet en elke grootere cubus uit 4 cijferletters bestaat; wij hebben alzoo $m = 2$ en $p = 6$, zoodat

$$x + y + z = 9,$$

en

$$y = 23 - 11x.$$

Nu kan x niet anders dan 2 zijn, omdat anders y grooter dan 9, of negatief zou worden. Wij hebben bijgevolg $x = 2$, dus $y = 23 - 22 = 1$ en $z = 9 - 3 = 6$, en de gevraagde cubus is 216.

XC. VOORSTEL,

Door R. VAN WIJK Jz.

Men vraagt in elke van twee der overstaande zijden van eenen gegevenen regthoek een punt te vinden, zoodanig, dat de lijn, welke deze twee punten vereenigt, van gegevene lengte is en den regthoek in twee stukken deelt, die tot elkander in gegevene reden staan?

OPGELOST *door* J. W. MARTINI, W. TOP WZ., H. FOEKES BAKKER en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* J. W. MARTINI.

Onderstel dat ABCD, *Fig.* 56, de gegeven regthoek, en PQ de lengte van de gevraagde deellijn is. Indien dan de stukken van den gegeven regthoek tot elkander moeten staan als p tot q, dan beginnen wij met AB zoodanig in I te deelen, dat

AI : IB = $p : q$ is, en wanneer wij alsdan HI evenwijdig met AC trekken, zal

$$regth.\ AH : regth.\ ID = AI : IB = p : q$$

zijn. Deelen wij nu HI midden door in G, en beschrijven wij uit G, met eenen straal gelijk $\frac{1}{2}$ PQ, eenen cirkelboog, de zijden AB en CD in E en F doorsnijdende, dan zullen E en F de gevraagde punten zijn; want vooreerst hebben wij door deze constructie EF = PQ, en omdat de driehoeken EGI en FGH klaarblijkelijk gelijk en gelijkvormig zijn, zoo is

$$Fig.\ ACFE = regth.\ AH,\quad Fig.\ EFDB = regth.\ ID$$

en daar

$$regth.\ AH : regth.\ ID = p : q,$$

is, zoo is dan ook

$$Fig.\ ACFE : Fig.\ EFDB = p : q.$$

Aanmerking. Het blijkt uit deze constructie, dat PQ niet kleiner kan zijn, dan de kleinste zijde AC, en niet grooter kan genomen worden, dan de diagonaal van den regthoek. Verder gaat onze constructie ook even goed door, wanneer de gegevene figuur een parallelogram is.

Wil men de stukken, waarin de lijn EF de zijden van den regthoek verdeelt, berekenen, dan stelle men AB = a, AC = b en PQ = EF = c, en dan volgt uit onze constructie terstond, dat wij hebben

$$AI = CH = \frac{pa}{p+q}, \qquad BI = DH = \frac{qa}{p+q};$$

verder hebben wij

$$EI = HF = \sqrt{(GE^2 - GI^2)} = \tfrac{1}{2}\sqrt{(c^2 - b^2)},$$

en hieruit volgt dan

$$AE = \frac{pa}{p+q} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(c^2 - b^2)}, \quad BE = \frac{qa}{p+q} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(c^2 - b^2)},$$

$$CF = \frac{pa}{p+q} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(c^2 - b^2)}, \quad DF = \frac{qa}{p+q} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(c^2 - b^2)}.$$

XCI. VOORSTEL,

Door R. VAN WIJK Jz.

In eenen gegevenen cirkel een' gelijkbeenigen driehoek te beschrij-

schrijven, zoodanig, dat de inhoud van dezen driehoek tot dien van den cirkel in gegevene reden zij?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, W. TOP WZ. en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Stellen wij den straal van den cirkel r en de gegevene reden van den inhoud des driehoeks tot dien van den cirkel als $p : q$; indien wij dan de hoogte $CD = x$ en de halve bazis $AD = y$ stellen, *Fig.* 57, dan hebben wij door de bekende eigenschap van den cirkel

$$y = \sqrt{(2rx - x^2)}.$$

Nu is de inhoud des driehoeks gelijk xy, en dien van den cirkel $r^2\pi$, en wij hebben bijgevolg

$$xy : r^2\pi = p : q,$$

of

$$x^2y^2 : r^4\pi^2 = p^2 : q^2,$$

dus

$$x^2y^2 = \frac{p^2}{q^2} r^4\pi^2,$$

of

$$x^2(2rx - x^2) = \frac{p^2}{q^2} r^4\pi^2,$$

of ontwikkelende en herleidende

$$x^4 - 2rx^3 + \frac{p^2}{q^2} r^4\pi^2 = 0,$$

uit welke vierde magtsvergelijking de waarde van x en dus die van y moet worden gevonden.

Stellen wij in dezelve $x = rz$, dan verkrijgen wij

$$z^4 - 2z^3 + \frac{p^2}{q^2} \pi^2 = 0,$$

waaruit volgt, dat het voorstel gemakkelijk kan worden opgelost, wanneer de betrekking $\frac{p}{q}$ der inhouden in getallen gegeven is, omdat men alsdan de wortels van onze vergelijking bij benadering zal kunnen vinden.

Hierbij merken wij nog aan, 1°. dat, daar er in onze vergelijking twee op elkander volgende termen ontbreken, dezelve noodzakelijk twee onbestaanbare wortels moet hebben, en dat het vraagstuk alzoo voor niet meer dan twee antwoorden vatbaar kan

kan wezen. 2°. Dat onder al de gelijkbeenige driehoeken, in den cirkel beschreven, de gelijkzijdige driehoek het grootste zijnde (*), de vergelijking twee gelijke wortels zal verkrijgen, in gevalle p tot q in reden is als de inhoud van den gelijkzijdigen driehoek tot dien van den omgeschrevenen cirkel, dat is, als $\sqrt{3} : \frac{4}{3}\pi$.

Stellen wij, om ons hiervan volkomen te overtuigen, $\frac{p}{q} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$, dan gaat de vergelijking over in

$$z^4 - 2z^3 + \frac{27}{16} = 0,$$

waarvan het eerste lid, in derzelver factoren ontleed, geeft

$$(z - \tfrac{3}{2})^2 (z^2 + z + \tfrac{3}{4}) = 0,$$

en deze vergelijking heeft klaarblijkelijk twee wortels gelijk $\frac{3}{2}$, terwijl de twee andere onbestaanbaar zijn; deze twee gelijke wortels geven $x = \frac{3}{2}r$ en bijgevolg den gelijkzijdigen driehoek. 3°. Hieruit volgt dan eindelijk, dat het voorstel onmogelijk zal zijn, zoodra $\frac{p}{q} > \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ is, maar dat er voor elke waarde van $\frac{p}{q} < \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ twee verschillende gelijkbeenige driehoeken kunnen gevonden worden, die aan de vraag voldoen.

XCII. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Rz.

Uit twee der overstaande hoekpunten van eenen regthoek zijn loodlijnen nedergelaten op de diagonaal, welke de twee andere hoekpunten vereenigt. Indien nu deze loodlijnen benevens derzelver afstand gegeven zijn, vraagt men hierdoor dezen regthoek te construeren, en deszelfs zijden en inhoud door berekening te vinden?

Op-

(*) Differentieert men namelijk $Y = x^4 - 2x^3$, en men stelt $\frac{\partial Y}{\partial x} = 0$, dan vindt men $x = 0$, en $x = \frac{3}{2}r$, waarvan de laatste $\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ negatief makende een maximum aanduidt, en dit is juist de hoogte van den gelijkzijdigen driehoek.

Opgelost *door* J. W. Martini, W. Top Wz., H. Foekes Bakker en R. van Wijk Jz.

Oplossing *van* J. W. Martini.

Niets is gemakkelijker dan het opgegeven vraagstuk te construëren. Zij namelijk ACBD, *Fig.* 58, de gevraagde regthoek, dan vallen de loodlijnen AE en BF klaarblijkelijk op gelijke afstanden EG en GF van het snijdingspunt G der diagonalen. Zijn dus AE = BF en EF gegeven, dan behoeven wij slechts AB te trekken, en dit zal dan eene der diagonalen zijn, terwijl de andere gevonden wordt door GC = GD = GA te nemen, dat is, door uit G met GA = GB, als straal, een' cirkel te beschrijven, waardoor dan de geheele regthoek bepaald is.

Om de zijden en den inhoud te berekenen, stellen wij AE = FB = a en EG = GF = b, dan is AG = GB = $\sqrt{(a^2 + b^2)}$, en dus

$$AB = CD = 2\sqrt{(a^2 + b^2)};$$

verder is

$$CE = FD = GC - GE = -b + \sqrt{(a^2 + b^2)},$$

waaruit volgt

$$AC = BD = \sqrt{(AE^2 + CE^2)} = \sqrt{\{2(a^2+b^2) - 2b\sqrt{(a^2+b^2)}\}}$$

en $$BC = AD = \sqrt{(AB^2 - AC^2)} = \sqrt{\{2(a^2+b^2) + 2b\sqrt{(a^2+b^2)}\}}$$

zoodat wij voor den inhoud vinden

$$AC \times BC = 2a\sqrt{(a^2 + b^2)}.$$

XCIII. Voorstel.

Door H. G. Witlage Jr.

Wanneer men zeker getal door 17 *deelt, dan blijft er in de deeling zoo veel over als het quotient bedraagt; maar deelt men dit getal door* 11, *dan blijft er bij deze laatste deeling twee minder over dan bij de eerste, en zes minder dan het quotient der laatste deeling bedraagt. Men begeert dit getal te vinden.* (19)

Op-

(19) J. de Gelder, *Beginselen der Stelkunst, bl.* 245. N°. 27.

OPGELOST *door* J. PEEREBOOM, H. FOEKES BAKKER, H. G. WITLAGE JR., R. VAN WIJK JZ., A. VAN DER SWAN, M. B. JUNG, W. TOP WZ. en G. J. SARLET.

OPLOSSING *van* J. PEEREBOOM.

Stel het quotient, dat men verkrijgt, wanneer men het gevraagde getal door 17 deelt, gelijk x, dan is ook het overschot x, en bijgevolg het getal zelf $17x + x$ of $18x$. Verder is, volgens het vraagstuk, het overschot van de deeling door 11 gelijk $x - 2$, en daar dit overschot zes minder moet zijn dan het quotient dezer deeling, zoo is dit quotient $x + 4$, waaruit blijkt, dat het gevraagde getal ook kan worden voorgesteld door $11(x + 4) + (x - 2)$ of $12x + 42$; deze twee uitdrukkingen voor het gevraagde getal aan elkander gelijk stellende, verkrijgen wij de vergelijking $18x = 12x + 42$, waaruit $6x = 42$ en $x = 7$, zoodat het gevraagde getal gelijk is aan $18x$ of 126.

XCIV. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Twee getallen te vinden, waarvan het eene een volmaakt vierkant is, welks wortel aan het verschil der getallen gelijk zij, onder voorwaarde, dat het product der getallen tot de som van derzelver vierkanten in reden sta, als 30 tot 61? (20)

OPGELOST *door* W. TOP WZ., H. FOEKES BAKKER, H. G. WITLAGE JR., R. VAN WIJK JZ., G. J. SARLET, J. PEEREBOOM en A. VAN DER SWAN.

OPLOSSING *van* W. TOP WZ.

Stel het eene getal, dat een volmaakt vierkant is, gelijk x^2, dan is het andere $x^2 \pm x$, en dan hebben wij

x^2

(20) J. DE GELDER, *Beginselen der Stelkunst*, bladz. 256, N°. 90.

$$x^2 (x^2 \pm x) : x^4 + (x^2 \pm x)^2 = 30 : 61,$$

of $$x^2 \pm x : x^2 + (x \pm 1)^2 = 30 : 61,$$

dus $$61 x^2 \pm 61 x = 60 x^2 \pm 60 x + 30,$$

dat is, na behoorlijke herleiding,

$$x^2 \pm x = 30,$$

uit welke vierkantsvergelijking gevonden wordt

$$x = \mp \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{30\tfrac{1}{4}} = \mp \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{11}{2},$$

dat is $x = 5$, $x = 6$, $x = -5$ of $x = -6$. Daar nu voor $x = 5$ en $x = -6$ het tweede getal $x^2 + x$ en voor $x = -5$ of $+6$ het tweede getal $x^2 - x$ is, zoo verkrijgen wij slechts twee verschillende antwoorden; dat is, de gevraagde getallen zijn 25 en 30, of zij zijn 36 en 30.

XCV. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Twee getallen in reden als 4 tot 5 te vinden, zoodanig, dat, wanneer men bij het grootste dezer getallen 6; en bij het kleinste 1 optelt, de vierkantswortels uit deze sommen 1 verschillen? (21)

OPGELOST door M. B. JUNG, H. FOEKES BAKKER, W. TOP WZ., R. VAN WIJK JZ., H. G. WITLAGE JR., A. VAN DER SWAN en G. J. SARLET.

OPLOSSING *van* M. B. JUNG.

Volgens den aard van het vraagstuk kan men de getallen stellen $x^2 - 6$ en $y^2 - 1$, dan is $y = x - 1$, en men heeft

$$y^2 - 1 : x^2 - 6 = 4 : 5,$$

of $$5y^2 - 5 = 4x^2 - 24,$$

en, brengende hierin de waarde van y,

$$5x^2 - 10x = 4x^2 - 24,$$

of $$x^2 - 10x = -24,$$

waaruit $$x = 5 \pm \sqrt{1},$$

dat

(21) *Idem* bl. 256. N°. 91.

dat is $x = 6$ of $x = 4$. Nemende nu $x = 6$, dan is $y = 5$ en de getallen worden

$$x^2 - 6 = 30 \quad \text{en} \quad y^2 - 1 = 24.$$

Nemende daarentegen $x = 4$, dan is $y = 3$, en dit geeft ons voor de getallen

$$x^2 - 6 = 10 \quad \text{en} \quad y^2 - 1 = 8,$$

welke beide antwoorden even goed aan de vraag voldoen.

Aanmerking. Men kan het vraagstuk ook aldus oplossen. Stel de getallen $4x$ en $5x$, dan heeft men

$$\sqrt{(5x + 6)} - \sqrt{(4x + 1)} = 1.$$

Dit quadraterende, verkrijgt men

$$9x + 7 - 2\sqrt{(20x^2 + 29x + 6)} = 1,$$

of

$$2\sqrt{(20x^2 + 29x + 6)} = 9x + 6,$$

en dit andermaal quadraterende, komt er na herleiding

$$x^2 - 8x + 12 = 0,$$

waaruit $x = 6$ of $x = 2$, hetgeen dezelfde antwoorden geeft als de eerste oplossing.

XCVI. VOORSTEL.

Door W. TOP WZ.

Drie schepen A, B en C, liggen van elkander op de volgende afstanden: A van B op 10 mijlen, B van C op 17 mijlen en A van C op 21 mijlen. Hoe veel mijlen zal elk dezer schepen moeten zeilen, om in eene haven te komen, waarvan zij alle even ver verwijderd zijn, en welken koers zullen zij hiertoe moeten nemen, in de onderstelling, dat B ten noordoosten van A ligt?

OPGELOST *door* W. TOP WZ. en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* W. TOP WZ.

Zij D, *Fig.* 59, de haven, waarvan A, B en C even ver afliggen; dan is D klaarblijkelijk het middelpunt, en dus AD = BD = CD de straal van den omgeschreven cirkel des driehoeks ABC; daar nu in het algemeen de straal des omgeschrevenen cirkels van eenen

eenen driehoek, welke a, b en c tot zijden heeft, wordt uitgedrukt door

$$R = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}},$$

waarin s de halve som der zijden beteekent, zoo hebben wij, daar hier AB $= 10$, BC $= 17$, AC $= 21$ en dus $s = 24$ is,

$$R = \frac{10 \times 17 \times 21}{4\sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3}} = 10\tfrac{5}{8} \text{ mijlen.}$$

Om verder den koers van elk schip te bepalen, zoo is ons gegeven $\angle$ BAN $= \angle$ OAB $= 45°$. Omdat verder driehoek ABK regthoekig is in B, zoo hebben wij

$$Cos\ BAK = \frac{AB}{2R} = \frac{10}{21\frac{1}{4}} = \frac{40}{85} = \frac{8}{17},$$

waaruit $\angle$ BAK $= 61°55'40''$ en bijgevolg

$$\angle NAD = \angle BAK - 45° = 16°55'40'',$$

zoodat de koers van A is $16°55'40''$ bewesten het Noorden, of $5°40'40''$ westelijker dan Noord ten westen.

De hoek ABD $=$ BAD $= 61°55'40''$ zijnde, zoo is

$$\angle WBD = \angle ABD - 45° = 16°55'40'',$$

en de koers van B is $16°55'40''$ bezuiden het westen, dat is $5°40'40''$ zuidelijker dan west ten zuiden.

Daar eindelijk driehoek ACK regthoekig in C is, zoo hebben wij

$$Cos.\ KAC = \frac{AC}{2R} = \frac{21}{21\frac{1}{4}} = \frac{84}{85},$$

dus $\angle$ DAC $= \angle$ DCA $= 8°47'50''$,

maar $\angle$ DAN $= 16°55'40''$ zijnde, zoo is dan

$$\angle CAN = \angle ACZ = 8°7'50'',$$

zoodat $\angle$ DCZ $= \angle$ DCA $- \angle$ ACZ $= 0°40'$.

De koers, welken C moet zeilen, is bijgevolg $40'$ bewesten het zuiden.

XCVII. VOORSTEL.

Door I. P. Delprat.

Er is eene regte lijn LM, Fig. 60, met twee punten A en B buiten dezelve gegeven. Indien men nu deze punten A en B met eenig

eenig willekeurig punt P van de lijn LM vereenigt, en door P eene loodlijn PN op LM ſtelt, welke gelijk AP ± BP is, dan vraagt men de vergelijking, den loop en de voornaamſte eigenſchappen te bepalen van de kromme lijn, welke de meetkunſtige plaats van het punt N is?

OPGELOST *door* I. P. DELPRAT en J. W. MARTINI.

OPLOSSING *van* I. P. DELPRAT.

Volgens de opgaaf, wordt, voor elk punt P van de onbepaalde lijn LM, het overeenkomſtige punt van de kromme lijn gevonden, door PN = AP + PB en PN′ = AP — PB te nemen, en elk punt P verſchaft alzoo terſtond twee punten van de kromme lijn. Op dezelfde wijze met meer andere punten P′, *enz.* te werk gaande, zal men eene reeks van punten verkrijgen, die, door eene kromme lijn vereenigd zijnde, de gevraagde kromme zullen voorſtellen. Bij deze conſtructie moet men echter het volgende opmerken. Daar men de loodlijnen op LM zoo wel naar beneden als naar boven kan uitzetten, ziet men, dat voor elk punt P niet alleen twee punten N en N′ boven LM, maar ook tevens twee punten *n* en *n′* beneden LM verkregen zullen worden, welke van LM denzelfden afſtand zullen hebben als de punten N en N′, waaruit dan volgt, dat de kromme ter wederzijde van LM dezelfde gedaante zal verkrijgen. Ook ziet men, dat wanneer het punt P op de lijn LM van D naar M gaat, de ſom der lijnen AP en BP onophoudelijk toeneemt en derhalve ook de ordinaat PN, zoodat de takken E′WF′ en *pwq* zich hoe langs hoe meer van de lijn LM verwijderen, en hetzelfde zal plaats hebben, wanneer men het punt P aan de andere zijde van C naar L doet bewegen. Er zal dus een punt G beſtaan, alwaar de ſom der lijnen AG en GB, en dus de ordinaat de kleinstmogelijke of een minimum is, welk minimum volgens *Voorſtel* CCIX. *Deel* I. der *Verzameling van Wiskundige Voorſtellen* gevonden wordt, door de loodlijn AC te verlengen, totdat CF = AC is, en vervolgens de lijn BF te trekken, zullende alsdan de ſom der lijnen, van het ſnijpunt G naar A en B getrokken, het gevraag-

de minimum wezen. Wanneer dus uit G eene loodlijn GW wordt opgerigt, gelijk aan BF of aan AG + GB, dan zal W het punt van de tak E′WF′ zijn, dat het digtst bij LM gelegen is, en voor dit punt is het uit de constructie klaar, dat de hoeken AGC en BGD even groot zijn. Uit *Voorstel* CCX, *Deel* I, blijkt mede, dat voor het punt P′, dat met A en B in eene regte lijn ligt, het verschil der lijnen AP en PB het grootst mogelijk zal wezen, en hieruit volgt, dat de ordinaat P′N′ de grootste is, die, door het verschil der lijnen AP en PB te nemen, gevonden kan worden.

Om de vergelijking onzer kromme lijn te vinden, zullen wij LM voor as der abscissen, en het punt E, in het midden van CD gelegen, tot oorsprong aannemen. Verder stelle men AC $= a$, BD $= b$, CD $= c$, EP $= x$ en PN $= y$, en dan is CP $= x + \frac{1}{2}c$ en BP $= x - \frac{1}{2}c$, waardoor AP $= \sqrt{\{a^2 + (x + \frac{1}{2}c)^2\}}$ en BP $= \sqrt{\{b^2 + (x - \frac{1}{2}c)^2\}}$ en dewijl PN $=$ AP + BP $= y$ is, zal men hebben

$$y = \sqrt{\{a^2 + (x + \tfrac{1}{2}c)^2\}} + \sqrt{\{b^2 + (x - \tfrac{1}{2}c)^2\}} \ldots (1)$$

Offschoon wij deze vergelijking voor het punt N hebben gezocht, zijn er, voor dezelfde abscis BP $= x$, de vier punten N, N′, n en n' te gelijkertijd in begrepen; want daar wij voor elk wortelteeken het dubbele teeken moeten stellen, zoo hebben wij, door alleen aan het tweede wortelteeken het teeken $-$ toe te kennen,

$$y = \sqrt{\{a^2 + (x + \tfrac{1}{2}c)^2\}} - \sqrt{\{b^2 + (x - \tfrac{1}{2}c)^2\}} \ldots (2)$$

welke nu meer bijzonder voor de punten N′ dient.

Schrijven wij eindelijk voor beide wortelgrootheden het dubbele teeken, dan komen ook de punten n en n' te voorschijn, want dan hebben wij algemeen

$$y = \pm \left\{ \sqrt{\{a^2 + (x + \tfrac{1}{2}c)^2\}} \pm \sqrt{\{b^2 + (x - \tfrac{1}{2}c)^2\}} \right\} \ldots (3)$$

waarin nu al de takken van de kromme lijn liggen opgesloten.

Ten einde nu den loop en de eigenschappen der kromme lijn nader te leeren kennen, zullen wij den eersten en tweeden differentiaal-coefficient der vergelijking (8) berekenen. Door de gewone regels zal men vinden

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \pm \left\{ \frac{x + \frac{1}{2}c}{\sqrt{(a^2 + (x + \frac{1}{2}c)^2)}} \pm \frac{x - \frac{1}{2}c}{\sqrt{(b^2 + (x - \frac{1}{2}c)^2)}} \right\} \ldots (4),$$

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \pm \left\{ \frac{a^2}{(a^2 + (x + \frac{1}{2}c)^2)^{\frac{3}{2}}} \pm \frac{b^2}{(b^2 + (x - \frac{1}{2}c)^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \ldots (5).$$

Tot het vinden der raaklijnen zou men de vrij zamengestelde uitdrukking (4) moeten construeren, indien er zich niet een geschikt hulpmiddel opdeed om dezelve te ontwijken, door namelijk van de hoeken BPC en APC, welke de lijnen BP en AP met de as LM vormen, gebruik te maken. Stellen wij dan $\angle$ APC $= \alpha$ en $\angle$ BPC $= \beta$, zoo geven de regthoekige driehoeken APC en BDP,

$$Cos.\ \alpha = \frac{PC}{AP}, \quad \text{en} \quad Cos.\ \beta = \frac{PD}{BP},$$

maar PC $= x + \frac{1}{2}c$, PD $= x - \frac{1}{2}c$, AP $= \sqrt{\{a^2 + (x + \frac{1}{2}c)^2\}}$ en PB $= \sqrt{\{b^2 + (x - \frac{1}{2}c)^2\}}$, derhalve

$$Cos.\alpha = \frac{x + \frac{1}{2}c}{\sqrt{\{a^2 + (x + \frac{1}{2}c)^2\}}}, \quad Cos.\beta = \frac{x - \frac{1}{2}c}{\sqrt{\{b^2 + (x - \frac{1}{2}c)^2\}}},$$

en op dezelfde wijze vinden wij

$$Sin.\alpha = \frac{a}{\sqrt{\{a^2 + (x + \frac{1}{2}c)^2\}}}, \quad Sin.\beta = \frac{b}{\sqrt{\{b^2 + (x - c)\frac{1}{2}^2\}}},$$

zoodat de vergelijkingen (4) en (5) nu overgaan in

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \pm \left\{ Cos.\ \alpha \pm Cos.\ \beta \right\} \ldots (6),$$

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = \pm \left\{ \frac{Sin^3.\ \alpha}{a} \pm \frac{Sin^3.\ \beta}{b} \right\} \ldots (7).$$

Uit de vergelijking (6) vloeit nu, om aan eenig punt N of N' eene raaklijn te trekken, de volgende constructie voort.

Na de ordinaat PN getrokken te hebben, beschrijve men uit deszelfs voet P met PB als straal eenen cirkelboog BIO, snijdende de lijn AP in I; men trekke de lijn IQ loodregt op LM; alsmede de lijn RO; verder make men TO $=$ OP en OR $=$ PQ $+$ DP of OR' $=$ PQ $-$ DP en trekke TR en TR'; de lijnen SV en S'V' evenwijdig aan TR en TR' door N of N' getrokken, zullen alsdan de gevraagde raaklijnen zijn. Het betoog dezer constructie is uit zich zelf blijkbaar.

Zullen de raaklijnen evenwijdig aan de as der abscisſen loopen, dan moeten wij hebben $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, en de punten, waarin dit plaats heeft, zullen alzoo gevonden worden door de vergelijking

$$Cos.\ \alpha \pm Cos.\ \beta = 0 \ldots\ldots (8).$$

Voor den bovenſten tak E′WF′ zal dit dus plaats hebben bij het punt, alwaar $Cos.\ \alpha = -Cos.\ \beta$, en dus $\alpha = 180^\circ - \beta$ is, dat is, in het punt W, want aldaar is volgens het vroeger opgemerkte ∠ AGC = ∠ BGD, en dus ∠ BGC = 180° — ∠ AGC. Voor den tak YUX der kromme, zal deze omſtandigheid daarentegen plaats grijpen, wanneer $Cos.\ \alpha = Cos.\ \beta$ of $\alpha = \beta$ is, en dit heeft plaats in het punt N″, omdat aldaar de lijnen AP′ en BP′ op elkander vallen. Het is verder blijkbaar, dat er aan de vergelijking (8) op geene andere wijze voldaan kan worden, en er beſtaan dus geene andere raaklijnen, evenwijdig met de as der abscisſen.

Door het tweede lid der vergelijking (4) gelijk nul te ſtellen, geraakt men tot dezelfde uitkomſten als die, welke wij uit de vergelijking (6) getrokken hebben. Men vond namelijk, dat dit tweede lid gelijk nul wordt voor

$$x = \tfrac{1}{2} c \times \frac{a - b}{a + b} \quad \text{en} \quad x = \tfrac{1}{2} c \times \frac{a + b}{a - b};$$

de eerſte dezer waarden komt overeen met het punt G en de tweede met het punt P′, waarvan men zich, door eene ligte berekening, gemakkelijk kan overtuigen. De waarden van x in de vergelijking (3) ſubſtituerende, vindt men

$$GW = Gw = \sqrt{(c^2 + (a+b)^2)}, \quad P'N'' = P'n'' = \sqrt{(c^2 + (a-b)^2)}.$$

Ten einde te onderzoeken, of onze kromme lijn aſymptoten heeft, zullen wij nagaan, wat het verſchil tusſchen de ſubtangens en de abscis wordt, als zich het aanrakingspunt zeer ver van den oorſprong verwijdert, of, in andere woorden, nagaan, wat de uitdrukking

$$x - y\,\frac{\partial x}{\partial y},$$

wordt voor x gelijk oneindig. Verder zullen wij hetzelfde onderzoeken voor het gedeelte van de as der ordinaten, begrepen tusſchen den oorſprong en het ſnijpunt van deze as met

de

de raaklijn, voor het oogenblik, waarin de abscis oneindig wordt, en dus onderzoeken, wat de uitdrukking

$$y - x\frac{\partial y}{\partial x},$$

wordt voor x gelijk oneindig, waardoor wij dan in het algemeen twee punten van de asymptoten, wanneer dezelve kunnen bestaan, zullen vinden.

Ter bekorting zullen wij de uitdrukkingen

$$a^2 + (x + \tfrac{1}{2}c)^2 = A \qquad \text{en} \qquad b^2 (x - \tfrac{1}{2}c)^2 = B$$

stellen, en alsdan vinden wij

$$x - y\frac{\partial x}{\partial y} = x - (\sqrt{A} \mp \sqrt{B}) \times \frac{\sqrt{AB}}{\pm(x+\frac{1}{2}c)\sqrt{B} + (x-\frac{1}{2}c)\sqrt{A}},$$

$$= \frac{\pm x(x+\frac{1}{2}c)\sqrt{B} + x(x-\frac{1}{2}c)\sqrt{A} - A\sqrt{B} \mp B\sqrt{A}}{\pm(x+\frac{1}{2}c)\sqrt{B} + (x-\frac{1}{2}c)\sqrt{A}},$$

$$= \frac{\pm\left\{x(x+\frac{1}{2}c) - A\right\}\sqrt{B} + \left\{x(x-\frac{1}{2}c) - B\right\}\sqrt{A}}{\pm(x+\frac{1}{2}c)\sqrt{B} + (x-\frac{1}{2}c)\sqrt{A}},$$

stellende hierin voor A en B derzelver waarden, dan verkrijgt men

$$x - y\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\mp\left\{a^2 + \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{2}cx\right\}\sqrt{(b^2 + (x-\frac{1}{2}c)^2)} - \left\{b^2 + \frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{2}cx\right\}\sqrt{(a^2 + (x+\frac{1}{2}c)^2)}}{\pm(x+\frac{1}{2}c)\sqrt{(b^2 + (x-\frac{1}{2}c)^2} + (x-\frac{1}{2}c)\sqrt{(a^2 + (x+\frac{1}{2}c)^2)}},$$

en wanneer wij teller en noemer door x^2 deelen, gaat dit over in

$$x - y\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\mp\left\{\frac{a^3}{x} + \frac{c^2}{4x} + \frac{1}{2}c\right\}\sqrt{\left\{\frac{b^2}{x^2} + (1 - \frac{c}{2x})^2\right\}} - \left\{\frac{b^2}{x} + \frac{c^2}{4x} - \frac{1}{2}c\right\}\sqrt{\left\{\frac{a^2}{x^2} + (1 + \frac{c}{2x})^2\right\}}}{\pm(1 + \frac{c}{2x})\sqrt{\left\{\frac{b^2}{x^2} + (1 - \frac{c}{2x})^2\right\}} + (1 - \frac{c}{2x})\sqrt{\left\{\frac{a^2}{x^2} + (1 + \frac{c}{2x})^2\right\}}}.$$

Wanneer men nu in deze uitdrukking x oneindig ſtelt, dan worden al de breuken, die x tot noemer hebben, gelijk o, en bijgevolg wordt alsdan

$$x - y\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\mp\frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c}{\pm 1 + 1},$$

dat is gelijk o of *oneindig*, naarmate men de bovenſte of benedenſte teekens gebruikt.

Op dezelfde wijze de waarde van $y - x\frac{\partial y}{\partial x}$ voor x gelijk oneindig zoekende, verkrijgt men

$$y - x\frac{\partial y}{\partial x} = \pm\left\{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}\right\} \mp x\left\{\frac{\frac{1}{2}c + x}{\sqrt{A}} \pm \frac{x - \frac{1}{2}c}{\sqrt{B}}\right\}$$

$$= \pm\frac{(a^2+\frac{1}{4}c^2+\frac{1}{2}cx)\sqrt{(b^2+(x-\frac{1}{2}c)^2)} \pm (b^2+\frac{1}{4}c^2-\frac{1}{2}cx)\sqrt{(a^2+(x+\frac{1}{2}c)^2)}}{\sqrt{(a^2+(x+\frac{1}{2}c)^2)} \times \sqrt{(b^2+(x-\frac{1}{2}c)^2)}}$$

en hierin, na onder en boven door x^2 gedeeld te hebben, x gelijk oneindig ſtellende, komt er

$$y - x\frac{\partial y}{\partial x} = \pm\frac{\frac{1}{2}c \mp \frac{1}{2}c}{1},$$

dat is o of $\pm c$, naarmate het bovenſte of benedenſte teeken wordt gebruikt.

Hieruit blijkt dan, dat er voor de takken E′WF′ en pwq aſymptoten beſtaan, die door het punt E gaan, en dat er voor de takken XUY en xUy twee aſymptoten T′U′ en K′W′ beſtaan, evenwijdig met de as KL en van dezelve op eenen afſtand CD ter wederzijde verwijderd.

Daar wij van de aſymptoten der takken E′WF′ en pwq niets anders weten, dan dat zij door den oorſprong E der coördinaten moeten gaan, zullen wij, ten einde dezelve geheel te bepalen, de hoeken zoeken, waaronder zij de as KL ſnijden, en hiertoe zullen wij moeten nagaan, welke waarde $\frac{\partial y}{\partial x}$ verkrijgt, wanneer x gelijk oneindig wordt genomen. Schrijft men hiertoe de vergelijking (4) onder den vorm

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm\left\{\frac{1 + \frac{c}{2x}}{\sqrt{\left\{\frac{a^2}{x^2} + (1 + \frac{c}{2x})^2\right\}}} \pm \frac{1 - \frac{c}{2x}}{\sqrt{\left\{\frac{b^2}{x^2} + (1 - \frac{c}{2x})^2\right\}}}\right\}$$

dan

dan ziet men, dat dezelve voor x gelijk oneindig overgaat in

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm (1 \pm 1) = \pm 2 \text{ of } = \pm 0.$$

De waarden $\frac{\partial y}{\partial x} = \pm 0$ toonen de asymptoten T′U′ en K′W′ aan en bevestigen, dat dezelve, boven en beneden ML, evenwijdig met dezelve loopen. De waarden $\frac{\partial y}{\partial x} = \pm 2$ behooren daarentegen tot de asymptoten, die door den oorsprong E gaan, en toonen aan, dat deze assymptoten O′M′ en P′Q′ met de as LM gelijke hoeken maken, waarvan de tangens gelijk 2 is, en die dus zeer gemakkelijk te construeren zijn; want het is hiertoe genoegzaam PZ = 2 EP te nemen.

Het bestaan der buigpunten zal men door de vergelijkingen (5) of (7) moeten opmaken, door te onderzoeken, wanneer dezelve van teeken veranderen. Hiertoe zullen wij de vergelijking (7) bezigen, als gevende dezelve de eenvoudigste uitkomsten. Voor de takken E′WF′ en pwq is deze vergelijking

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \pm \left(\frac{Sin^3.\,\alpha}{a} + \frac{Sin^3.\,\beta}{b}\right),$$

welke uitdrukking voor den eenen tak nooit negatief en voor den tweeden nooit positief kan worden, omdat α en β nooit grooter dan 180° kunnen zijn, waaruit dan volgt, dat de takken F′WE′ en pwq altijd hunne bolronde zijde naar de as der abscissen keeren, en dus geene buigpunten hebben.

Voor de takken XUY en xUy is de vergelijking (7)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \pm \left\{\frac{Sin^3.\,\alpha}{a} - \frac{Sin^3.\,\beta}{b}\right\},$$

welke uitdrukking nul wordt voor

$$\frac{Sin^3.\,\alpha}{a} = \frac{Sin^3.\,\beta}{b},$$

of

$$Sin.\,\alpha = Sin.\,\beta \times \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

Wanneer dus $Sin.\,\alpha < Sin.\,\beta\,.\,\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ is, zal $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ negatief en in het tegenovergestelde geval zal $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ positief wezen. Hieruit volgt,

dat elk der takken XUY en xUy een buigpunt heeft, waarvan de gemeenſchappelijke abscis, door middel van de vergelijking

$$Sin.\ \alpha = Sin.\ \beta \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$$

moet worden gevonden. Daar nu in onze figuur $a > b$ is, zoo zal voor al de punten, waarbij $\beta > \alpha$ is, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ negatief zijn, dat is, de kromme lijn hare holronde zijde naar de as der abscisſen keeren, en dit zal dus ten minſte voor al de punten plaats hebben, welker ordinaten tusſchen de punten G en P′ begrepen zijn. Daar verder $Sin.\ \alpha = Sin.\ (180^\circ - \alpha)$ is, zoo zullen er in elk der takken twee buigpunten z en z' beſtaan, waarvan de abscisſen gevonden worden, door voor $Sin.\ \alpha$ en $Sin.\ \beta$ hunne waarden in x te ſchrijven, en alsdan x af te zonderen. Men zal hierdoor voor deze buigpunten vinden

$$x = \tfrac{1}{2}c \times \frac{a^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{4}{3}}} \pm \frac{a^{\frac{2}{3}} \times b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - b^{\frac{4}{3}}} \sqrt{\left\{(a^{\frac{2}{3}} - b^{\frac{2}{3}})^2 (a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) + c^2\right\}}. \quad (9)$$

welke uitdrukking eene conſtructie van zeer zamengeſtelden aard zou vereiſchen, weshalve wij dezelve met ſtilzwijgen voorbijgaan, te meer, daar men deze waarde van x zeer gemakkelijk berekenen kan, wanneer a, b en c in getallen gegeven zijn.

Om het punt U te bepalen, waarin de takken XUY en xUy de as LM ſnijden, moeten wij $y = 0$ ſtellen, hetgeen ons geeft

$$\sqrt{(a^2 + (x + \tfrac{1}{2}c)^2)} = \sqrt{(b^2 + (x - \tfrac{1}{2}c)^2)},$$

waaruit gevonden wordt

$$x = -\frac{(a+b)(a-b)}{2c}.$$

Daar verder bij dit punt y en dus $AU - BU = 0$ moet zijn, zoo is $AU = BU$, en dit punt wordt dus geconſtrueerd, door op het midden van AB eene loodlijn op AB te ſtellen, welke de as in het gevraagde punt U zal doorſnijden.

Onze kromme lijn neemt verſchillende vormen aan, naarmate van den verſchillenden ſtand, welken de punten A en B ten opzigte van de as LM hebben. Zie hier de opmerkelijkſte dezer bijzondere gevallen.

Wanneer $AC = BD$ of $a = b$ is, en dus de punten A

en B even ver boven de as ſtaan, dan verkrijgt de kromme lijn niet alleen ter wederzijde van LM, maar ook ter wederzijde van Ww, *Fig.* 61, denzelfden vorm. Het punt N'' van *Fig.* 60, alwaar de raaklijn evenwijdig loopt met de as der absciſſen, valt hier op eenen oneindigen afſtand, aangezien de lijn AB evenwijdig met LM loopt en dezelve dus nooit ontmoet; het buigpunt z van *Fig.* 60, waarvan de ordinaat ter regterzijde van P' moet vallen, ligt hier dus mede op eenen oneindigen afſtand, terwijl het andere buigpunt nu in E valt. De rigting en ſtand der asſymptoten ondergaan geene verandering, als zijnde onafhankelijk van de grootheden a en b. De raaklijnen worden eindelijk even als in *Fig.* 60 geconſtrueerd.

Wanneer de punten A en B in de lijn LM vallen, dan is $a = b = 0$, en de vergelijking (3) gaat over in

$$y = \pm \left\{x + \tfrac{1}{2} c \pm (x - \tfrac{1}{2} c)\right\} = \pm c \text{ of } = \pm 2x,$$

en de geheele kromme lijn gaat alzoo over in het ſtelſel van de vier asſymptoten, omdat dezelve werkelijk $y = \pm c$ en $y = \pm 2x$ tot vergelijking hebben.

Wanneer CD en dus $c = 0$ wordt, dat is, wanneer de punten A en B in eene lijn gelegen zijn, die loodregt op LM ſtaat, dan verkrijgt de kromme den vorm van *Fig.* 62, waaruit men ziet, dat de takken EWF en ewf bijna dezelfde gedaante hebben als de overeenkomſtige takken van *Fig.* 61. De andere takken ondergaan ondertusſchen in dit geval eene merkelijke verandering. Het punt N'' van *Fig.* 60, alwaar de raaklijn evenwijdig aan de lijn LM was, valt hier in de lijn Ww, dewijl de lijn door A en B gaande, hier loodregt op LM of in de lijn Ww zelve valt. De buigpunten z en z' vallen hier ter wederzijde van Ww, en op gelijken afſtand, want in (9) $c = 0$ ſtellende, verkrijgt men voor de absciſſen der buigpunten

$$x = \pm \frac{a^{\frac{2}{3}}\, b^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})}}.$$

De aſymptoten der takken EWF en ewf ondergaan geene verandering, als zijnde onafhankelijk van c; maar de aſymptoten $T'U'$ en $K'W'$ van *Fig.* 60, op eenen afſtand c ter wederzijde van LM getrokken, vallen nu beide op LM, omdat $c = 0$ is. Dit

is ook uit de constructie van de kromme ten duidelijkste blijkbaar, aangezien er geen punt in de lijn LM genomen kan worden, dat van A en B op gelijken afstand staat, en waarvoor alzoo het verschil dezer afstanden gelijk nul is. Hoe verder echter eenig punt in LM van E wordt afgenomen, zoo veel te meer naderen deze lijnen of afstanden tot de gelijkheid, weshalve derzelver verschil op eenen oneindigen afstand voor o zal kunnen worden gehouden.

XCVIII. VOORSTEL.

Door I. P. DELPRAT.

Den loop en de voornaamste eigenschappen te bepalen van de kromme lijn, waarvan de polaire vergelijking is

$$z = r\ (\mathit{Sin.}\ \phi + \mathit{Tang.}\ \phi + \mathit{Sec.}\ \phi)?$$

OPLOSSING *van* I. P. DELPRAT.

Dewijl de vorm der opgegevene vergelijking eene zeer gemakkelijke constructie door punten voor de kromme lijn toelaat, die door dezelve wordt voorgesteld, zoo zullen wij vooreerst deze constructie opgeven, en den loop der kromme lijn in het algemeen uit dezelve bepalen. Zij AX en AY, *Fig.* 63, twee elkander regthoekig doorsnijdende assen, BCD een cirkel uit A als middelpunt met eenen straal gelijk r beschreven, en zij eindelijk BM eene raaklijn aan den cirkel, evenwijdig loopende met de as AY. Indien men dan uit A, in eene willekeurige rigting, eene lijn AH trekt, dan zal AE $= r \times \mathit{Sec.}$ EAB, en BE $= r \times \mathit{Tang.}$ EAB zijn, terwijl de loodlijn FG op AX door FG $= r \times \mathit{Sin.}$ EAB zal worden uitgedrukt; wanneer men dus de lijn EH gelijk maakt aan EB + FG, dan is

$$AH = r \times \mathit{Sec.}\ EAB + r\ \mathit{Tang.}\ EAB + r\ \mathit{Sin.}\ EAB,$$

en derhalve AH $= z$, en den veranderlijken hoek EAB $= \phi$ stellende

$$z = r\ (\mathit{Sec.}\ \phi + \mathit{Tang.}\ \phi + \mathit{Sin.}\ \phi),$$

zoo-

zoodat H alsdan een punt der gevraagde kromme is. Op deze wijze zal men voor elke andere rigting van de lijn AH het overeenkomstige punt van de kromme lijn kunnen construeren, waarbij echter in aanmerking genomen moet worden, dat zoodra ϕ grooter dan 90° wordt, eenige der goniometrische lijnen, in de vergelijking voorkomende, negatief kunnen worden, en dat dezelve in die gevallen juist in eene tegenovergestelde rigting moeten worden uitgezet, waarin dezelve positief zijnde gerekend hadden moeten zijn. Ten einde dit duidelijk te maken, zullen wij, in elk der vier quadranten van den cirkel DBC, onderzoeken, in welke rigting en op welke wijze deze onderscheidene goniometrische lijnen gesteld en gerekend behooren te worden. Hiertoe nemen wij aan, dat de as AX de oorsprong der hoeken is, welke hoeken wij derhalve in de rigting BCD onderstellen aan te groeijen, zoodat wij den voerstraal als eene in die rigting bewegende lijn aannemen.

Wanneer de hoek EAB = o is, of de bewegende lijn AH in de rigting AX loopt, dan worden de lijnen BE en FG, of de tangens en sinus van den hoek, beide gelijk o, terwijl de secans gelijk aan den straal AB wordt; het punt B is derhalve een punt der kromme lijn.

Laten wij den hoek BAF aangroeijen, dan is het klaar, dat, bij grootere hoeken, zoowel de secans als de tangens en sinus toenemen, en dat alzoo de voerstralen hoe langs hoe grooter worden, totdat eindelijk de bewegende lijn in den stand AY komende, en dus loodregt op AX staande, de voerstraal oneindig wordt, omdat alsdan de tangens en secans beide oneindig worden. De beweging van den voerstraal door het eerste quadrant verschaft dus den tak BHU van de kromme lijn.

De bewegende lijn verder ronddraaijende, totdat dezelve, bij voorbeeld, in den stand AE′ gekomen is, dan weet men, dat zoo wel de secans als de tangens negatief en dus alleen de sinus positief is; de lengte van de loodlijn F′G′ alzoo van A naar F uitzettende, moet de som der secans AE′ en tangens BE′ van F′ naar A in H′ worden uitgezet, waardoor men het punt H′ van de kromme verkrijgt, en in dit quadrant aldus voortgaande, zal men den loop van den tak U′H′B verkrijgen. Daar verder in den stand AY de bewegende lijn zoo wel tot het eerste als tot het

twee-

tweede quadrant behoort, en de secans en tangens alsdan zoo wel negatief als positief zijn, zoo volgt hieruit, dat zoo wel als er een punt der kromme lijn in de lijn Ay op eenen oneindigen afstand van den oorsprong of pool A gelegen is, er eveneens een punt der kromme in de lijn AY′ op eenen oneindigen afstand van dezelfde pool gelegen moet zijn, zoodat de kromme zich zoo wel boven als beneden de lijn AX in het oneindige uitstrekt, en dat eigenlijk het laatste punt van den tak BSU met het eerste punt van U′H′B overeenkomt.

De bewegende lijn verder dan AF′ voortgaande, zoo worden de secans, tangens en sinus hoe langer hoe kleiner, maar omdat de sinus altijd nog kleiner blijft dan de tangens of secans, zoo zal de voerstraal altijd negatief blijven, dat is, de punten der kromme lijn zullen alle beneden AX blijven, en wanneer eindelijk de bewegende lijn in de rigting AX′ komt, dan is de tangens zoo wel als de sinus nul, terwijl de secans negatief blijft, maar gelijk wordt aan den straal; wij komen dus wederom op het punt B der kromme terug, en hieruit volgt, dat de beide geconstrueerde takken elkander in B ontmoeten.

In het derde quadrant komende, wordt de tangens positief, terwijl de sinus en secans beide negatief worden. Om alzoo, bij voorbeeld, voor den stand AF″ een punt der kromme lijn te vinden, moeten wij van E naar I″ den sinus F″G′ uitzetten, en vervolgens de tangens EB van I″ naar H″; het punt H″ zal alsdan het gevraagde punt zijn. Op deze wijze verschillende punten voor het derde quadrant construerende, verkrijgt men den tak BH″C, en men kan zich op de volgende wijze overtuigen, dat dezelve door het punt C moet gaan.

Komt namelijk de bewegende lijn in den stand AY′, dan wordt zoo wel de secans als de tangens oneindig; maar de eerste positief en de tweede negatief zijnde, zou het mogelijk zijn, dat er, zoo als somtijds tusschen oneindige lijnen plaats heeft, voor dezelve een eindig of bepaald verschil bestond. Om dit te onderzoeken nemen wij in aanmerking, dat men in het algemeen heeft

$$Sec\ \phi + Tang.\ \phi = \frac{1}{Cos.\ \phi} + \frac{Sin\ \phi}{Cos.\ \phi} = \frac{1 + Sin\ \phi}{Cos.\ \phi} = Tang.\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi),$$

welke uitdrukking voor $\phi = 270^\circ$ overgaat in

$$Sec.\ 270^\circ + Tang.\ 270^\circ = \infty - \infty = Tang.\ 180^\circ = 0.$$

De

De som der secans en tangens alzoo voor dit punt gelijk nul wordende, zoo moet de negatieve sinus, die gelijk aan den straal is, niet op den voerstraal AY', maar op het verlengde van A naar C worden uitgezet, waardoor C een punt van de kromme lijn wordt.

De voerstraal eindelijk in het vierde quadrant gekomen zijnde, is de sinus en tangens negatief, maar de secans positief. In den stand AF'', bij voorbeeld, moet dus de secans van A naar E' genomen worden, en de som der sinus en tangens van E' naar H'' worden uitgezet, zijnde alsdan H'' het punt van de kromme lijn. Daar echter de negatieve sinus en tangens zeer klein kunnen worden, terwijl de positieve secans altijd grooter dan de straal blijft, zoo moet, bij hoeken, die zeer digt tot 360° naderen, de som der sinus en tangens minder dan de secans bedragen, waaruit volgt, dat er bij zulke hoeken punten der kromme lijn beneden AB moeten vallen. Komt eindelijk de bewegende lijn wederom in den stand AX, dan vervallen wij wederom op het punt B, omdat de sinus, tangens en secans van 360° volmaakt dezelfde zijn als die van 0°. De vierde tak CAB vereenigt zich dus met den eersten in B, en wanneer wij de lijn nog verder voort lieten bewegen, zouden wij achtervolgens op al de punten, die reeds geconstrueerd zijn, terug komen.

Den algemeenen loop der kromme lijn op deze wijze bepaald hebbende, gaan wij tot het onderzoek van derzelver meer bijzondere eigenschappen over.

Wij hebben reeds gezien, dat de lijn YY' de beide oneindige takken der kromme lijn op eenen oneindigen afstand ontmoet, en het zou dus mogelijk zijn, dat deze lijn YY' eene asymptoot van de kromme lijn was; zulks is echter nog geenszins zeker, want het is ook mogelijk, dat YY' slechts evenwijdig loopt met eene asymptoot. Om te weten wat hiervan zij, zullen wij onderzoeken, wat de afstand $x = $ KH van elk willekeurig punt H tot de as YY' wordt, wanneer de hoek EAB of ϕ gelijk 90° is. Deze afstand wordt in het algemeen uitgedrukt door

$$x = z\,Cos.\,\phi = r\left\{1 + Sin.\,\phi + Sin.\,\phi\,.\,Cos.\,\phi\right\}..(1)$$

en dezelve wordt alzoo voor $\phi = 90°$, omdat alsdan $Sin.\,\phi = 1$ en $Cos.\,\phi = 0$ is,

$$x = 2r,$$

waar-

waaruit volgt, dat eene lijn LN, evenwijdig aan YY′ op eenen afstand van dezelve, gelijk DB of $2r$ getrokken, eene asymptoot van beide oneindige takken der kromme lijn zal zijn.

Dewijl de tak BH der kromme met deszelfs holle zijde naar de asymptoot LN gekeerd is, moet er ergens in dezen tak een buigpunt zijn, alsmede een punt, waarvan de afstand tot LN en dus ook tot YY′ een maximum is. De vergelijking (1) zal ons bij dit onderzoek de grootste diensten bewijzen, en ons tevens nog meer merkwaardige bijzonderheden doen kennen. Wij kunnen dezelve namelijk onder deze gedaante schrijven:

$$x = r\{1 + Sin.\phi + Sin.\phi\sqrt{(1 - Sin^2.\phi)}\},$$

$$= r\{\sqrt{(1+Sin.\phi)} + Sin.\phi\sqrt{(1 - Sin.\phi)}\} \times \sqrt{(1 + Sin.\phi)}.$$

Onderzoeken wij nu vooreerst, wanneer deze uitdrukking gelijk o kan worden, dat is, wanneer de kromme lijn de as YY′ doorsnijdt, dan zien wij, dat zulks in twee gevallen gebeuren kan, namelijk, wanneer een der twee factoren, waarin wij de waarde van x ontleed hebben, gelijk o wordt. Stellen wij nu vooreerst $\sqrt{(1 + Sin.\phi)} = 0$, dan vinden wij $Sin.\phi = -1$ of $\phi = 270°$, hetgeen ons reeds bekend was, omdat dit met het punt C overeenstemt. Stellen wij daarentegen

$$\sqrt{(1 + Sin.\phi)} + Sin.\phi\sqrt{(1 - Sin.\phi)} = 0,$$

dan vinden wij, na gequadrateerd en herleid te hebben,

$$Sin^3.\phi - Sin^2.\phi + Sin.\phi + 1 = 0,$$

welke vergelijking slechts een' bestaanbaren wortel heeft, namelijk $Sin.\phi = -0{,}543685$, waaruit volgt $\phi = 212°56'$ of $\phi = 327°4'$. Offchoon nu deze beide hoeken aan de laatste vergelijking voldoen, zoo voldoen zij beide niet aan de vergelijking (1), want de cosinus van $212°56'$ is negatief en die van $327°4$ is positief, en daar in den loop der herleiding deze cosinus positief genomen is, voldoet alleen de hoek van $327°4'$ aan de vergelijking (1), dat is, deze hoek maakt het tweede lid dezer vergelijking en dus $z\,Cos.\phi = 0$. Daar dit echter geene plaats kan hebben, zonder dat $z = 0$ wordt, omdat $Cos.\phi$ hier eene positieve waarde heeft, zoo volgt hieruit, dat de kromme lijn de as YY′ in den oorsprong A doorsnijdt, en dat de hoek van $327°4'$ de rigting AO van den voerstraal aantoont voor

het

het punt A, welke voerſtraal nu de kromme in dit punt raakt; daar al de voorgaande en volgende punten van de kromme lijn aan dezelfde zijde van AO vallen.

Om de punten der kromme lijn te vinden, die zich het verſte van YY′ verwijderen, moeten wij $\frac{\partial x}{\partial \phi}$ gelijk nul ſtellen. Nu is

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = r\,(Cos.\,\phi + 2\,Cos.^2\phi - 1) = r\,(Cos.\,\phi + 2\,Cos.\,2\phi) \ldots (2)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \phi^2} = -r\,(Sin.\phi + 4 Cos.\phi\; Sin.\phi) = -r\,Sin.\phi(1 + 4\,Cos.\,\phi) \ldots (3)$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial \phi^3} = -r\left\{4\,Cos.\,2\phi + Cos.\,\phi\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Stellende dus $\frac{\partial x}{\partial \phi} = 0$, dan verkrijgen wij

$$Cos.\,\phi + Cos.\,2\phi = 0,$$

of $\quad 2\,Cos^2.\,\phi + Cos.\,\phi - 1 = 0,$

waaruit $\quad Cos.\,\phi = -\frac{1}{4} \pm \frac{3}{4} = -1$ of $= +\frac{1}{2}$,

derhalve $\quad \phi = 180°,\ \phi = 60°$ en $\phi = 300.$

Ten einde te onderzoeken, of deze waarden werkelijk maxima of minima voor x aantoonen, zullen wij dezelve in de vergelijking (3) moeten ſubſtitueren.

Voor $\phi = 180°$ wordt $\frac{\partial^2 x}{\partial \phi^2} = 0$ en $\frac{\partial^3 x}{\partial \phi^3} = 3r$, derhalve geeft deze waarde geen maximum of minimum voor x te kennen.

Voor $\phi = 60°$ wordt $\frac{\partial^2 x}{\partial \phi^2} = -\frac{3}{2}\,r\,\sqrt{3}$; deze waarde geeft derhalve een maximum voor x te kennen, en hieruit volgt, dat het meest verwijderde punt H der kromme van de as YY′ gevonden wordt, door de lijn AB in G in twee gelijke deelen te verdeelen, vervolgens de loodlijn GF op te rigten en dan door A en F den voerſtraal AH te trekken.

Voor $\phi = 300°$ wordt $\frac{\partial^2 x}{\partial \phi^2} = +\frac{3}{2}r\sqrt{3}$, omdat $Sin.\,300° = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ is; deze waarde geeft dus een minimum voor x te kennen, dat is het punt, dat het verſte ter linkerzijde van YY gelegen is, en om dit punt te conſtrueren, zal men alzoo FG moeten verlengen tot in F″′ en den voerſtraal F″′AH″′ trekken, welke dit punt H″′ zal doen kennen.

De

De tangens van den hoek, welken de voerstraal met de raaklijn maakt, wordt in het algemeen uitgedrukt door

$$Tang.\ \psi = \frac{z\partial\phi}{\partial z}.$$

Nu is voor onze kromme lijn

$$z = r\left\{Sec.\,\phi + Tang.\,\phi + Sin.\,\phi\right\} = \frac{1 + Sin.\,\phi + Cos.\,\phi\,.\,Sin.\,\phi}{Cos.\,\phi} \times r,$$

en dit differentierende vinden wij

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = r\left\{\frac{Sin.\,\phi}{Cos^2.\,\phi} + \frac{1}{Cos^2.\,\phi} + Cos.\,\phi\right\} =$$

$$r \times \frac{1 + Sin.\,\phi + Cos.\,\phi\,(1 - Sin^2.\,\phi)}{Cos^2.\,\phi} =$$

$$r \times \frac{(1 + Sin.\,\phi)\left\{1 + Cos.\,\phi\,(1 - Sin.\,\phi)\right\}}{(1 + Sin.\,\phi)\,(1 - Sin.\,\phi)} = r \times \frac{1 + Cos.\,\phi\,(1 - Sin.\,\phi)}{1 - Sin.\,\phi},$$

en substituerende dit in *Tang.* ψ, dan komt er

$$Tang.\,\psi = \frac{z\partial\phi}{\partial z} = \frac{(1 + Sin.\,\phi + Cos.\,\phi\,Sin.\,\phi)(1 - Sin.\,\phi)}{Cos.\,\phi\left\{1 + Cos.\,\phi\,(1 - Sin.\,\phi)\right\}}$$

$$= \frac{\sqrt{(1 + Sin.\,\phi)}\left\{\sqrt{(1 + Sin\,\phi)} + Sin.\,\phi\sqrt{(1 - Sin.\,\phi)}\right\}(1 - Sin.\,\phi)}{\sqrt{(1 + Sin.\,\phi)}\,.\,\sqrt{(1 - Sin.\,\phi)}\,.\,\left\{1 + Cos.\,\phi\,(1 - Sin.\,\phi)\right\}}$$

$$= \frac{\left\{\sqrt{(1 + Sin.\,\phi)} + Sin.\,\phi\sqrt{(1 - Sin.\,\phi)}\right\}\sqrt{(1 - Sin.\,\phi)}}{1 + Cos.\,\phi\,(1 - Sin.\,\phi)}$$

$$= \frac{Cos.\,\phi + Sin.\,\phi\,(1 - Sin.\,\phi)}{1 + Cos.\,\phi\,(1 - Sin.\,\phi)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

Door middel van deze vergelijking zal men dus voor elken willekeurigen hoek ϕ de rigting van de raaklijn kunnen vinden; wij zullen dit alleen voor eenige merkwaardige punten der kromme lijn aanwijzen.

Voor $\phi = 0$ vindt men *Tang.* $\psi = \frac{1}{2}$; wanneer wij dus AR $= \frac{1}{2}$ AB nemen en RB trekken, dan raakt dezelve de kromme lijn in B aan.

Voor $\phi = 90^\circ$ vindt men *Tang.* $\psi = \frac{0}{1} = 0$; derhalve loopt de raaklijn, dat hier de asymptoot LN is, evenwijdig aan den voerstraal.

Voor

Voor $\phi = 180°$ vindt men *Tang.* $\psi = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} =$ *oneindig*, de raaklijn ſtaat dus aldaar loodregt op den voerſtraal, en de lijn MM is dus in B eene raaklijn aan de kromme.

Voor $\phi = 270°$ vindt men *Tang.* $\psi = \frac{-2}{1} = -2$, waaruit volgt, dat de raaklijn CR′ van het punt C gevonden wordt, door AR′ = 2 AC te maken. Het negatieve teeken toont aan, dat de raaklijn aan de andere zijde van den voerſtraal, gelijk wij, in B, voor het poſitieve geval onderſteld hebben, moet getrokken worden.

Voor $\phi = 360°$ vinden wij dezelfde uitkomst als voor $\phi = 0$.

Daar wij eindelijk voor het punt A gevonden hebben

$$\sqrt{(1 + Sin.\ \phi)} + Sin.\ \phi \sqrt{(1 - Sin.\ \phi)} = 0$$

en *Tang.* ψ door deze ſtelling klaarblijkelijk gelijk 0 wordt, zoo valt voor dit punt de raaklijn op den voerſtraal, zoo als wij reeds boven hebben opgemerkt.

Uit de formulen voor de normaal, ſubnormaal en ſubtangens niets merkwaardigs voortvloeijende, gaan wij dezelve met ſtilzwijgen voorbij, en gaan tot het onderzoek der buigpunten over.

Het is vooreerst blijkbaar, dat het punt B der kromme lijn een buigpunt moet zijn, omdat wij boven gevonden hebben, dat MM′ eene raaklijn is, en het bovendien blijkbaar is, dat de takken aan verſchillende zijden van deze raaklijn liggen.

Daar, ten andere, onze kromme lijn de aſymptoot LN in S doorſnijdt, en dan hare holle zijde naar deze aſymptoot keert, zoo moet, indien LN werkelijk eene aſymptoot zal wezen, en dus de kromme lijn op eenen oneindigen afſtand raken zal, de kromme voor dit oneindig afgelegen punt hare bolronde zijde naar LN keeren, en derhalve moet er in den tak SU ergens een buigpunt aanwezig zijn.

Om dezelfde reden zal er eindelijk ergens in den tak BU′ een buigpunt aanwezig moeten zijn, daar de kromme bij B hare holle en vervolgens hare bolronde zijde naar LN toekeert.

Om nu de juiste plaatſing dezer twee laatſte buigpunten te vinden, zonder de kromme lijn op regthoekige coordinaten over te

brengen, zoo moet men voor de polaire coördinaten, op dezelfde wijze als voor de regthoekige, de algemeene formulen construeren; waaruit voor alle kromme lijnen, waarvan de polaire vergelijking gegeven is, de buigpunten gevonden kunnen worden. Uit de gewone bepaling van een buigpunt zal men vinden, dat als de uitdrukking

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} - 2 \cdot \frac{\partial z^2}{\partial \phi^2} - z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

is, zonder dat hierdoor de uitdrukking

$$\frac{\partial^3 z}{\partial \phi^3} - 5z \cdot \frac{\partial z}{\partial \phi} - 6 \cdot \frac{\partial z^3}{\partial \phi^3} \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

gelijk nul wordt, voor zulk eene waarde van ϕ een buigpunt zal bestaan, en dat eene waarde van ϕ, welke de uitdrukking (6) niet gelijk nul, maar positief of negatief maakt, aantoont, dat voor het overeenkomstige punt de kromme hare bolronde of holronde zijde naar de pool toekeert. Het vinden der uitdrukkingen (6) en (7) te langwijlig zijnde om hier uit te werken, zullen wij ons vergenoegen met het opgeven van de uitkomsten.

Ter gemakkelijker toepassing van de formule (6) stellen wij

$$z = r\,(Sec.\,\phi + Tang.\,\phi + Sin.\,\phi)$$

onder den vorm

$$z = r \times \frac{1 + Sin.\,\phi + Sin.\,\phi\, Cos.\,\phi}{Cos.\,\phi}$$

$$= r \times \frac{\{\sqrt{(1+Sin.\,\phi)} + Sin\,\phi\sqrt{(1-Sin.\,\phi)}\}\sqrt{(1+Sin.\,\phi)}}{\sqrt{(1+Sin.\,\phi)}\cdot\sqrt{(1-Sin.\,\phi)}}$$

$$= r \times \frac{\sqrt{(1+Sin.\,\phi)} + Sin.\,\phi\sqrt{(1-Sin.\,\phi)}}{\sqrt{(1-Sin\,\phi)}}$$

$$= r \times \left\{Sin.\,\phi + \frac{\sqrt{(1+Sin.\,\phi)}}{\sqrt{(1-Sin.\,\phi)}}\right\} \quad . \quad . \quad (8)$$

en alsdan zullen wij vinden

$$\frac{\partial z}{\partial \phi} = r \times \left\{Cos.\,\phi + \frac{1}{1 - Sin.\,\phi}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} = r \times \frac{(1 + Sin.\,\phi)^{\frac{1}{2}} + Sin.\,\phi\,(1 - Sin.\,\phi)^{\frac{3}{2}}}{(1 - Sin.\,\phi)^{\frac{3}{2}}},$$

welke waarden, in de vergelijking (6) in de plaats gesteld, geven

(1 +

$$\frac{(1+Sin.\phi)^{\frac{1}{2}}}{(1-Sin.\phi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\{1+Cos.\phi(1-Sin.\phi)\}^2}{(1-Sin.\phi)^{\frac{3}{2}}\{(1+Sin.\phi)^{\frac{1}{2}}+Sin.\phi(1-Sin.\phi)^{\frac{1}{2}}\}}$$

$$\ldots\ldots\ldots - \frac{(1+Sin.\phi)^{\frac{1}{2}}}{(1-Sin.\phi)^{\frac{1}{2}}} = 0,$$

of $$\frac{(1+Sin.\phi)^{\frac{1}{2}}}{(1-Sin.\phi)^{\frac{3}{2}}}.Sin.\phi \ldots\ldots\ldots$$

$$- \frac{2\{1+Cos.\phi(1-Sin.\phi)\}^2}{(1-Sin.\phi)^{\frac{3}{2}}\{(1+Sin.\phi)^{\frac{1}{2}}+Sin.\phi(1-Sin.\phi)^{\frac{1}{2}}\}} = 0,$$

of, dat hetzelfde is,

$$(1+Sin.\phi)^{\frac{1}{2}}Sin.\phi\{(1+Sin.\phi)^{\frac{1}{2}}+Sin.\phi(1-Sin.\phi)^{\frac{1}{2}}\}$$
$$- 2\{1+Cos.\phi(1-Sin.\phi)\}^2 = 0$$

Waaruit volgt

$$Sin.\phi\{1+Sin.\phi+Sin.\phi Cos.\phi\} - 2\{1+Cos.\phi(1-Sin.\phi)\}^2 = 0 \ (9)$$

hetwelk ontwikkeld en voor $Sin^2.\phi$ in plaats schrijvende, $1 - Cos^2.\phi$, geeft

$$Sin.\phi(1+2Cos.\phi)^2 - (1+Cos.\phi)(1+2Cos.\phi+3Cos^2.\phi-2Cos^3\phi) = 0,$$

of $Sin^2.\phi(1+2Cos.\phi)^4 = (1+Cos.\phi)^2(1+2Cos.\phi+3Cos^2.\phi-2Cos^3.\phi)^2$,
en deelende door $(1+Cos.\phi)$:

$$(1-Cos.\phi)(1+2Cos.\phi)^4 = (1+Cos.\phi)(1+2Cos.\phi+3Cos^2.\phi-2Cos^3.\phi)^2$$

stellen wij nu kortheidshalve $Cos.\phi = u$, dan verkrijgen wij, alles ontwikkelende en volgens de magten van u rangschikkende;

$$4u^7 - 8u^6 + 5u^5 + 25u^4 + 10u^3 - 2u^2 - 2u = 0 \ldots (10).$$

Aan deze vergelijking wordt vooreerst voldaan door $u = 0$, zoodat er voor $u = 0$ of $Cos.\phi = 0$, dat is $\phi = 90^\circ$, een buigpunt te vermoeden is. Het punt der kromme, dat met $\phi = 90^\circ$ overeenstemt, is het oneindig afgelegen punt van den tak SU, alwaar de asymptoot de kromme lijn aanraakt, en het schijnt in ons geval mogelijk, dat dit punt als een buigpunt moet worden beschouwd, aangezien de beide takken SU en BU′ zich eigenlijk in de aanrakingspunten met de gemeenschappelijke asymptoot moeten worden gehouden te vereenigen; want het

aanrakingspunt van den tak SU behoort zoowel tot den voerstraal AY als het aanrakingspunt van BU′; daar nu de tak SU aan de eene zijde der asymptoot en de tak BU′ aan de andere zijde gelegen is, zoo neemt de kromme lijn, in dit raakpunt met de asymptoot, eene andere wending, en dit raakpunt kan alzoo als een buigpunt worden aangezien.

De vergelijking (10) door u deelende, vinden wij

$$4u^6 - 8u^5 + 5u^4 + 25u^3 + 10u^2 - 2u - 2 = 0,$$

voor $u = 0$, wordt het eerste lid gelijk -2

voor $u = 1$, ————————— $+32$

voor $u = -1$, ————————— $+2$

en de vergelijking heeft dus eenen wortel tusschen 0 en 1 en eenen wortel tusschen 0 en -1. Met de overige wortels zullen wij ons niet ophouden, aangezien uit den loop der kromme lijn genoegzaam gebleken is, dat er geene meerdere buigpunten bestaan. Door de gewone benaderingswijze vindt men voor den wortel tusschen 0 en 1 ten naasten bij 0,45, dus $Cos.\ \phi = 0{,}45$ of $\phi = 63°45'$, en voor den wortel tusschen 0 en -1 $Cos.\ \phi = -0{,}925$, waaruit $\phi = 160°54'$ ten naasten bij. Bij het herleiden der vergelijking (9) tot (10) hebben wij beide de leden door $1 + Cos.\ \phi$ gedeeld, derhalve zou de vergelijking (9) ook door $Cos.\ \phi + 1 = 0$, of $Cos.\ \phi = -1$, voldaan zijn geworden. Het punt B der kromme komt overeen met deze laatste waarde van ϕ, dat is met $\phi = 180°$, terwijl de twee anderen tot de buigpunten tusschen S en U en tusschen B en U′ behooren.

De uitdrukkingen voor den kromtestraal en voor de lengte van eenigen boog geene merkwaardige bijzonderheden opleverende, en bovendien vrij zamengesteld zijnde, gaan wij dezelve met stilzwijgen voorbij, en besluiten het onderzoek onzer kromme lijn met den inhoud van het gedeelte BCAB van dezelve te bepalen.

De algemeene uitdrukking voor den inhoud I, begrepen tusschen eenigen boog en twee polaire ordinaten is,

$$I = \tfrac{1}{2} \int z^2 \partial\phi.$$

Nu hebben wij in (8) reeds gevonden

$$z = r \left\{ Sin\ \phi + \frac{\sqrt{(1 + Sin.\ \phi)}}{\sqrt{(1 - Sin.\ \phi)}} \right\},$$

en

en daar $\frac{1 + Sin.\ \phi}{1 - Sin.\ \phi} = Tang^2.\ (45^\circ + \frac{1}{2}\ \phi)$ is, zoo wordt

$$z = r\ \{Sin.\ \phi + Tang.\ (45^\circ + \frac{1}{2}\ \phi)\},$$

waaruit voor den inhoud volgt

$$I = \tfrac{1}{2}\int z^2 \partial\phi = \tfrac{1}{2}\ r^2 \int \{Sin.\ \phi + Tang.\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\ \phi)\}^2\ \partial\phi$$

$$= \tfrac{1}{2} r^2 \{\int Sin^2.\ \phi\partial\phi + 2\int Sin.\ \phi\, Tang.\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi)\ \partial\phi +$$

$$\int Tang^2.\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi)\ \partial\phi\}.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (11)$$

Nu is $\int Sin^2.\ \phi\partial\phi = -\frac{1}{4}\ Sin.\ 2\phi + \frac{1}{2}\ \phi$,

en $\int Sin.\ \phi\, Tang.\ (45^\circ + \frac{1}{2}\phi)\ \partial\phi = \int Sin.\ \phi\ .\ \frac{\sqrt{1 + Sin.\ \phi}}{\sqrt{(1 - Sin.\ \phi)}}\partial\phi$,

of, $Sin.\ \phi = u$ en dus $\partial\phi = \frac{\partial u}{\sqrt{(1 - u^2)}}$ ftellende,

$$\int Sin.\ \phi\, Tang.\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\ \phi)\ \partial\phi = \int\frac{u\partial u}{1-u} = -u - Log.\ (1-u),$$

en voor u derzelver waarde fchrijvende

$$\int Sin.\ \phi\, Tang.\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\ \phi)\ \partial\phi = - Sin.\ \phi - Log.\ (1 - Sin.\ \phi).$$

Eindelijk is, $45^\circ + \frac{1}{2}\ \phi = \psi$ ftellende,

$$\int Tang^2.\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi)\ \partial\phi = 2\int Tang^2.\ \psi\,\partial\psi = 2\ Tang.\ \psi - 2\psi,$$

en voor ψ derzelver waarde fchrijvende

$$\int Tang^2.\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi)\ \partial\phi = 2\ Tang.\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi) - \tfrac{1}{2}\pi - \phi.$$

Brengende dan alle deze waarden over in (11), dan verkrijgen wij

$$I = \tfrac{1}{2} r^2 \{-\tfrac{1}{4}\ Sin.\ 2\phi + \tfrac{1}{2}\phi - 2\ Sin.\ \phi - 2\ Log.\ (1 - Sin.\ \phi) +$$

$$.\ .\ .\ .\ 2\ Tang.\ (45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi) - \tfrac{1}{2}\pi - \phi + C\},$$

dat is, na herleiding

$$I = \tfrac{1}{2} r^2 \{-\tfrac{1}{4} Sin.2\phi - \tfrac{1}{2}\phi + \tfrac{1}{2}\pi - 2 Log.(1 - Sin.\phi) + 2 Tang.(45^\circ + \tfrac{1}{2}\phi) + C\}.$$

Wanneer men nu den inhoud van het gedeelte BCAB der kromme lijn begeert te kennen, moet de bovenftaande uitdrukking tusfchen de grenzen $\phi = 180^\circ$ en $\phi = 360^\circ$ genomen worden. Stellende dan, voor $\phi = 180^\circ$, $I = 0$, zoo verkrijgen wij

$$0 = \tfrac{1}{2}\ r^2 \{-\pi - 2 + C\} \quad \text{dus} \quad C = \pi + 2$$

en voor $\phi = 360^\circ$ vindt men derhalve

$$Inh.\ BCAB = \tfrac{1}{2}r^2\left(-\pi - \tfrac{1}{2}\pi + 2 + \pi + 2\right) = \tfrac{1}{2}r^2\left(4 - \tfrac{1}{2}\pi\right)$$
$$= 2r^2 - \tfrac{1}{4}r^2\pi,$$

dat is, de gevraagde inhoud is gelijk aan tweemaal het vierkant van den ſtraal des gegevenen cirkels, verminderd met een vierde van den inhoud dezes cirkels; of wel, deze inhoud overtreft het vierkant op den ſtraal met het ſtuk CTBFC. Wil men eindelijk dezen inhoud in getallen berekenen, dan heeft men

$$Inh.\ BCAB = 1{,}214602\ r^2.$$

XCIX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Een holle concentrieke bol is uit eene ſtof zamengeſteld, waarvan de ſoortelijke zwaarte G is. Indien nu de ſtraal van den uitwendigen bol r is, vraagt men de dikte van den uitgeholden bol te bepalen, ten einde dezelve in eene vloeiſtof, waarvan de ſoortelijke zwaarte g is, tot eene gegevene diepte d zal inzinken.

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT *en* W. TOP Wz.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Figuur 64 ſtelle eene doorſnede van den ingedompelden hollen bol voor, dan is, volgens de opgaaf van het vraagſtuk, $AM = r$ en $AC = d$. Stellen wij nu den ſtraal van den ingeſchrevenen of inwendigen bol $MB = x$, dan wordt de inhoud van den uitgeholden bol uitgedrukt door

$$I = \tfrac{4}{3}\left(r^3 - x^3\right)\pi.$$

Stellen wij nu het gewigt van eene cubieke eenheid water gelijk γ, dan zou het gewigt van het ligchaam, dat I tot inhoud heeft en dus I cubieke eenheden bevat, indien het water was, worden uitgedrukt door $I \times \gamma$; heeft dus dit ligchaam eene ſoortelijk zwaarte G, dat is, is de ſtof, waaruit het beſtaat, G maal zoo zwaar dan het water dan zal het gewigt P van dit ligchaam worden uitgedrukt door

$$I = I \times G \times \gamma,$$

waar-

waaruit dan volgt, dat het gewigt van onzen uitgeholden bol zal moeten worden voorgesteld door

$$P = \tfrac{4}{3}\,(r^3 - x^3)\,\pi \times G\,\gamma.$$

De hoeveelheid vloeistof, door den uitgeholden bol verplaatst, heeft de gedaante van een bolvormig segment, dat d tot hoogte heeft, en tot eenen bol behoort, waarvan r de straal is. Volgens de bekende formule voor den inhoud van een bolvormig segment, hebben wij alzoo voor den inhoud der verplaatste vloeistof

$$\tfrac{1}{3}\,d^2\,\pi\,(3r - d).$$

Daar nu de soortelijke zwaarte van deze vloeistof, volgens de opgaaf van het voorstel, gelijk g is, zoo is, ingevolge de boven gemaakte aanmerking, het gewigt der verplaatste vloeistof

$$P' = \tfrac{1}{3}\,d^2\,\pi\,(3r - d) \times g \times \gamma.$$

Omdat eindelijk het gewigt van eenig drijvend ligchaam gelijk is aan het gewigt van de vloeistof, die door het ingedompelde deel verplaatst wordt, zoo moeten wij hebben $P = P'$, en dit verschaft ons de vergelijking

$$\tfrac{4}{3}\,(r^3 - x^3)\,\pi \times G \times \gamma = \tfrac{1}{3}\,d^2\,\pi\,(3r - d) \times g \times \gamma;$$

of alles door $\frac{1}{3}\,\pi \times \gamma$ deelende

$$4\,(r^3 - x^3)\,G = d^2\,(3r - d)\,g,$$

dus $$4\,G x^3 = 4\,r^3 G - d^2\,(3r - d)\,g,$$

of $$x^3 = r^3 - \tfrac{1}{4} \times \frac{g}{G}\,d^2\,(3r - d),$$

waaruit $$x = \sqrt[3]{\left\{r^3 - \tfrac{1}{4} \times \frac{g}{G}\,.\,d^2\,(3r - d)\right\}},$$

zoodat de dikte van den uitgeholden bol gevonden wordt door de formule

$$AB = r - x = r - \sqrt[3]{\left\{r^3 - \tfrac{1}{4} \times \frac{g}{G}\,.\,d^2\,(3r - d)\right\}}.$$

Aanmerkingen. 1°. Om den bol tot op de helft te doen inzinken is $d = r$, en in dit geval vinden wij

$$AB = r - \sqrt[3]{\left\{r^3 - \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{g}{G}\,r^3\right\}} = r\left\{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{g}{2G}\right)}\right\}.$$

2°. Moet de uitgeholde bol met de vloeistof uit zich zelven in evenwigt zijn, en dus tot boven aan inzinken, dan is $d = 2r$, zoodat wij voor dit geval verkrijgen

$$AB = r - \sqrt[3]{\left\{r^3 - \frac{g}{G} r^3\right\}} = r \left\{1 - \sqrt[3]{\left(1 - \frac{g}{G}\right)}\right\}.$$

3°. Vraagt men, welke betrekking er tusschen de gegevens moet bestaan, opdat de holle bol massief zal worden, dan moet $x = 0$ zijn, en dit geeft ons

$$r^3 = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{g}{G} d^2 (3r - d),$$

waaruit gemakkelijk voor de betrekking tusschen de soortelijke zwaarte van het ligchaam en de vloeistof gevonden wordt

$$\frac{g}{G} = \frac{4r^3}{d^2 (3r - d)}.$$

4°. Stellen wij de dikte van den uitgeholden bol D, dan hebben wij gevonden

$$D = r - \sqrt[3]{\left\{r^3 - \tfrac{1}{4} \times \frac{g}{G} \cdot d^2 (3r - d)\right\}}.$$

Deze formule kan ons nu dienen tot de oplossing van verschillende vraagstukken; want wij kunnen in dezelve zoo wel r, d en $\frac{g}{G}$ als D voor onbekende aannemen: zoekt men $\frac{g}{G}$, dan zal men vinden

$$\frac{g}{G} = \frac{4(r^3 - (r - D)^3)}{d^2 (3r - d)},$$

terwijl men om r of d te bepalen, tot de volgende vergelijkingen van den tweeden en derden graad vervalt:

$$r^2 - \left(D + \frac{g}{4G} \cdot \frac{d^2}{D}\right) r + \tfrac{1}{3}\left(D^2 + \frac{g}{4G} \cdot \frac{d^3}{D}\right) = 0,$$

$$d^3 - 3rd^2 + \frac{4G}{g}\left\{r^3 - (r - D)^3\right\} = 0.$$

C. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Men vraagt den tijd te bepalen, welken eenig ligchaam noodig heeft, om langs eenen gegevenen boog van eene kromme lijn te rollen, waarvan de vergelijking gegeven is; en de formule voor de-

zen

zen tijd toe te pasſen op het geval, waarin de kromme lijn eene cijcloide is?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT en R. LOBATTO.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Zij BND, *Fig.* 65, de kromme lijn, waarvan de vergelijking op de asſen AB en AD, de eerſte van welke horizontaal en de tweede verticaal onderſteld wordt, gegeven is, zoodat AQ $= x$ en QN $= y$ ſtellende, y eene bekende functie is van x. Onderſtellen wij nu, dat het ligchaam vrij langs den boog MN rolt, zoodanig, dat het, in M zijnde, in rust was, en alleen door de zwaartekracht genoodzaakt wordt om van M tot in N te geraken, dan moeten wij eene formule zoeken, welke den tijd, waarin dit geſchiedt, algemeen voorſtelt.

Stellen wij dezen tijd t, de lengte des boogs MN $= z$, en de abscis AP van het punt M, waaruit het ligchaam begint te vallen, h, dan is de valhoogte PQ $= x - h$; en nemen wij dus als bekend aan, dat de ſnelheid, welke het ligchaam na door MN geloopen te zijn verkrijgt, gelijk is aan die, welke het zou verkregen hebben, wanneer het door de overeenkomſtige valhoogte PQ vrij gevallen was, dan hebben wij, volgens de bekende formule voor de vrij vallende ligchamen, voor de ſnelheid in N

$$c = 2\sqrt{g\,(x-h)},$$

in welke formule g de ruimte verbeeldt, welke een vrijvallend ligchaam in de eerſte eenheid van tijd doorloopt.

Beweegt zich het ligchaam nu nog een oneindig klein oogenblik ∂t met deze ſnelheid c, dan zal de doorgeloopene ruimte voor dit oogenblik zijn $c\partial t$; doch deze doorgeloopene ruimte is tevens de differentiaal van den boog z, zoodat wij hebben

$$c\partial t = \partial z,$$

en brengende hierin de gevondene waarde van c over

$$2\partial t\,.\,\sqrt{g\,(x-h)} = \partial z,$$

of, omdat $\partial z = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$ is,

$$2\partial t\,.\,\sqrt{g\,(x-h)} = \sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)},$$

waaruit terſtond volgt

$$\partial t = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\partial x^2+\partial y^2}{g\,(x-h)}} = \frac{1}{2\sqrt{g}}\,.\,\sqrt{\frac{\partial x^2+\partial y^2}{x-h}},$$

welke vergelijking geïntegreerd, voor den gevraagden tijd geeft

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g}} \times \int \sqrt{\frac{\delta x^2 + \delta y^2}{x - h}} \quad \ldots\ldots (1)$$

Is de kromme lijn eene cycloide, dan heeft er voor al de punten dezer kromme lijn de eigenschap plaats, dat RN gelijk den cirkelboog DR en dus

$$y = NQ = RQ + RN = RQ + \textit{Boog } RD$$

is. Daar wij nu AQ $= x$ gesteld hebben, zoo verkrijgen wij, den straal $\frac{1}{2}$ AD $= r$ stellende,

$$RQ = \sqrt{(2rx - x^2)},$$

en $$\textit{Boog } RD = r \textit{ Boog Sin. vers. } \frac{2r - x}{r},$$

waaruit voor de vergelijking van de cycloide op de assen AD en AB volgt

$$y = \sqrt{(2rx - x^2)} + r \textit{ Boog . Sin. vers. } \frac{2r - x}{r},$$

deze vergelijking differentierende, verkrijgen wij

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{r - x}{\sqrt{(2rx - x^2)}} - \frac{r}{\sqrt{(2rx - x^2)}} = - \frac{x}{\sqrt{(2rx - x^2)}},$$

en bij gevolg

$$\frac{\delta y^2}{\delta x^2} = \frac{x}{2r - x}, \quad \text{en} \quad 1 + \frac{\delta y^2}{\delta x^2} = \frac{\delta x^2 + \delta y^2}{\delta x^2} = \frac{2r}{2r - x},$$

zoodat $$\delta x^2 + \delta y^2 = \frac{2r}{2r - x} \cdot \delta x^2,$$

hetgeen in de vergelijking (1) gesubstitueerd geeft

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g}} \times \int \delta x \sqrt{\frac{2r}{(2r - x)(x - h)}} = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \int \frac{\delta x}{\sqrt{(2r - x)(x - h)}}.$$

Om deze formule te integreren stelle men

$$2r - x = u, \quad \text{en dus} \quad \delta x = - \delta u,$$

dan verkrijgen wij

$$t = - \sqrt{\frac{r}{2g}} \int \frac{\delta u}{\sqrt{u(2r - h - u)}},$$

of stellende $2r - h = 2r'$

$$t = - \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \int \frac{\delta u}{\sqrt{(2r'u - u^2)}} = + \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \textit{Boog Cos. } \frac{u - r'}{r'},$$

en stellende hierin voor u en r' derzelver waarden

$$t = + \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \textit{Boog Cos. } \frac{r + \frac{1}{2}h - x}{r - \frac{1}{2}h},$$

waar-

waarbij geene constante behoeft gevoegd te worden, omdat de gevondene formule maar behooren voor $x = h$ gelijk o wordt.

Stelt alzoo g het aantal lengte eenheden voor, dat een vrijvallend ligchaam in de eerste *seconde* doorloopt, welke lengte eenheden dezelfde moeten zijn, als die, waarin r en h zijn uitgedrukt, dan zal de laatstgevonde formule ook het aantal seconden uitdrukken, waarin eenig ligchaam langs den boog MN van de cycloide rolt.

Stellen wij in deze formule $x = 2r$, dan verkrijgen wij, voor den tijd, welken eenig ligchaam noodig heeft om van het punt M tot het laagste punt D der cycloide te vallen,

$$t = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \text{Boog Cos.}(-1) = \pi\sqrt{\frac{r}{2g}},$$

en daar deze uitdrukking geheel onafhankelijk is van de abscis h, die tot het aanvangspunt M der beweging behoort, zoo leeren wij hieruit, dat, *van welk punt M in de cycloide het ligchaam begint te vallen, hetzelve altijd in denzelfden tijd* $\pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$ *in het laagste punt D zal komen*. Het is deze opmerkelijke eigenschap, welke de cycloide den naam van *Tautochronische* kromme doet dragen. Dezelve is het eerst door onzen beroemden landgenoot Huigens ontdekt, en is te vinden in deszelfs uitmuntend Werk, *de Horologio Oscilatorio*.

Door middel van de verkregene snelheid in D, zal het ligchaam in den tak DB′ tot dezelfde hoogte M′ opklimmen als die, van welke hetzelve in M is beginnen te vallen; zetten wij dus al de hinderpalen der beweging, zoo als den tegenstand der lucht en de wrijving, ter zijde, en nemen wij alzoo geene andere kracht dan de zwaarte in aanmerking, dan zal het ligchaam zich onophoudelijk van M naar M′ en wederom van M′ naar M bewegen, en het zal tot elke dezer schommelingen eenen tijd $2\pi\sqrt{\frac{r}{2g}}$ besteden.

Het is eene bekende eigenschap van de cycloide, dat zij met hare gedeveloppeerde gelijk en gelijkvormig is. Onderstellen wij alzoo, dat BC en CB′ de twee halve cycloiden zijn, uit welker ontwinding de cijcloide BDB′ is ontstaan. Indien wij ons dan de-

deze twee halve cycloiden uit eene harde ftof zamengefteld denken, en aan eenen volmaakt buigbaren draad CD, van de dubbele lengte AD, eenig zwaar ligchaam in D wordt vastgemaakt, dan zal deze draad zich bij elke fchommeling beurtelings om elk der twee halve cycloiden BC en CB′ moeten winden; het zware punt D zal alzoo genoodzaakt zijn zich volgens de cycloide BDB′ te bewegen, en het zal zich dus in denzelfden toeftand bevinden, alsof het langs den boog van deze cycloide afrolde: waaruit dan volgt, dat, tot welke hoogte CKM of CLN deze flinger wordt opgeligt, dezelve zijne fchommelingen of flingeringen MDM′ of NDN′ altijd gelijktijdig zal volbrengen.

De formule vôor t geeft ons nog aanleiding tot de volgende aanmerkingen.

Stellen wij in dezelve $h = 0$, dat is, laten wij het ligchaam uit het hoogfte punt B tot eenig punt M vallen, waarvan de abscis x is, dan verkrijgen wij

$$t = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \textit{Boog Cos.} \frac{r-x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2rg}} \cdot r \cdot \textit{Boog Sin. vers.} \frac{x}{r},$$

dat is
$$t = \frac{1}{\sqrt{2rg}} \cdot \textit{Boog}\ AS;$$

voor den tijd om door den boog BN te vallen hebben wij eveneens

$$t' = \frac{1}{\sqrt{2rg}} \cdot \textit{Boog}\ AR,$$

en hieruit verkrijgen wij in het algemeen

Tijd door boog BM : *Tijd door* BN = *Boog* AS : *Boog* AR.

Indien dus eenig ligchaam van het hoogfte punt der cycloide begint te rollen, dan ftaan de tijden, waarin hetzelve de verfchillende deelen van zijnen weg doorloopt, tot elkander in reden als de overeenkomftige bogen van den makenden cirkel.

Wij hebben voor den tijd, om uit eenig punt M tot het laagfte punt te rollen, gevonden

$$t = \pi \sqrt{\frac{r}{2g}},$$

nu heeft een ligchaam, om vrij te vallen langs de middellijn van den makenden cirkel, benoodigd den tijd

$t' =$

$$t' = \sqrt{\frac{2r}{g}},$$

en hieruit volgt terstond

$$t : t' = \pi \sqrt{\tfrac{1}{2}} : \sqrt{2} = \pi : 2,$$

waaruit volgt: *dat de tijd voor eene halve schommeling in de cycloide tot den tijd om vrij door de middellijn van den makenden cirkel te vallen in reden is als de halve omtrek van eenen cirkel tot deszelfs middellijn.*

Daar CD de kromtestraal is van het punt D der cycloide, zoo zal men een zeer klein boogje van de cycloide, ter wederzijde van D genomen, zonder veel van de waarheid af te wijken, kunnen aanmerken als een cirkelboogje met den straal CD beschreven; wanneer dus een gewone eenvoudige slinger van de lengte CD $= 4r$ zeer kleine schommelingen doet, zal men het er voor kunnen houden, dat het zware punt een zeer klein boogje van de cycloide doorloopt, en de tijd voor elke van deze kleine schommelingen zal dus nog gelijk zijn aan

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{2g}},$$

stellen wij nu CD $= 4r = l$, en dus $r = \frac{1}{4} l$, dan wordt deze tijd

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{8g}} = \pi \sqrt{\frac{l}{2g}}.$$

Voor eenen anderen eenvoudigen slinger van de lengte l' hebben wij eveneens, bij kleine schommelingen,

$$T' = \pi \sqrt{\frac{l'}{2g}},$$

waaruit volgt $\quad T : T' = \sqrt{l} : \sqrt{l'},$

dat is, *de tijden der slingeringen van eenvoudige slingers, die kleine schommelingen maken, zijn tot elkander in reden als de vierkantswortels uit de lengte van de slingers.*

Zal zulk een slinger seconden slaan, dan moet $T = 1$ zijn, en wij hebben dus, voor dit geval,

$$\pi \sqrt{\frac{l}{2g}} = 1,$$

waaruit voor de lengte van den seconden-slinger gemakkelijk gevonden wordt

$l =$

$$l = \frac{2g}{\pi^2}.$$

Nemen wij de Nederlandsche el voor eenheid der lengtemaat aan, dan is ten naasten bij $g = 4{,}9$. Nemen wij nu, daar wij hier geene groote naauwkeurigheid beoogen, maar alleen het gebruik onzer formule willen aanwijzen, $\pi = 3{,}14$, dan vinden wij voor de lengte van den seconden-slinger

$$l = \frac{2 \times 4{,}9}{3{,}14^2} = \frac{9{,}8}{9{,}86} = 0{,}994,$$

waaruit blijkt, dat de lengte van de seconden-slinger slechts eenige strepen kleiner is, dan de Nederlandsche el.

CI. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

De naam eens ouden Hollandschen Dichters bestaat uit vier letters, waarvan de twee middelste dezelfde zijn. Wanneer men de letters van het alphabeth door de getallen 1, 2, 3, enz. tot 26 uitdrukt, zoo bestaan er tusschen de onbekende letters of getallen de volgende betrekkingen: vooreerst is de laatste letter de derde term van eene meetkunstige reeks, die een derde van de tweede letter tot eersten term en een achtste van de eerste tot gemeene reden heeft. Ten andere is de tweede letter de derde term van eene rekenkunstige reeks, die een derde van de som der laatste letter en de eenheid tot eersten term, en een vierde van de eerste letter tot gemeen verschil heeft. Eindelijk is de eerste letter de derde term van eene rekenkunstige reeks, die de helft van de laatste letter tot eersten term en een vijfde van de tweede letter tot gemeen verschil heeft. Men vraagt door deze bepalingen den naam des dichters te vinden?

OPGELOST door W. TOP Wz., R. VAN WIJK Jz., M. H. JUNG, A. VAN DER SWAN, J. PEEREBOOM en G. J. SARLET.

OPLOSSING van W. TOP Wz.

Stellen wij de getallen der achtervolgende letters x, y, y en

z,

z, dan is vooreerst $\frac{1}{3}y$, $\frac{1}{24}xy$ en z eene meetkunstige reeks, en bij gevolg

$$z = \tfrac{1}{192} x^2 y \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

Verder moeten $\frac{1}{8}(z+1)$, $\frac{1}{8}(z+1) + \frac{1}{4}x$ en y eene rekenkunstige reeks uitmaken, en dus is

$$y = \tfrac{1}{8}(z+1) + \tfrac{1}{2}x \;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Eindelijk moeten ook $\frac{1}{2}z$, $\frac{1}{2}z + \frac{1}{5}y$ en x in eene rekenkunstige reeks opklimmen, en dit geeft ons

$$x = \tfrac{1}{2}z + \tfrac{2}{5}y \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

Losfen wij uit (2) en (3) de waarden van y en z op, even alsof x bekend was, dan vinden wij

$$z = \frac{24x - 4}{19} \quad \text{en} \quad y = \frac{35x + 10}{38},$$

en brengende dit over in (1) dan komt er

$$\frac{24x - 4}{19} = \frac{1}{192} x^2 \times \frac{35x + 10}{38},$$

of
$$384(24x - 4) = 35x^3 + 10x^2,$$
dus
$$35x^3 + 10x^2 - 9216x + 1536 = 0,$$
of ftellende $x = 16u$
$$280u^3 + 5u^2 - 288u + 3 = 0,$$
waaruit de éénigfte wortel in geheele getallen is $u = 1$. Hieruit volgt dus $x = 16$, $y = 15$ en $z = 20$, welke getallen in het alphabeth met P, O en T overeenftemmende aantoonen, dat Poot de bedoelde naam is.

CII. VOORSTEL.

Door J. W. Martini.

Wanneer men een onbepaald aantal cirkels befchrijft, die alle door de beide toppen van eene gegevene hyperbool gaan, dan zullen de ordinaten, van elk der punten, waarin de hyperbool door deze achtervolgende cirkels gefneden wordt, genoegzaam verlengd zijnde, hunne overeenkomftige cirkels nog in een tweede punt doorfnijden. Men vraagt, in welke kromme lijn deze punten gelegen zullen zijn?

Op

OPGELOST *door* J. W. MARTINI en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* J. W. MARTINI.

Laat PBQ en P′B′Q′, *Fig.* 66, de takken der gegevene hyperbool zijn, dan vindt men, door de opgegevene constructie werkelijk uit te voeren, voor iederen cirkel CBB′C′, twee punten E en E′ van de gevraagde kromme, en al deze punten vormen twee takken ZBY en Z′B′Y′ van de kromme lijn, welker vergelijking wij moeten bepalen.

Om deze vergelijking te verkrijgen, neme men in de loodlijn FA, die door het midden van de eerste as gaat, een willekeurig punt F en beschrijve uit hetzelve, met FA of FB als straal, eenen cirkel, en dan zal E een punt van de gevraagde kromme zijn. Stellende nu AB $= a$ en de halve tweede as gelijk b, de abscis AD $= x$ en de ordinaat CD $= y$, dan is uit de bekende eigenschap van de hyperbool $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)}$.

Stellen wij verder, de abscis AD altijd x noemende, de ordinaat DE van de nieuwe kromme lijn gelijk u, dan is uit de eigenschap van den cirkel

$$DC \times DE = DB \times DB'$$

of

$$y \times u = (x - a) \times (x + a)$$

dus

$$u = \frac{x^2 - a^2}{y} = \frac{x^2 - a^2}{\pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)}}$$

dat is

$$u = \pm \frac{a}{b} \sqrt{(x^2 - a^2)}.$$

Welke wij ook kunnen schrijven onder dezen vorm

$$u = \pm \frac{\frac{a^2}{b}}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)},$$

en hieruit volgt, dat de gevraagde kromme lijn wederom eene hyperbool is, welke met de opgegevene dezelfde eerste as heeft, doch waarvan de halve tweede as derde evenredig is tot de halve tweede en eerste as van de opgegevene hyperbool.

GEVOLG. Is de gegevene hyperbool gelijkzijdig en dus

$y =$

$y = \pm \sqrt{(x^2 - a^2)}$, dan is, omdat $a = b$ is, ook $u = \pm \sqrt{(x^2 - a^2)}$ en in dit geval zijn de twee kromme lijnen volmaakt identiek, dat is, zij vallen met al derzelver punten op elkander. De conſtructie zal dit ook ten duidelijkſte doen zien, omdat, voor dit geval, elk der ordinaten DE, raaklijn wordt van den overeenkomſtigen cirkel, en dit geeft alzoo eene zeer gemakkelijke conſtructie aan de hand voor de gelijkzijdige hyperbool.

CIII. VOORSTEL.

Door J. W. MARTINI.

Wanneer men een onbepaald aantal cirkels beſchrijft, alle door dezelfde twee punten gaande, en men in elken dezer cirkels eene middellijn trekt, zoodanig, dat deze middellijnen alle evenwijdig loopen met eene lijn, die in ſtelling gegeven is, dan vraagt men de kromme lijn te bepalen, waarin de uiteinden van deze middellijnen gelegen zijn?

OPGELOST *door* J. W. MARTINI en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* J. W. MARTINI.

Laat B en B′, *Fig.* 67, de twee gegevene punten zijn; deelende dan BB′ midden door in A, en ſtellende in A de lijn XY loodregt op AB, dan liggen de middelpunten van al de cirkels, waarvan in de opgaaf geſproken wordt, in XY. Stellen wij nu, dat CC′, door het punt A gaande, de rigting van alle de middellijnen is, dan zijn C en C′ reeds twee punten van de gevraagde kromme lijn; en door de conſtructie op een genoegzaam aantal punten toe te paſſen, zal men de twee oneindig voortloopende takken CBD en C′B′D′ verkrijgen, waarvan wij nu de vergelijking moeten bepalen.

Laat hiertoe EE′ eene willekeurige middellijn zijn, welke de twee punten E en E′ van de kromme lijn heeft voortgebragt.

Nemen wij verder B′BM als de as der abscisſen aan, en AM′, loodregt op CC′ ſtaande en dus met AM een' hoek gelijk $90^\circ +$ CAB′ makende, als as der ordinaten, dan is EG, evenwijdig met AM, de ordinaat van het punt E, en dezelve is nu in E raaklijn aan den overeenkomſtigen cirkel, omdat AM, loodregt op CC′ zijnde, ook loodregt op EE′ is. Stellen wij dus AB $=$ AB′ $= a$, AG $= x$ en EG $= y$, dan is uit de eigenſchap van den cirkel $EG^2 = BG \times B'G$, of voor de lijnen derzelver waarde ſchrijvende $y^2 = (x - a)(x + a)$, zoodat de vergelijking der gevraagde kromme lijn is

$$y^2 = x^2 - a^2,$$

of

$$y = \pm \sqrt{(x^2 - a^2)},$$

en de kromme lijn is alzoo eene hyperbool.

Nemende $x = \pm a$, dan wordt $y = 0$; en hieruit volgt, dat de hyperbool door de punten B en B′ gaat.

Daar alzoo CC′ en BB′ gelijke middellijnen van de hyperbool zijn, zoo zal de lijn FF′, welke den hoek CAB midden door deelt, de eerſte as van onze hyperbool wezen.

Om de vergelijking op de asſen te vinden, trekken wij EL loodregt op FF′, en ſtellen $\angle$ CAF $= \angle$ FAB $= \frac{1}{2} \alpha$, AL $= x'$ en EL $= y'$. Hierdoor is, LN en LK evenwijdig met AM en AM′ trekkende, $\angle$ ENL $= \angle$ EGA $= \angle$ LKA $= 90^\circ - \alpha$ en $\angle$ ELN $= 90 + \frac{1}{2} \alpha$, waaruit verder volgt

$$EN = y' \cdot \frac{Cos. \frac{1}{2} \alpha}{Cos. \alpha}, \qquad KG = LN = y' \frac{Sin. \frac{1}{2} \alpha}{Cos. \alpha},$$

$$NG = LK = x' \cdot \frac{Sin. \frac{1}{2} \alpha}{Cos\ \alpha}, \qquad AK = x' \cdot \frac{Cos. \frac{1}{2} \alpha}{Cos. \alpha},$$

en bij gevolg

$$x = AK + GK = x' \cdot \frac{Cos. \frac{1}{2} \alpha}{Cos. \alpha} + y' \cdot \frac{Sin. \frac{1}{2} \alpha}{Cos\ \alpha},$$

$$y = EN + NG = y' \cdot \frac{Cos. \frac{1}{2} \alpha}{Cos. \alpha} + x' \cdot \frac{Sin. \frac{1}{2} \alpha}{Cos. \alpha}.$$

Subſtituerende dit nu in de vergelijking

$$y^2 = x^2 - a^2 \quad \text{of} \quad y^2 - x^2 = - a^2,$$

dan komt er

$$(y' Cos. \tfrac{1}{2} \alpha + x' Sin. \tfrac{1}{2} \alpha)^2 - (x' Cos. \tfrac{1}{2} \alpha + y' Sin. \tfrac{1}{2} \alpha)^2 = - a^2 Cos^2. \alpha,$$

of

$$\left.\begin{array}{l} y'^2 Cos^2. \frac{1}{2} \alpha + 2 x' y' Cos. \frac{1}{2} \alpha\, Sin. \frac{1}{2} \alpha + x'^2 Sin^2. \frac{1}{2} \alpha \\ - y'^2 Sin^2. \frac{1}{2} \alpha - 2 x' y' Cos. \frac{1}{2} \alpha\, Sin. \frac{1}{2} \alpha + x'^2 Cos^2. \frac{1}{2} \alpha \end{array}\right\} = - a^2 Cos^2. \alpha,$$

dat

dat is $(y'^2 - x'^2)(Cos^2.\frac{1}{2}a - Sin^2.\frac{1}{2}a) = -a^2 Cos^2.a$,

of $(y'^2 - x'^2) Cos.a = -a^2 Cos^2.a$,

dus $y'^2 - x'^2 = -a^2 Cos.a$,

waaruit $y' = \pm\sqrt{(x'^2 - a^2 Cos.a)}$;

voor de vergelijking op de regthoekige coördinaten; en hieruit blijkt, dat de kromme lijn eene gelijkzijdige hyperbool is, waarin de halve eerste en tweede as beide gelijk zijn aan AF $= a\sqrt{Cos.a}$.

1°. Gevolg. Loopen al de middellijnen evenwijdig met BB', zoo wordt BB' de eerste as, en dan komt onze constructie volkomen overeen met het gevolg op het voorgaande vraagstuk.

2°. Gevolg. Staan al de middellijnen loodregt op BB', dan gaat de hyperbool klaarblijkelijk over in de regte lijn XY. De vergelijking bevestigt dit volkomen; want in dit geval is $a = 90°$ en $Cos.a = 0$; waardoor de vergelijking overgaat in $y' = x'$. De lijn AP deelt boven dien in dit geval den hoek XAM midden door, en deze twee omstandigheden te zamen genomen, toonen ten duidelijkste de lijn XY als de plaats van het geconstrueerde punt aan.

CIV. VOORSTEL.

Door R. van Wijk Jz.

Een' willekeurigen kegel, door twee vlakken, evenwijdig met de basis, in drie stukken te verdeelen, welke tot elkander in gegevene reden zijn?

Opgelost door J. W. Martini, W. Top Wz. en R. van Wijk Jz.

Oplossing van J. W. Martini.

Onderstel, dat DE en FG, *Fig.* 68, de gevraagde vlakken zijn, en dat zij de loodlijn AH in K en I doorsnijden, dan moet, ingevolge het vraagstuk, de volgende evenredigheid plaats hebben:

Fig. ADE : *Fig.* DEFG : *Fig.* FGBC $= p : q : r$,

 en

en uit deze evenredigheid volgen terstond deze twee andere:

$$Kegel\ ADE : Kegel\ ABC = p : p + q + r,$$
$$Kegel\ AFG : Kegel\ ABC = p + q : p + q + r.$$

Stellen wij nu de loodlijnen AK, AI en AH gelijk x, y en h, dan hebben wij, omdat gelijkvormige kegels tot elkander in reden zijn als de cuben van de hoogten,

$$Kegel\ ADE : Kegel\ ABC = x^3 : h^3,$$
$$Kegel\ AFG : Kegel\ ABC = y^3 : h^3,$$

en deze evenredigheden met de voorgaande verbindende, hebben wij:

$$x^3 : h^3 = p : p + q + r$$
$$y^3 : h^3 = p + q : p + q + r,$$

waaruit dan volgt:

$$x^3 = h^3 \times \frac{p}{p + q + r}, \qquad y^3 = h^3 \times \frac{p + q}{p + q + r},$$

en $\quad x = h \sqrt[3]{\frac{p}{p + q + r}}, \qquad y = h \times \sqrt[3]{\frac{p + q}{p + q + r}},$

waardoor de punten K en I, en dus ook de gevraagde doorsneden, bepaald zijn.

CV. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Aan de uiteinden van eenen hefboom van gegevene lengte zijn twee krachten a en b met elkander in evenwigt; hoe ver zal men het steunpunt moeten verschuiven, opdat, in die zelfde punten, twee krachten c en d met elkander in evenwigt zullen zijn?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, W. TOP Wz. en M. B. JONG.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Stellen wij voor de gegevene lengte van den hefboom p voeten, dan zal de afstand van het steunpunt tot de punten, waarin de krachten a en b werken, voor het evenwigt worden uitgedrukt door

$$p \times \frac{b}{a + b} \quad \text{en} \quad p \times \frac{a}{a + b},$$

om-

omdat namelijk deze afstanden in omgekeerde reden moeten zijn van de krachten, en derzelver som gelijk p moet wezen.

Werken nu in de uiteinden, in plaats van de a en b, de krachten c en d, dan zal voor het evenwigt het nieuwe steunpunt van deze uiteinden, om dezelfde reden, geplaatst moeten zijn op afstanden

$$p \times \frac{d}{c+d} \quad \text{en} \quad p \times \frac{c}{c+d}.$$

De afstand tusschen deze twee steunpunten, dat is de ruimte, welke het eerste steunpunt zal moeten worden verschoven, zal bij gevolg worden uitgedrukt door

$$p\left(\frac{d}{c+d} - \frac{b}{a+b}\right),$$

of wel door $$p\left(\frac{a}{a+b} - \frac{c}{c+d}\right),$$

welke twee uitdrukkingen volmaakt dezelfde zijn, omdat derzelver verschil is

$$p\left(\frac{c+d}{c+d} - \frac{a+b}{a+b}\right) = p\,(1 - 1) = 0.$$

CVI. Voorstel.

Door R. van Wijk Rz.

Om eenen gegevenen kegel, met cirkelvormigen bazis, eene driehoekige piramide te plaatsen, met de drie opstaande zijvlakken den kegel aanrakende, zoodanig, dat de inhoud van deze piramide tot dien van den kegel in gegevene reden zij?

Opgelost *door* W. Top Wz. en R. van Wijk Jz.

Oplossing *van* W. Top Wz.

Beschrijven wij om den cirkelvormigen bazis ABC, *Fig.* 69, des kegels den driehoek DEF, en brengen wij door het toppunt van den kegel, en de zijden van dezen driehoek, platte vlakken, dan zullen dezelve den kegel aanraken, en in deszelfs

toppunt te zamen komen. De driehoekige piramide, die hierdoor om den kegel ontstaat, zal met dezelve gelijke hoogte hebben, en dus zullen de inhouden van deze ligchamen tot elkander in reden zijn als derzelver grondvlakken. Hieruit volgt dus, dat ons vraagstuk is terug gebragt tot het construeren van een' driehoek DEF om eenen gegevenen cirkel, zoodanig, dat de inhouden dezer figuren tot elkander in de opgegevene reden zijn. Stellen wij alzoo MA $=$ MB $=$ MC $= r$, DF $= x$, FE $= y$ en DE $= z$; dan zullen wij x, y en z zoodanig moeten bepalen, dat er voldaan wordt aan de evenredigheid:

$$\textit{Driehoek}\ \mathrm{DEF} : \textit{Cirkel}\ \mathrm{ABC} = p : q.$$

Nu hebben wij vooreerst

$$\textit{Driehoek}\ \mathrm{DEF} = \tfrac{1}{2}xr + \tfrac{1}{2}yr + \tfrac{1}{2}zr,$$
$$= \tfrac{1}{2}(x + y + z)\,r,$$

en

$$\textit{cirkel}\ \mathrm{ABC} = r^2\pi.$$

Waaruit volgt:

$$\tfrac{1}{2}(x + y + z)\,r : r^2\pi = p : q$$

of

$$\tfrac{1}{2}(x + y + z) = \frac{pr\pi}{q} \quad \ldots\ldots (1)$$

Daar verder r de straal van den omgeschreven' cirkel is des driehoeks, welke x, y en z tot zijden heeft, zoo is, door de bekende formule,

$$r = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(x+y-z)(x-y+z)(-x+y+z)}{x+y+z}} \quad . (2)$$

Meer dan deze twee vergelijkingen levert het voorstel niet op, en daar er drie onbekenden zijn, zoo is hetzelve onbepaald. Wij kunnen er dus nog eene voorwaarde bijvoegen, en hiertoe nemen wij aan, dat de driehoek gelijkbeenig moet zijn. Stellen wij dan vooreerst, omdat $\tfrac{1}{2}(x + y + z)$ uit (1) bekend is, $\tfrac{1}{2}(x + y + z) = \frac{pr\pi}{q} = s$, dan wordt de tweede vergelijking

$$(s - x)(s - y)(s - z) = r^2 s,$$

en stellen wij nu $x = y$, en bij gevolg, omdat $x + y = 2s - z$ is, $x = y = s - \tfrac{1}{2}z$, dan gaat de laatste vergelijking over in

$$\tfrac{1}{2}z \times \tfrac{1}{2}z\,(s - z) = r^2 s,$$

of

$$z^2(s - z) = 4\,r^2 s,$$

dat

dat is $z^3 - sz^2 + 4r^2s = 0$;
of wanneer wij $z = u \times s$ ſtellen

$$u^3 - u^2 + 4\frac{r^2}{s^2} = 0.$$

Zoodra dus de betrekking tusſchen r en s in getallen gegeven is, kan u bij benadering gevonden worden, en hieruit wordt dan $z = su$ benevens $x = y = s - \frac{1}{2}z$ bekend.

CVII. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

In eenen gegevenen kegel met cirkelvormigen bazis eene driehoekige piramide te plaatſen, met de drie opſtaande ribben het oppervlak van den kegel aanrakende, zoodanig, dat de inhoud van deze piramide tot dien van den kegel in reden zij als twee gegevene getallen?

OPGELOST *door* W. TOP Wz. en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* W. TOP Wz.

Redeneren wij hier zoo als in het voorgaande vraagſtuk, dan komt het opgegevene Voorſtel hierop neder, om een' driehoek zoodanig in eenen gegevenen cirkel te plaatſen, dat de inhouden dezer figuren tot elkander in reden zijn als twee gegevene getallen p en q.

Stellen wij hiertoe den ſtraal van den cirkel r en de zijden van den driehoek x, y en z, dan is de inhoud van den driehoek $\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}$ en de inhoud van den cirkel $r^2\pi$, zoodat

$$\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)} : r^2\pi = p : q$$

en $$\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)} = \frac{pr^2\pi}{q} \quad \ldots (1)$$

Daar verder r de ſtraal van den omgeſchreven' cirkel des driehoeks is, waarvan x, y en z de zijden zijn, zoo hebben wij, door de bekende formule,

$$\frac{xyz}{\sqrt{s(s-x)(s-y)(s-z)}} = 4r \ldots (2)$$

in welke vergelijkingen nu $s = \frac{1}{2}(x + y + z)$ is.

Stellen wij dus kortheidshalve $\frac{pr^2\pi}{q} = A^2$, dan hebben wij deze twee vergelijkingen:

$$s(s-x)(s-y)(s-z) = A^4 \ldots\ldots (I)$$

en

$$xyz = 4rA^2 \ldots\ldots\ldots (II)$$

en daar het voorstel tot geene verdere vergelijkingen aanleiding geeft, zoo is hetzelve onbepaald.

Wij kunnen dus wederom eene willekeurige voorwaarde bij de reeds opgegevene voegen; nemen wij hiertoe aan, dat de driehoek gelijkbeenig moet zijn, dan kunnen wij $y = x$ stellen, en hierdoor gaan onze vergelijkingen over in

$$s(s-y)^2(s-z) = A^4 \quad \text{en} \quad y^2z = 4rA^2;$$

daar verder $s = \frac{1}{2}(x + y + z)$ is, zoo wordt door de stelling van $x = y$, $s = y + \frac{1}{2}z$, dus $s - y = \frac{1}{2}z$ en $s - z = y - \frac{1}{2}z$, waardoor onze vergelijkingen veranderen in

$$(y^2 - \tfrac{1}{4}z^2) \times \tfrac{1}{4}z^2 = A^4 \quad \text{en} \quad y^2z = 4rA^2.$$

Uit de tweede is $y^2 = \frac{4rA^2}{z}$, en brengende dit over in de eerste, dan komt er, na herleiding,

$$z^4 - 16rA^2z + 16A^4 = 0,$$

of stellende $z = 2Au$

$$u^4 - \frac{2r}{A}u + 1 = 0.$$

Uit deze vergelijking u bij benadering gevonden hebbende, is $z = 2Au$, en $x = y = 2A\sqrt{\frac{r}{z}}$, waardoor al het begeerde gevonden is.

CVIII. VOORSTEL,

Door C. F. Julius.

Vier persönen hebben elk een aantal guldens, welke eene rekenkunstige reeks uitmaken, waarvan het gemeene verschil 15 is.

Wan-

Wanneer men $\frac{10}{11}$ neemt van het aantal guldens, dat zij te zamen bezitten, verkrijgt men een rationaal quadraat, waarvan de wortel gelijk is aan $\frac{1}{11}$ van het aantal guldens, dat zij te zamen bezitten. Hoe veel guldens heeft elk dezer personen? (22)

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, M. B. JUNG, R. VAN WIJK Jz., W. TOP Wz., G. J. SARLET, A. VAN DER SWAN *en* J. PEEREBOOM.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Stel den wortel van het rationale quadraat x, dan is het aantal guldens, dat zij te zamen bezitten, $11\ x$. Nemende hiervan $\frac{10}{11}$, dan komt er $10\ x$, en daar dit nu gelijk x^2 moet zijn, zoo hebben wij terstond $10\ x = x^2$ of $x = 10$, waaruit voor de som der guldens van de vier personen komt 110 guldens.

Stel nu, dat de eerste y guldens bezit, dan heeft de tweede $y + 15$, de derde $y + 30$ en de vierde $y + 45$ guldens. De som hiervan $4\ y + 90$ zijnde, zoo is $4\ y + 90 = 110$ of $4\ y = 20$, dus $y = 5$, en het aantal guldens, dat de vier personen bezitten, is bij gevolg 5, 20, 35 en 50.

CIX. VOORSTEL.

Door A. VOLKERSE.

Iemand geeft dagelijks, aan drie bedelaars, den eersten een dubbeltje, den tweeden een' stuiver, en den derden eenen duit. In zeker vol getal weken bedraagt de som zijner uitgegevene stukken geld een getal van drie cijferletters, waarvan het middelste gelijk is aan de som der twee uitersten. Vrage hoe veel geld hij ten minste uitgegeven heeft?

OP-

(22) *Vraagstukken tot oefening voorgesteld, door* J. OOSTWOUD, N°. 423.

Opgelost *door* A. Volkerse, C. F. Julius, W. Top Wz., A. van der Swan, M. B. Jung, R. van Wijk Jz. en G. J. Sarlet.

Oplossing *van* A. Volkerse.

Daar in het aantal uitgegevene stukken evenveel dubbeltjes en stuivers als duiten begrepen zijn, zoo is hetzelve door 3 deelbaar. Daar de dagelijksche uitgaaf een rond getal weken duurt, zoo is het aantal stukken ook door 7 deelbaar. Daar eindelijk dit aantal stukken uit drie cijferletters bestaat, waarvan de middelste gelijk is aan de som van de twee uitersten, zoo is dit getal stukken eindelijk ook door 11 deelbaar (*).

Het uitgegeven aantal stukken moet dus door 3, 7 en 11 deelbaar wezen, en daar deze getallen onderling ondeelbaar zijn, zoo is het kleinste getal, dat aan gezegde voorwaarde voldoet, $3 \times 7 \times 11$. Het aantal uitgegevene stukken is alzoo $3 \times 7 \times 11 = 231$, en daar er elken dag drie stukken worden uitgegeven, zoo heeft de uitdeeling $7 \times 11 = 77$ dagen $= 11$ weken geduurd.

Daar eindelijk de dagelijksche uitgaaf $3\frac{1}{8}$ stuiver is, zoo is de geheele uitgaaf $77 \times 3\frac{1}{8}$ stuiver, dat is $240\frac{5}{8}$ stuiver, of wel *f* 12 . — . 10.

CX. Voorstel.

Door H. G. Witlage Jr.

Twee getallen te vinden, waarvan het grootste staat tot het kleinste als de som der getallen tot 45, en het kleinste tot het grootste als 9 tot het verschil der getallen? (23)

Op-

(*) Elk getal namelijk, waarin het opgegeven kenmerk plaats heeft, is van den vorm $100\,a + 10\,(a + b) + b$ of $110\,a + 11\,b$, dat is $11\,(10\,a + b)$, en bij gevolg door 11 deelbaar. (*Wetensch. Comm.*)

(23) J. de Gelder, *Beginselen der Stelkunst*, *bl.* 245. N°. 30.

OPGELOST *door* H. G. WITLAGE JR., A. VAN DER SWAN, C. F. JULIUS, G. J. SARLET, J. PEERBOOM, B. BEKKING, R. VAN WIJK JZ., W. TOP WZ. en M B. JUNG.

OPLOSSING *van* H. G. WITLAGE JR.

Stel het grootste getal x en het kleinste y, dan geeft het vraagstuk de volgende evenredigheden:

$$x : y = x + y : 45, \qquad y : x = 9 : x - y,$$

en wij hebben alzoo de vergelijkingen:

$$45x = xy + y^2, \qquad 9x = xy - y^2,$$

waarvan de som en het verschil is

$$54x = 2xy, \qquad 36x = 2y^2.$$

Uit de eerste is $y = 27$, en brengende dit in de laatste, dan komt er $x = \frac{1}{18} y^2 = 40\frac{1}{2}$, waardoor de gevraagde getallen bepaald zijn.

CXI. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Deel het getal 52 *in drie deelen, zoodanig, dat het kleinste, met een derde van het middelste en een zesde van het grootste, gelijk zij aan* 22, *en dat het verschil van de grootste deelen één minder zij dan twee derde van het middelste deel?* (24)

OPGELOST *door* H. G. WITLAGE JR., M. B. JUNG, B. BEKKING, W. TOP WZ., G. J. SARLET, R. VAN WIJK JZ., A. VAN DER SWAN, J. PEERREBOOM en C. F. JULIUS.

OPLOSSING *van* H. G. WITLAGE JR.

Stel het kleinste deel x en het middelste y, dan is het grootste deel $52 - (x + y)$, en het vraagstuk geeft deze twee vergelijkingen:

$x +$

(24) *Idem bl.* 245. N°. 29.

$$x + \tfrac{1}{3}y + 8\tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{6}(x + y) = 22,$$
$$52 - x - 2y = \tfrac{2}{3}y - 1.$$

Uit de eerste vergelijking is $y = 80 - 5x$ en uit de tweede $y = \frac{159 - 3x}{8}$; deze twee waarden van y aan elkander gelijk stellende, komt er

$$\frac{159 - 3x}{8} = 80 - 5x,$$

waaruit $x = 13$, en bij gevolg $y = 80 - 5x = 15$, zoodat het derde deel wordt $52 - (x + y) = 24$.

CXII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Men vraagt naar eene rekenkunstige reeks van vier termen, zoodanig, dat als men bij den eersten term 13, *bij den tweeden* 16, *bij den derden* 21 *en bij den vierden* 34 *telt, er eene harmonische reeks ontstaat?*

OPGELOST *door* W. TOP WZ., M. P. JUNG, J. PEEREBOOM en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* W. TOP WZ.

Nemen wij voor de vier termen van de rekenkunstige reeks x, $x + y$, $x + 2y$ en $x + 3y$, dan verkrijgen wij voor de vier termen van de harmonische reeks $x + 13$, $x + y + 16$, $x + 2y + 21$ en $x + 3y + 34$. Daar nu elke drie achtervolgende termen van eene harmonische reeks de eigenschap hebben, dat het verschil der twee eerste tot het verschil der twee laatste in reden is als de eerste tot de derde, zoo hebben wij deze twee evenredigheden:

$$x + 13 \quad : \quad x + 2y + 21 = y + 3 : y + 5,$$
$$x + y + 16 : x + 3y + 34 = y + 5 : y + 13,$$

of, omdat in elke evenredigheid het verschil der termen van de

de eerste reden tot het verschil der termen van de tweede reden in reden is als de eerste tot den derden term

$$y + 4 : 1 = x + 13 : y + 3$$
$$y + 9 : 4 = x + y + 16 : y + 5.$$

Hierdoor verkrijgen wij nu deze twee vergelijkingen:

$$x + 13 = y^2 + 7y + 12,$$
$$4x + 4y + 64 = y^2 + 14y + 45.$$

De eerste dezer vergelijkingen met 4 vermenigvuldigende en alsdan van de tweede aftrekkende, blijft er

$$4y + 12 = - 3y^2 - 14y - 3,$$

of $$3y^2 + 18y + 15 = 0,$$

dat is $$y^2 + 6y + 5 = 0,$$

waaruit $$y = - 3 \pm \sqrt{4},$$

dus $$y = - 1 \quad \text{of.} \quad y = - 5,$$

en daar $x = y^2 + 7y - 1$ is, zoo stemt met deze waarden van y overeen

$$x = - 7 \quad \text{of} \quad x = - 11.$$

Nemende $x = - 11$ en $y = - 5$, dan is de rekenkunstige reeks $- 11$, $- 16$, $- 21$, $- 26$, en de harmonische reeks wordt alsdan 2, 0, 0, 8.

Nemen wij daarentegen $y = - 1$ en $x = - 7$, dan is de rekenkunstige reeks $- 7$, $- 8$, $- 9$, $- 10$, en de harmonische reeks 6, 8, 12, 24.

CXIII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Van een getal, uit drie cijferletters bestaande, staat het eerste cijfer aan de linkerhand tot het tweede, als het tweede tot het derde; het getal zelf staat tot de som der drie cijferletters als 124 *tot* 7, *en zoo men* 594 *bij het getal optelt, dan komt er het omgekeerde van het gevraagde getal. Welk getal is dit?*

Op-

Opgelost *door* H. G. Witlage Jr., C. F. Julius, R. van Wijk Jz., M. B. Jung, W. Top Wz., A. van der Swan, G. J. Sarlet en J. Peereboom.

Oplossing *van* H. G. Witlage Jr.

Stel de cijferletters, welke de honderdtallen, tientallen en eenheden uitdrukken, x, y en z, dan wordt het getal voorgesteld door $100x + 10y + z$; terwijl het omgekeerde van het getal door $100z + 10y + x$ zal worden uitgedrukt.

Daar de cijferletters eene opklimmende meetkunstige reeks moeten vormen, zoo is $x : y = y : z$, en dit geeft ons de vergelijking:

$$xz = y^2.$$

Omdat verder het getal tot de som der cijfers in reden moet zijn als 124 tot 7, zoo hebben wij de evenredigheid: $100x + 10y + z : x + y + z = 124 : 7$ en dit geeft ons tot tweede vergelijking

$$700x + 70y + 7z = 124x + 124y + 124z.$$

Daar eindelijk het getal, met 594 vermeerderd, het omgekeerde van het getal moet voortbrengen, zoo is de derde vergelijking:

$$100x + 10y + z + 594 = 100z + 10y + x.$$

en deze drie vergelijkingen laten zich gemakkelijk tot de drie volgende herleiden:

$$xz = y^2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$64x = 6y + 13z \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

$$x = z - 6 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Uit de tweede is $y = \frac{64x - 13z}{6}$ en brengende hierin de waarde van x uit (3) over, dan komt er

$$y = \frac{17z - 128}{2} \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

brengende dus de waarde van x en y, in (3) en (4) gevonden, over in de vergelijking (1), dan komt er

$$(z - 6)\, z = \frac{(17z - 128)^2}{4},$$

of

of $4z^2 - 24z = 289z^2 - 4352z + 16384$;
dus $285z^2 - 4328z + 16384 = 0$;
waaruit wij vinden $z = 8$ of $z = 7\frac{17}{95}$.

De tweede waarde van z kan hier niet gebruikt worden, omdat z een geheel getal moet zijn, en wij hebben alzoo $z = 8$; $x = z - 6 = 2$, $y = \frac{17z - 128}{2} = 4$, en het gevraagde getal is 248.

ANDERE OPLOSSING *door* C. F. JULIUS.

Omdat de cijferletters eene opklimmende meetkunstige evenredigheid moeten vormen, stellen wij voor dezelve x, xy en xy^2; het getal is alsdan $100x + 10xy + xy^2$ of $x(100 + 10y + y^2)$, terwijl het omgekeerde van het getal wordt voorgesteld door $100xy^2 + 10xy + x$ of $x(1 + 10y + 100y^2)$.

De twee andere voorwaarden van het vraagstuk geven ons nu, omdat de som der cijferletters is $x(1 + y + y^2)$, de twee volgende vergelijkingen:

$$x(100 + 10y + y^2) : x(1 + y + y^2) = 124 : 7,$$

en $$x(100 + 10y + y^2) + 594 = x(1 + 10y + 100y^2),$$

welke ook aldus kunnen worden geschreven:

$$7(100 + 10y + y^2) = 124(1 + y + y^2),$$

en $$x(99y^2 - 99) = 594,$$

of, wat hetzelfde is,

$$13y^2 + 6y - 64 = 0,$$

en $$x = \frac{6}{y^2 - 1}.$$

Uit de eerste dezer twee vergelijkingen vinden wij $y = 2$, daar ons de andere wortel, als negatief zijnde, niet dienen kan, en hierdoor is $x = \frac{6}{y^2 - 1} = 2$; de cijferletters zijn alzoo $x = 2$, $xy = 4$ en $xy^2 = 8$ en het gevraagde getal is 248.

AANMERKING *door* I. R. SCHMIDT.

Het opgegevene vraagstuk kan ook zonder algebra op de volgende wijze ontbonden worden.

Daar

Daar de drie cijferletters eene opklimmende meetkunstige reeks moeten maken, en elke der cijferletters niet grooter dan 9 kan wezen, zoo kan het gevraagde getal niet anders zijn, dan een der drie getallen 139, 124 of 248, en wij zullen dus alleen moeten beproeven, welk dezer getallen aan de twee overige voorwaarden voldoet.

Bij het eerste staat het getal zelf tot de som der cijferletters als 139 : 13, doch bij de twee andere staat het getal tot de som der cijferletters als 124 : 7. Het gevraagde getal kan dus niet anders zijn dan 124 of 248.

Tellen wij bij het eerste 594 op, dan komt er 718, hetwelk geenszins het omgekeerde van 124 is; ook dit tweede getal vervalt bij gevolg, en er blijft dus niet meer over dan het getal 248 te beproeven.

Daar eindelijk 248 + 594 = 842 en dus het omgekeerde van 248 is, zoo is 248 het eenigste getal, dat gelijktijdig aan de drie opgegevene voorwaarden kan voldoen. Het gevraagde getal is alzoo 248.

CXIV. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Twee kooplieden drijven ieder eenen bijzonderen handel; A met f 16000 en B met f 12000. Na a jaren bevindt A, b ten honderd in het jaar gewonnen te hebben, daar B in dien tijd c ten honderd in het jaar verloren heeft. Indien men nu weet, dat c twee meer is dan a, en dat a met b vermenigvuldigd en tot dit product 1 *opgeteld een quadraat geeft, welks wortel gelijk* $\frac{1}{8}$ *der som van a en b min* 1 *is, en dat* 8 *maal het gemelde product plus a gelijk is aan de som van* a^3 *en* b^2*, dan vraagt men hoe groot het kapitaal van ieder na a jaren geweest is?*

OPGELOST *door* W. TOP WZ., H. G. WITLAGE JR., C. F JULIUS, R. VAN WIJK JZ. en A. VAN DER SWAN.

OPLOSSING *van* W. TOP WZ.

Het

Het kapitaal van A is 16000 gulden en hiervan is na a jaren, tegen b ten honderd, de winst $\frac{16000 \times ab}{100} = 160\ ab$; het kapitaal van A is dus na a jaren 160 $(100 + ab)$ gulden.

Het kapitaal van B is 12000 gulden, het verlies in a jaren tegen c ten honderd is dus $\frac{12000 \times ac}{100} = 120\ ac$, waaruit volgt, dat het kapitaal van B na a jaren is 12000 $-$ 120 ac, of 120 $(100 - ac)$ gulden.

Daar nu $c = a + 2$ is, hebben wij alleen a en b te bepalen, en hiertoe geeft het voorstel de vergelijkingen

$$ab + 1 = \left(\frac{a + b - 1}{3}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$8ab + a = a^3 + b^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Uit de laatste vergelijking is

$$b^2 - 8ab = a - a^3,$$

en losfende deze vierkantsvergelijking ten opzigte van b op, dan komt er

$$b = 4a \pm \sqrt{(a + 16a^2 - a^3)};$$

fubstitueren wij deze waarde van a in de vergelijking (1), dan komt er

$$1 + 4a^2 \pm a\sqrt{(a + 16a^2 - a^3)} = \tfrac{1}{9}(5a - 1 \pm \sqrt{(a + 16a^2 - a^3)})^2,$$

of, wanneer wij het tweede lid ontwikkelen, alles met 9 vermenigvuldigen en de wortelgrootheden in het tweede lid overbrengen,

$$a^3 - 5a^2 + 9a + 8 = \pm(a - 2)\sqrt{(a + 16a^2 - a^3)};$$

en wanneer wij deze vergelijking in het vierkant verheffen en alles naar de magten van a rangfchikken, zullen wij verkrijgen:

$$a^6 - 9a^5 + 23a^4 - 7a^3 - 59a^2 + 140a + 64 = 0,$$

uit welke zesdemagts-vergelijking wij vinden $a = 4$. Hierdoor vinden wij $b = 16 \pm 14 = 30$ of $= 2$: maar $b = 2$ voldoet niet aan de vergelijking (1); wij nemen dus $b = 30$, welke werkelijk aan deze vergelijking voldoet, en hebben alzoo $a = 4$, $b = 30$ en $c = 6$. Hieruit volgt, dat beide kapitalen 4 jaar hebben uitgeftaan, dat A 30 percent 's jaars gewonnen en B 6 percent 's jaars verloren heeft, waaruit dan eindelijk voor het kapitaal van A na a jaren gevonden wordt 35200 gulden, en voor dat van B na a jaren 9120 gulden.

CXV. Voorstel.

Door H. G. Witlage Jr.

Eene harmonische reeks van vier termen te vinden, waarvan de som der uiterste gelijk a en de som der middelste gelijk b is? (25)

Opgelost *door* M. B. Jung, W. Top Wz. en R. van Wijk Jz.

Oplossing *van* M. B. Jung.

Daar de rekenkunstige reeksen de eigenschap hebben, van, door derzelver termen in de eenheid te deelen, eene harmonische reeks voort te brengen, zoo kan men voor de termen van de harmonische reeks stellen

$$\frac{1}{x-3y},\quad \frac{1}{x-y},\quad \frac{1}{x+y},\quad \frac{1}{x+3y},$$

en dan heeft men, volgens het voorstel, de twee vergelijkingen

$$\frac{1}{x-3y}+\frac{1}{x+3y}=a,$$

en

$$\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}=b,$$

en wanneer wij deze vergelijkingen van gebrokens zuivere n

$$2x=ax^2-9ay^2 \quad \text{en} \quad 2x=bx^2-by^2;$$

deze waarden van $2x$ aan elkander gelijk stellende, komt er

$$ax^2-9ay^2=bx^2-by^2,$$

of

$$(a-b)\,x^2=(9a-b)\,y^2,$$

waaruit

$$y=\pm x\sqrt{\frac{a-b}{9a-b}}.$$

Brengende deze waarde van y over in de vergelijking $2x = bx^2 - by^2$, dan komt er

$$2x=bx^2-b\,.\,\frac{a-b}{9a-b}\,x^2,$$

of

$$b\left(1-\frac{a-b}{9a-b}\right)x^2=2x,$$

dat is

$$\frac{8ab}{9a-b}\,x=2,$$

waar-

(25) J. de Gelder, *Beginselen der Stelkunst, bladz.* 259, N°. 110.

waaruit $x = \frac{9a - b}{4ab}$,

en bij gevolg $y = \pm \frac{9a-b}{4ab} \sqrt{\frac{a-b}{9a-b}} = \pm \frac{\sqrt{(a-b)(9a-b)}}{4ab}$.

Hierdoor verkrijgen wij alzoo voor de termen van de harmonische reeks

$$\frac{1}{x-3y} = \frac{1}{\frac{9a-b}{4ab}\left(1 \mp 3\sqrt{\frac{a-b}{9a-b}}\right)} = \tfrac{1}{2}a\left(1 \pm 3\sqrt{\frac{a-b}{9a-b}}\right),$$

$$\frac{1}{x-y} = \frac{1}{\frac{9a-b}{4ab}\left(1 \mp \sqrt{\frac{a-b}{9a-b}}\right)} = \tfrac{1}{2}b\left(1 \pm \sqrt{\frac{a-b}{9a-b}}\right),$$

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{\frac{9a-b}{4ab}\left(1 \pm \sqrt{\frac{a-b}{9a-b}}\right)} = \tfrac{1}{2}b\left(1 \mp \sqrt{\frac{a-b}{9a-b}}\right),$$

$$\frac{1}{x+3y} = \frac{1}{\frac{9a-b}{4ab}\left(1 \pm 3\sqrt{\frac{a-b}{9a-b}}\right)} = \tfrac{1}{2}a\left(1 \mp 3\sqrt{\frac{a-b}{9a-b}}\right),$$

en het is klaar, dat wij de bovenste of de benedenste teekens gebruikende, volmaakt dezelfde reeks verkrijgen, zoodat er slechts één antwoord op het vraagstuk kan bestaan.

Zal het vraagstuk mogelijk zijn, dan moet $\frac{a-b}{9a-b}$ of $(a-b)(9a-b)$ positief wezen, waaruit volgt, dat voor b alle mogelijke getallen mogen genomen worden, welke niet tusschen a en $9a$ begrepen zijn. Zoodra dus $b < a$ of $b > 9a$ is, zal het vraagstuk mogelijk wezen.

$b = a$ en $b = 9a$ geven eindelijk oneigenlijke antwoorden, want voor $b = a$ worden al de termen even groot en gelijk $\tfrac{1}{2}a$, en voor $b = 9a$ worden al de termen oneindig groot.

CXVI. VOORSTEL.

Door J. VAN DER STOK.

Eene onbepaalde regte lijn XY, Fig. 70, met twee punten A en B boven dezelve gegeven zijnde, zoo vraagt men de meetkunstige plaats van eenig punt P te vinden, dat de eigenschap heeft, van de lijnen AD en BC, welke uit de gegevene punten

A en B, door dit punt P, naar de gegevene lijn XY getrokken, worden, zoodanig te deelen, dat de regthoek AP × PD, onder de deelen van de eerste lijn gelijk zij aan den regthoek BP × PC onder de deelen van de andere lijn?

OPGELOST *door* J. VAN DER STOK en J. W. MARTINI.

OPLOSSING *van* J. VAN DER STOK.

De bekende eigenschap van de snijlijnen in eenen cirkel geeft ons een gemakkelijk middel aan de hand, om zoo veel punten der gevraagde lijn als men verkiest door constructie te bepalen. Men deele namelijk de lijn AB, die de gegevene punten vereenigt, midden door in N en trekke door N eene onbepaalde loodlijn NI op AB, dan zal elk der punten van deze loodlijn het middelpunt zijn van eenen cirkel, die door de punten A en B gaat. Laat dan uit eenig punt M in NI een cirkel ABDC beschreven worden, welke door de punten A en B gaat; indien dan de lijnen AD en BC getrokken worden, zal derzelver snijpunt P een punt van de gevraagde kromme lijn zijn, omdat wij door de eigenschap der snijlijnen hebben AP × PD = BP × PC.

Dezelfde cirkel ABDC doet ons nog een tweede punt P′ van de kromme lijn kennen, welk punt de doorsnijding is van de lijnen CA en DB; want uit de eigenschap der lijnen, welke elkander buiten den cirkel snijden, hebben wij AP′ × CP′ = BP′ × DP′, en de regthoeken, op beide lijnen uit A en B door P′ getrokken, zijn alzoo werkelijk gelijk.

Door verschillende punten M in de lijn NI aan te nemen, en voor elk dezer punten de opgegevene constructie te herhalen, is het klaar, dat wij zoo veel punten zullen kunnen vinden als wij verkiezen, waardoor dan de loop van de geheele kromme lijn door constructie bekend zal worden.

Al de punten M van de lijn NI kunnen echter niet tot deze constructie worden gebezigd; er bestaan namelijk twee cirkels, welke door de punten A en B gaan en tevens de lijn XY aanraken. Al de cirkels nu, waarvan de middelpunten tusschen die van gezegde rakende cirkels gelegen zijn, kunnen de lijn XY snijden noch raken, en geven alzoo tot geene punten P van de kromme lijn aanleiding.

Elk

Elk der overige punten M van NI doet echter twee punten van de kromme lijn kennen, en men zal zich, door een genoegzaam aantal punten te construeren, ten duidelijkste kunnen overtuigen, dat de voorgestelde kromme twee oneindig voortloopende takken, en in derzelver loop zeer veel overeenkomst met eene hyperbool heeft.

Om de vergelijking der kromme te vinden, verlengen wij AB, tot zij XY in E ontmoet en trekken PG evenwijdig met XY. Stellende dan AB $= 2a$, NG $= x$ en PG $= y$, dat is, nemen wij NE als de as der abscisfen, en X′Y′, door het punt N evenwijdig met XY getrokken, als as der ordinaten aan, dan heeft men in driehoek DAE

$$DE : PG = AE : AG,$$

en in driehoek CBE

$$CE : PG = BE : BG,$$

welke evenredigheden, omdat AG $= x + a$, BG $= x - a$ en PQ $= y$ is, overgaan in

$$DE : y = AE : x + a, \qquad CE : y = BE : x - a;$$

vermenigvuldigen wij nu, de overeenkomstige termen dezer evenredigheden, dan verkrijgen wij:

$$DE \times CE : y^2 = AE \times BE : x^2 - a^2,$$

maar volgens de eigenschap van den cirkel is

$$DE \times CE = AE \times BE,$$

en hieruit volgt voor de vergelijking van onze kromme

$$y^2 = x^2 - a^2 \qquad \text{of} \qquad y = \pm \sqrt{(x^2 - a^2)}$$

welke vergelijking aantoont, dat de kromme eene gelijkzijdige hyperbool is; en nemende dus NB′ $=$ NA′ $=$ NB $=$ NA $= a$, dan zijn AB en A′B′ toegevoegde middellijnen van deze hyperbool.

Daar in het algemeen de asymptoten van eene hyperbool gevonden worden door de diagonalen van het parallelogram der toegevoegde middellijnen te verlengen, en in ons bijzonder geval deze middellijnen even lang zijn, waardoor het parallelogram der middellijnen eene ruit wordt; zoo zullen wij de asymptoten KK′ en kk′ van onze hyperbool vinden, door de hoeken BNB′ en BNA′ midden door te deelen. Daar nu de hoeken BNB′ en BNA′ te zamen twee regte hoeken maken, zoo maken de lijnen KK′ en kk′, welke deze hoeken midden door deelen, eenen

regten hoek met elkander. De asymptoten van onze hyperbool staan alzoo loodregt op elkander, en dit bevestigt, dat onze hyperbool gelijkzijdig is.

Deelen wij de hoeken der asymptoten midden door, dan zullen de deellijnen LL′ en ll' de rigting van de assen aanwijzen. De hoeken, welke deze assen met de eerstgevondene middellijnen maken, zijn gemakkelijk aan te wijzen; want stellende $\angle$ BNB′ = $\angle$ AEX = α, dan is $\angle$ BNK′ = $\frac{1}{2}\alpha$, en daar $\angle$ K′NL′ = 45° is, zoo is $\angle$ L′NB = $45^\circ - \frac{1}{2}\alpha$ en $\angle$ l'NB = $45^\circ + \frac{1}{2}\alpha$. Door de algemeene formule voor de verandering van coördinaten zullen wij alzoo voor de middelpuntsvergelijking op de assen verkrijgen $y'^2 = x'^2 - a^2 \, Sin. \, \alpha$, waaruit volgt, dat de halve eerste en tweede as van onze hyperbool zal zijn NT = NT′ = $a \sqrt{Sin. \, \alpha}$.

Daar de hoeken, welke de assen met de lijn AB maken, benevens de halve assen, alleen afhangen van den hoek AEX = α en $\frac{1}{2}$ AB = a, zonder dat de waarde van NE hierop eenigen invloed heeft, zoo volgt hieruit, dat, waar de lijn XY ook evenwijdig met X′Y′ geplaatst worde, hierdoor onze hyperbool geene de minste verandering zal ondergaan.

Geheel anders is het gelegen, wanneer de hoek AEX = α, welke AB met XY maakt, of wanneer de afstand AB = $2a$ der gegevene punten anders genomen wordt. De kromme lijn blijft dan wel altijd eene gelijkzijdige hyperbool, doch dezelve verkrijgt alsdan verschillende standen ten opzigte van de lijn XY, en de grootte der assen verandert mede naar gelang der omstandigheden. Zoo wordt, bij voorbeeld, voor $\alpha = 0$, in welk geval de punten A en B even ver van XY verwijderd zijn, elk der halve assen $a \sqrt{Sin. \, \alpha} = 0$, en bij gevolg gaat de hyperbool alsdan over in de asymptoten zelve, welke in dit geval nog door het midden van AB gaan, maar waarvan de eene evenwijdig met en de andere loodregt op XY is. Voor $\alpha = 90^\circ$ wordt daarentegen de halve eerste en tweede as gelijk a, en in dit geval, dat is, in het geval, waarin AB loodregt op XY staat, is AB zelve de eerste as. De constructie zal deze omstandigheden en bovendien nog vele anderen, welke wij, om niet te langwijlig te worden, met stilzwijgen voorbij moeten gaan, volkomen bevestigen.

Uit

Uit onze oplossing kan, bij omkeering, tot de volgende stelling besloten worden: *wanneer door eenig willekeurig punt P van eene gelijkzijdige hyperbool uit de uiteinden van eenige middellijn AB lijnen getrokken worden, totdat zij eenige willekeurige lijn XY ontmoeten, welke evenwijdig loopt met de toegevoegde middellijn A'B', dan zullen de doorsnijdingspunten C en D met de punten A en B, waaruit de lijnen getrokken zijn, in eenen zelfden cirkel liggen, en men zal dus hebben AP × PD = BP × PC.* Het spreekt van zelf, dat men voor de lijn XY ook de toegevoegde middellijn X'Y' kan aannemen. De punten A, B, I en I' liggen dus mede in den omtrek van eenen cirkel, en wij hebben dus ook NI × NI' = NA × NB = NB², dat is in woorden: *wanneer uit eenig willekeurig punt P van eene gelijkzijdige hyperbool, lijnen getrokken worden door de uiteinden A en B van eenige middellijn AB, totdat zij de toegevoegde middellijn A'B' in I en I' ontmoeten, dan zal de regthoek onder de afstanden, welke deze snijpunten I en I' van het middelpunt N hebben, gelijk zijn aan het vierkant van de halve middellijn AB, door welker uiteinden de snijlijnen getrokken zijn*, hetgeen wederom eene nieuwe eigenschap voor de gelijkzijdige hyperbool is.

CXVII. VOORSTEL.

Door J. VAN DER STOK.

Door de beenen van eenen gegevenen hoek eene lijn te trekken, zoodanig, dat de driehoek, welke hierdoor ontstaat, eenen gegevenen omtrek hebbe, en deszelfs inhoud een maximum of minimum zij?

OPGELOST door J. VAN DER STOK, J. W. MARTINI en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING van J. VAN DER STOK.

Stellen wij den gegeven' hoek A, *Fig.* 71, gelijk α, en den omtrek gelijk s, en stellen wij verder AB $= y$ en AC $= x$, dan is BC $= \sqrt{(x^2 + y^2 - 2xy \, Cos. \, \alpha)}$ en wij hebben

$$x + y + \sqrt{(x^2 + y^2 - 2xy \, Cos. \, \alpha)} = s \quad \ldots (1)$$

en

$$I = \tfrac{1}{2} xy \, Sin. \, \alpha = max. \text{ of } min. \quad \ldots (2)$$

Uit de eerste vergelijking volgt

$$x + y - s = -\sqrt{(x^2 + y^2 - 2xy \,Cos.\, a)} \quad . \quad (3)$$

en brengende dit in het vierkant, dan verkrijgen wij, na de gelijke termen te hebben weggelaten,

$$2xy - 2xs - 2ys + s^2 = -2xy \,Cos.\, a,$$

of $\qquad y(2x + 2x \,Cos.\, a - 2s) = 2xs - s^2,$

dat is $\qquad y(4x \,Cos^2.\, \tfrac{1}{2} a - 2s) = s(2x - s),$

waaruit $\qquad y = \dfrac{s(2x - s)}{2(2x \,Cos^2.\, \frac{1}{2} a - s)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$

Brengen wij deze waarde van y over in de vergelijking (2), dan vinden wij, dat de functie

$$I = \tfrac{1}{4} s \,.\, Sin.\, a \,.\, \frac{2x^2 - sx}{2x \,Cos^2.\, \frac{1}{2} a - s} \quad \ldots\ldots \quad (5)$$

een maximum of een minimum moet zijn.

Uit deze laatste vergelijking trekken wij

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \tfrac{1}{4} s \,.\, Sin.\, a \,\frac{4x^2 \,Cos^2.\, \frac{1}{2} a - 4sx + s^2}{(2x \,Cos^2.\, \frac{1}{2} a - s)^2},$$

en $\dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \tfrac{1}{4} s \,.\, Sin.\, a \,.\, \dfrac{4s^2 \,Sin^2.\frac{1}{2} a}{(2x \,Cos^2.\frac{1}{2} a - s)^3} = \dfrac{s^3 \,Sin^2.\frac{1}{2} a \;Sin.\, a}{(2x Cos^2.\frac{1}{2} a - s)^3}.$

Zal nu I een maximum of minimum worden, dan moet $\dfrac{\partial I}{\partial x} = 0$ zijn, en dit geeft ons

$$4x^2 \,Cos^2\, \tfrac{1}{2} a - 4sx + s^2 = 0,$$

waaruit gevonden wordt

$$x = \frac{s}{2 \,Cos^2.\, \frac{1}{2} a} (1 \pm Sin.\, \tfrac{1}{2} a),$$

en substituerende dit in de vergelijking (4), dan vinden wij voor de overeenkomstige waarden van y

$$y = \frac{s}{2 \,Cos^2.\, \frac{1}{2} a} (1 \pm Sin.\, \tfrac{1}{2} a);$$

waaruit blijkt, dat $x = y$ is, en dat de gevraagde driehoek alzoo gelijkbeenig moet zijn.

Substitueren wij $x = \dfrac{s}{2 \,Cos^2.\, \frac{1}{2} a} (1 + Sin.\, \tfrac{1}{2} a)$ in de uitdrukking voor $\dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2}$ dan vinden wij $\dfrac{\partial^2 I}{\partial x^2} = 2 \,Cos.\, \tfrac{1}{2} a$, en deze waarde toont dus een minimum aan. Substitueren wij daarentegen

gen $x = \frac{s}{2\,Cos^2.\,\frac{1}{2}\,a}$ $(1 - Sin.\,\frac{1}{2}\,a)$ in de waarde van $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$, dan komt er $\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = -\,2\,Cos.\,\frac{1}{2}\,a$, en deze waarde van x toont bij gevolg een maximum aan.

De tweede waarde van x en y namelijk $x = y = \frac{s}{2Cos^2\,\frac{1}{2}\,a} \times$ $(1 - Sin.\,\frac{1}{2}\,a)$ doet de vergelijking (1) werkelijk overgaan in $s = s$, en voldoet bij gevolg aan het vraagstuk in den opgegeven' zin, dat is, zij maakt den omtrek van den driehoek gelijk s en deszelfs inhoud tot een maximum, en wij zullen weldra zien, hoe deze waarde kan worden geconstrueerd.

Nemen wij daarentegen $x = y = \frac{s}{2\,Cos^2.\,\frac{1}{2}\,a}(1 + Sin.\,\frac{1}{2}\,a)$ dan wordt het eerste lid van de vergelijking (1) niet gelijk s, en deze waarde schijnt dus niet aan het vraagstuk te beantwoorden. Om deze schijnstrijdigheid weg te nemen, merken wij op, dat wanneer voor $\sqrt{(x^2 + y^2 - 2\,xy\,Cos.\,a)}$ in de vergelijking (1) het teeken — had gestaan, in de vergelijking (3) voor deze zelfde uitdrukking het teeken + zou zijn gekomen, doch dat de vergelijkingen (4) en (5) hierdoor geene de minste verandering zouden hebben ondergaan, omdat, bij het quadrateren van de vergelijking (3), het volmaakt onverschillig is, of voor het tweede lid het teeken — dan wel het teeken + geschreven wordt. Wij hebben alzoo bij het oplossen van ons vraagstuk, zonder het te willen, tevens het volgende vraagstuk opgelost: *door de beenen van eenen gegevenen hoek eene lijn zoodanig te trekken, dat in den driehoek, welke hierdoor ontstaat, de som der twee zijden om den gegevenen hoek verminderd met de zijde over dezen hoek gelijk zij aan eene gegevene lijn s, en dat tevens de inhoud van dezen driehoek gelijk een minimum zij;* en het is aan dit vraagstuk, dat het antwoord $x = y = \frac{s}{2Cos^2.\frac{1}{2}a} \times$ $(1 + Sin.\,\frac{1}{2}\,a)$ voldoet, want substituerende deze waarde in de vergelijking

$$x + y - \sqrt{(x^2 + y^2 - 2\,xy\,Cos.\,a)} = s,$$

dan gaat dezelve over in $s = s$. Wij besluiten dan uit dit alles:

1°. *Dat* $x = y = \frac{s}{2\,Cos^2.\,\frac{1}{2}a)}(1 - Sin.\,\frac{1}{2}a)$ *den omtrek van den driehoek ABC gelijk s en den inhoud gelijk een maximum maakt.*

2°. *Dat* $x = y = \frac{s}{2\,Cos^2.\,\frac{1}{2}a}(1 + Sin.\,\frac{1}{2}a)$, $AB' + AC' - B'C' = s$ *en den inhoud tot een minimum maakt.*

De waarde van $x = y$ wordt in deze twee gevallen op de volgende wijze geconstrueerd. *Laat PQ = s de gegevene lijn zijn en deel den gegeven hoek door AN midden door. Maak AD = ½ PQ en trek DE loodregt op AD. Maak EI = EL = ED en neem AI' = AI en AL' = AL. Trekkende dan eindelijk BC en B'C' evenwijdig met DE, dan zullen ABC en AB'C' de begeerde driehoeken zijn.* Door deze constructie is namelijk

$$AI' = AI = AE - EI = \tfrac{1}{2}s\,(Sec.\,\tfrac{1}{2}a - Tang.\,\tfrac{1}{2}a)$$

$$= \tfrac{1}{2}s\left(\frac{1}{Cos\,\frac{1}{2}a} - \frac{Sin\,\frac{1}{2}a}{Cos.\,\frac{1}{2}a}\right) = \frac{s}{2.Cos.\,\frac{1}{2}a}(1 - Sin.\,\tfrac{1}{2}a),$$

$$AL' = AL = AE + EL = \tfrac{1}{2}s\,(Sec.\,\tfrac{1}{2}a + Tang.\,\tfrac{1}{2}a)$$

$$= \frac{s}{2\,Cos.\,\frac{1}{2}a}(1 + Sin.\,\tfrac{1}{2}a),$$

en bij gevolg

$$AB = AC = \frac{AI'}{Cos.\,\frac{1}{2}a} = \frac{s}{2\,Cos^2.\,\frac{1}{2}a}(1 - Sin.\,\tfrac{1}{2}a),$$

$$AB' = AC' = \frac{AL'}{Cos.\,\frac{1}{2}a} = \frac{s}{2\,Cos^2.\,\frac{1}{2}a}(1 + Sin.\,\tfrac{1}{2}a),$$

hetwelk juist de gevondene waarden voor x zijn.

CXVIII. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK JZ.

De waarden van x en y te vinden uit de vergelijkingen

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt{x} = 153$$

en

$$\sqrt[4]{y} + \sqrt[3]{x} + \sqrt{y} = 772?$$

OPGELOST *door* W. TOP WZ. en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* W. TOP WZ.

Stel-

Stellen wij in de gegevene vergelijkingen $x = v^{12}$ en $y = z^{12}$, dan gaan dezelve over in

$$v^3 + z^4 + v^6 = 153 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$z^3 + v^4 + z^6 = 772 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Uit de tweede dezer vergelijkingen hebben wij

$$z^4 = 772 - z^3 - z^6,$$

waaruit

$$v = \sqrt[4]{(772 - z^3 - z^6)},$$

dus

$$v^3 = \sqrt[4]{(772 - z^3 - z^6)^3},$$

en

$$v^6 = \sqrt{(772 - z^3 - z^6)^3}.$$

Brengende dit over in de eerste vergelijking, dan wordt dezelve

$$z^4 + \sqrt[4]{(772 - z^3 - z^6)^3} + \sqrt{(772 - z^3 - z^6)^3} = 153;$$

of

$$\sqrt[4]{(772 - z^3 - z^6)^3} = 153 - z^4 - \sqrt{(772 - z^3 - z^6)^3},$$

deze vergelijking in het vierkant gebragt, komt er

$$\sqrt{(772 - z^3 - z^6)^3} = (153 - z^4)^2 + (772 - z^3 - z^6)^3 - 2(153 - z^4)\sqrt{(772 - z^3 - z^6)^3},$$

of, na overbrenging der termen,

$$(307 - 2z^4)\sqrt{(772 - z^3 - z^6)^3} = (153 - z^4)^2 + (772 - z^3 - z^6)^3.$$

Deze vergelijking andermaal quadraterende, verdwijnen al de wortelgrootheden, en wij verkrijgen

$$(307 - 2z^4)^2(772 - z^3 - z^6)^3 = (153 - z^4)^4 + (772 - z^3 - z^6)^6 + 2(153 - z^4)^2(772 - z^3 - z^6)^3,$$

welke vergelijking behoorlijk ontwikkeld en volgens de magten van z gerangschikt tot de zesendertigste magt zal opklimmen, en bovendien met zeer groote coefficiënten aangedaan zal zijn, zoodat het bijna ondoenlijk zou wezen, om uit dezelve op de gewone wijze de wortels, hetzij dan in geheele getallen of bij benadering, te vinden. Om op eene gemakkelijke wijze door tasting te beproeven, of er een wortel in geheele getallen bestaan kan, kunnen wij echter dezen weg inslaan.

Daar wij vroeger gevonden hebben

$$v = \sqrt[4]{(772 - z^3 - z^6)},$$

zoo is het klaar, dat v niet bestaanbaar kan zijn, ten zij z kleiner dan 4 is, omdat $z = 4$ stellende, $z^6 = 4096$ en dus reeds grooter dan 772 wordt. Beproeven wij dan $z = 3$, dan vinden

den wij $v = \sqrt[4]{16} = 2$; substitueeren wij deze waarden van z en v in de vergelijkingen (1) en (2), dan zullen wij bevinden, dat deze waarden aan beide de vergelijkingen voldoen, en hierdoor weten wij dan, dat $z = 3$ en $v = 2$ werkelijk aan het vraagstuk beantwoorden. De waarden van x en y, die hiermede overeenstemmen, zijn $x = v^{12} = 4096$ en $y = z^{12} = 531441$.

CXIX. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Vier getallen maken eene gewone evenredigheid; het eerste is een quadraat, het tweede en vierde een driehoekig getal en het derde een cubus. De wortels der drie eerste zijn gelijk, en die van het vierde is gelijk aan den tweeden term. Welke zijn deze getallen?

OPGELOST door G. F. JULIUS, M. B. JUNG, R. VAN WIJK Jz., W. TOP Wz. en A. VAN DER SWAN.

OPLOSSING van C. F. JULIUS.

Omdat de vier getallen eene evenredigheid moeten uitmaken, waarvan de eerste term een quadraat en de derde een cubus is, welke denzelfden wortel hebben, zoo kan men de gevraagde getallen voorstellen door

$$x^2, \quad x^2y, \quad x^3 \text{ en } x^3y,$$

en daar, volgens het vraagstuk, x^2y en x^3y driehoekige getallen moeten zijn, die x en x^2y tot wortel hebben, zoo geeft ons dit de vergelijkingen:

$$x^2y = \frac{x(x+1)}{2}, \quad \text{en} \quad x^3y = \frac{x^2y(x^2y+1)}{2},$$

$$\text{of} \quad 2xy = x + 1 \quad \text{en} \quad 2x = x^2y + 1,$$

$$\text{dus} \quad y = \frac{x+1}{2x} \quad \text{en} \quad y = \frac{2x-1}{x^2}.$$

Deze twee waarden van y van elkander gelijk stellende, komt er, na met $2x^2$ vermenigvuldigd te hebben,

$$x^2 + x = 4x - 2,$$

$$\text{of} \quad x^2 - 3x + 2 = 0,$$

waar-

waaruit $x = 1$ of $x = 2$,

dus $y = 1$ of $y = \frac{3}{4}$.

Er bestaan dus twee antwoorden op het vraagstuk, want nemende $x = 1$ en $y = 1$, dan worden de gevraagde getallen 1, 1, 1 en 1.

Nemende daarentegen $x = 2$ en $y = \frac{3}{4}$, dan worden de gevraagde getallen 4, 3, 8 en 6.

CXX. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Twee getallen te vinden, waarvan de som der trigonalen 3186 *en de som der pentagonalen* 9346 *zij?* (26)

OPGELOST *door* H. G. WITLAGE JR., W. TOP WZ., J. PEEREBOOM, A. VAN DER SWAN, C. F. JULIUS, M. B. JUNG en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* H. G. WITLAGE JR.

Stel de getallen x en y, dan is de som der trigonalen

$$\frac{x^2 + x}{2} + \frac{y^2 + y}{2} = 3186 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

en de som der pentagonalen

$$\frac{3x^2 - x}{2} + \frac{3y^2 - y}{2} = 9346. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

De som dezer vergelijkingen is

$$2x^2 + 2y^2 = 12532 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Trekken wij verder de vergelijking (2) af van 3 maal de vergelijking (1), dan blijft er, na door twee gedeeld te hebben,

$$x + y = 106. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Trekkende eindelijk het vierkant van (4) van de vergelijking (3) af, dan verkrijgen wij

$$(x - y)^2 = 1296,$$

of $x - y = 36$,

maar $x + y = 106$,

dus $x = \frac{106 + 36}{2} = 71$ en $y = \frac{166 - 36}{72} = 35$.

CXXI.

(26) J. DE GELDER, *Beginselen der Stelkunst*, *bl.* 258. No. 107.

CXXI. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

Mijn ouderdom bestaat uit een getal van twee cijferletters; verheft men het eerste cijfer, of dat der tientallen tot eene pronik, en het laatste cijfer tot een trigonaal, dan is dit trigonaal 15 *meer dan de pronik, terwijl de som van de pronik en trigonaal* 27 *uitmaken. Vrage naar mijnen ouderdom?*

OPGELOST *door* A. VAN DER SWAN, C. F. JULIUS, W. TOP WZ., M. B. JUNG, R. VAN WIJK JZ. en J. PEEREBOOM.

OPLOSSING *van* A. VAN DER SWAN.

Stel het cijfer der tientallen x en dat der eenheden y, dan is de pronik van het eerste $x^2 + x$ en de trigonaal van het tweede $\frac{1}{2}(y^2 + y)$, en hierdoor verkrijgen wij de vergelijkingen

$$\frac{1}{2}(y^2 + y) - (x^2 + x) = 15,$$
$$\frac{1}{2}(y^2 + y) + (x^2 + x) = 27.$$

De som dezer vergelijkingen is

$$y^2 + y = 42,$$

terwijl wij voor derzelver halve verschil vinden

$$x^2 + x = 6.$$

Losfen wij deze twee vierkantsvergelijkingen op, dan vinden wij

$$y = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{42\tfrac{1}{4}} = 6 \text{ of } -7,$$

en

$$x = -\tfrac{1}{2} \pm \sqrt{6\tfrac{1}{4}} = 2 \text{ of } -3.$$

Hierdoor vinden wij alzoo vier antwoorden, die aan onze twee vergelijkingen voldoen, namelijk

$x = 2$, en $y = 6$, $x = 2$, en $y = -7$, $x = -3$, en $y = 6$, $x = -3$, en $y = -7$.

Daar echter het eerste antwoord alleen regtstreeks op het vraagstuk toepasselijk is, omdat in een getal, op de gewone wijze geschreven, geene der cijferletters als negatief kan worden aangenomen, zoo is de gevraagde ouderdom 26 jaren.

CXXII.

CXXII. VOORSTEL.

Door A. VAN DER SWAN.

De som van een vierkant, pronik, vijfhoekig en zeshoekig getal, waarvan de wortels gelijk zijn, is 86. Vrage naar ieder in het bijzonder?

OPGELOST *door* A. VAN DER SWAN, J. PEEREBOOM, C. F. JULIUS, W. TOP Wz., M. B. JUNG en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* A. VAN DER SWAN.

Stel den gemeenschappelijken wortel der gevraagde getallen x, dan is het vierkant x^2, de pronik $x^2 + x$, het vijfhoekig getal $\frac{1}{2}(3x^2 - x)$ en het zeshoekig getal $2x^2 - x$, en daar de som dezer getallen 86 moet beloopen, zoo is

$$x^2 + x^2 + x + \tfrac{1}{2}(3x^2 - x) + 2x^2 - x = 86,$$

of $$2x^2 + 2x^2 + 2x + 3x^2 - x + 4x^2 - 2x = 172,$$

of $$11x^2 - x = 172;$$

dus $$x^2 - \tfrac{1}{11}x = \tfrac{172}{11},$$

waaruit $$x = \tfrac{1}{22} \pm \sqrt{\left(\tfrac{1}{484} + \tfrac{172}{11}\right)} = \tfrac{1}{22} \pm \tfrac{87}{22},$$

dat is $$x = 4 \quad \text{of} \quad x = -3\tfrac{10}{11}.$$

Er bestaan dus twee antwoorden op ons vraagstuk; het eerste, dat met $x = 4$ overeenstemt, geeft namelijk voor de gevraagde getallen 16, 20, 22 en 88, terwijl door $x = -3\frac{10}{11}$ te nemen, voor het tweede antwoord gevonden wordt $15\frac{34}{121}$, $11\frac{45}{121}$, $24\frac{106}{121}$, $34\frac{57}{121}$.

CXXIII. VOORSTEL.

Door G. J. SARLET.

Drie getallen te vinden, waarvan het eerste tot het derde in reden is als het vierkant van het verschil der twee eerste tot het vierkant van het verschil der twee laatste; waarvan het tweede gelijk is aan het vierkant van het derde, en waarvan eindelijk het gedurig product 64 uitmaakt?

OP-

Opgelost door I. R. Schmidt, G. J. Sarlet, C. F. Julius, W. Top Wz., M. B. Jung, J. Peereboom, A. van der Swan en R. van Wijk Jz.

Oplossing van I. R. Schmidt.

Stel het eerste getal x en het tweede y^2, dan is het derde y, en de twee overige voorwaarden van het vraagstuk geven de volgende vergelijkingen:

$$x : y = (x - y^2)^2 : (y^2 - y)^2 \quad . \quad . \quad (1)$$

en

$$xy^3 = 64 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

De volgende termen van de eerste door y deelende, komt er

$$x : 1 = (x - y^2)^2 : y\,(y - 1)^2,$$

dus $$xy\,(y - 1)^2 = (x - y^2)^2,$$

of $$xy^3 - 2\,xy^2 + xy = x^2 - 2\,xy^2 + y^4,$$

dat is $$xy^3 + xy = x^2 + y^4,$$

of $$xy^3 - y^4 = x^2 - xy,$$

dus $$y^3\,(x - y) = x\,(x - y),$$

dat is $$(y^3 - x)\,(x - y) = 0.$$

Aan deze vergelijking kan op twee wijzen voldaan worden. Het eerste lid wordt namelijk 0 voor $x = y$ en voor $x = y^3$.

Nemen wij $x = y$, dan verandert de vergelijking (2) in $x^4 = y^4 = 64$, waaruit $x^2 = y^2 = \pm 8$ en $x = y = \pm 2\sqrt{2}$, zoodat de gevraagde getallen alsdan zijn $\pm 2\sqrt{2}$, 8 en $\pm 2\sqrt{2}$, welke volkomen aan het vraagstuk beantwoorden.

Nemen wij daarentegen $x = y^3$, dan gaat de vergelijking (2) over in $y^6 = 64$, en dus is $x = y^3 = \pm 8$ en $y = \pm 2$. Voor $x = 8$ en $y = 2$ zijn de gevraagde getallen 8, 4, en 2, en voor $x = -8$ en $y = -2$ zijn de begeerde getallen -8, 4 en -2, welke mede aan de vereischte van het vraagstuk voldoen.

Boven en behalve de vier bestaanbare antwoorden, die wij voor ons vraagstuk gevonden hebben, geven de vergelijkingen $x = y$ en $x = y^3$ nog tot zes onbestaanbare antwoorden aanleiding, omdat in het algemeen de eenheid n wortels van den graad n heeft. Het voorstel is alzoo voor 10 antwoorden vatbaar; en wanneer men in de vergelijking $(y^3 - x)\,(x - y) = 0$, in plaats van x derzelver waarde uit (2), dat is, $x = \frac{64}{y^3}$ substi-

tueert

tueert, en alles ontwikkelt, zal men werkelijk eene vergelijking van den tienden graad verkrijgen, welke de 10 verschillende waarden van y tot wortels heeft.

CXXIV. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Een ligchaam langs een hellend vlak vallende, komt in b seconden beneden; doch wordt hetzelve m voeten hooger langs dit hellend vlak gelegd, zoodanig, dat het, om beneden te komen, nu m voeten meer dan in het eerste geval doorloopen moet, zoo besteedt het hiertoe c seconden. Men vraagt hierdoor de helling van het vlak, alsmede de lengte, welke in beide gevallen door het ligchaam op dit vlak doorloopen is, te bepalen?

OPGELOST *door* W. TOP Wz., M. B. JUNG en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* W. TOP Wz.

Stellen wij den hoek, welken het hellend vlak met de horizont maakt ϕ, en de ruimte, welke het ligchaam langs het hellend vlak in het eerste geval doorloopt, x voeten, dan moet dit ligchaam in het tweede geval $x+m$ voeten doorloopen; daar nu bij de beweging op het hellend vlak, zoowel als bij die der vrij vallende ligchamen, de doorgeloopene ruimten tot elkander in reden zijn als de vierkanten van de tijden, zoo hebben wij

$$x : x+m = b^2 : c^2,$$

of

$$b^2x + b^2m = c^2x,$$

dus

$$(c^2 - b^2)\,x = b^2m;$$

waaruit

$$x = \frac{b^2}{c^2 - b^2}\,m;$$

en dus

$$x + m = \frac{c^2}{c^2 - b^2}\,m;$$

waardoor de gevraagde doorgeloopene ruimten bepaald zijn.

Om den hoek ϕ te bepalen, nemen wij als bekend aan, dat wanneer een ligchaam, vrij vallende, in de eerste seconde eene ruimte g doorloopt, hetzelve op een vlak, dat onder eenen hoek ϕ tot den horizont helt, in de eerste seconde eene ruimte g Sin. ϕ zal doorloopen. Daar nu dit ligchaam op hetzelfde

hellend vlak, volgens het boven bewezene, in b seconde eene ruimte $\frac{b^2}{c^2 - b^2} m$ doorloopt, en de doorgeloopene ruimten tot elkander in reden zijn als de vierkanten van de tijden, zoo hebben wij

$$g \text{ Sin. } \phi : \frac{b^2}{c^2 - b^2} m = 1 : b^2,$$

of

$$g \text{ Sin. } \phi : \frac{m}{c^2 - b^2} = 1 : 1,$$

dus

$$\text{Sin. } \phi = \frac{m}{g(c^2 - b^2)},$$

waardoor dan ook de hellingshoek bepaald is.

CXXV. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Een last wordt met een windas opgetrokken. De middellijn van de spil, waarover het touw loopt, is a voeten en de dikte van het touw d voeten. Indien nu de spil met eene eenparige beweging wordt omgedraaid, en het touw zoo weinig ruimte heeft, dat het zich, bij elke volgende omwenteling van de spil, over het te voren opgewondene deel moet henen rollen, dan kunnen wij, zonder veel van de waarheid af te wijken, aannemen, dat de verschillende omwoelingen van het touw gelijkmiddelpuntige cirkels zijn, waarvan de stralen, bij elke omwenteling, met de dikte van het touw vermeerderen. Dit aangenomen zijnde, onderstellen wij, dat de last de eerste helft van den weg, welken zij moet doorloopen, in b seconden en de tweede helft in c seconden aflegt, en vragen alsdan hieruit te bepalen, hoe groot de hoogte was, tot welke de last moest worden opgewonden?

OPGELOST *door* W. TOP Wz. en C F. JULIUS.

OPLOSSING *van* W. TOP Wz.

Stellen wij het aantal omwoelingen van het touw om de spil, wanneer de last tot de gevraagde hoogte is opgeheven, x, dan is deze hoogte gelijk aan de som van eene rekenkunstige reeks, waarvan de eerste term is $a x$, de tweede $(a + 2d) x$, de der-

derde $(a+4d)\pi$, enz. en de x^e of laatste term $(a+2(x-1)d)\pi$. De som van deze reeks of de gevraagde hoogte is dus

$$h = \{a\pi + (a+2(x-1)d)\pi\}\tfrac{1}{2}x,$$

of $$h = (a+dx-d)\pi x \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

en deze hoogte zal dus bekend zijn, zoodra wij x kunnen bepalen.

Ten einde tot deze waarde van x te geraken, merken wij op, dat de eerste helft van den te doorloopen weg in b en de tweede helft in c seconden wordt afgelegd. Hieruit volgt namelijk, dat de x omwentelingen van de spil in $b+c$ seconden volbragt worden; en daar de spil met eene eenparige beweging ronddraait, zoo volgt hieruit verder, dat in elke seconde $\frac{x}{b+c}$ omwentelingen plaats hebben, en dat de eerste helft van den weg in b seconden geschiedende, met $\frac{bx}{b+c}$ omwentelingen van de spil overeenstemt. De eerste helft van den afgeloopenen weg is dus ook gelijk aan de som van eene rekenkunstige reeks, waarvan de eerste term is $a\pi$, de tweede $(a+2d)\pi$, enz. en waarvan het aantal termen wordt voorgesteld door $\frac{bx}{b+c}$: en daar de som dezer reeks wordt uitgedrukt door

$$\tfrac{1}{2}h = \left\{a\pi + \left(a+2\left(\frac{bx}{b+c}-1\right)d\right)\pi\right\} \times \frac{bx}{2(b+c)},$$

waaruit $$h = \left\{a + \frac{bdx}{b+c} - d\right\} \times \frac{2bx\pi}{b+c},$$

zoo verkrijgen wij, door deze waarde van h aan die, welke wij in (1) gevonden hebben, gelijk te stellen:

$$(a+dx-d)\pi x = \left\{a + \frac{bdx}{b+c} - d\right\} \times \frac{2bx\pi}{b+c},$$

of alles door πx deelende en met $(b+c)^2$ vermenigvuldigende,

$$(b+c)^2 dx + (a-d)(b+c)^2 = 2b^2dx + 2(a-d)(b+c)b,$$

of $$x((b+c)^2 - 2b^2)d = (a-d)(2b(b+c)-(b+c)^2),$$

dat is $$x(c^2+2bc-b^2)d = (a-d)(b+c)(2b-(b+c)),$$

waaruit $$x = \frac{(a-d)(b^2-c^2)}{d.(c^2+2bc-b^2)},$$

waardoor het aantal omwentelingen bekend is.

Hierdoor vinden wij alzoo voor de gevraagde hoogte, waartoe de last moest worden opgeheven,

$$h = (a-d+dx)\,\pi x,$$

$$= \left(a-d+\frac{(a-d)(b^2-c^2)}{c^2+2bc-b^2}\right)\times\frac{(a-d)(b^2-c^2)}{d(c^2+2bc-b^2)}\times\pi,$$

$$= (a-d)^2\left(1+\frac{b^2-c^2}{c^2+2bc-b^2}\right)\times\frac{b^2-c^2}{d(c^2+2bc-b^2)}\times\pi,$$

dat is $$h = \frac{2bc\,(a-d)^2\,(b^2-c^2)\,\pi}{d\,(c^2+2bc-b^2)^2}.$$

Eindelijk kunnen wij nu gemakkelijk de snelheid bepalen, waarmede de spil is omgedraaid; want daar x omwentelingen in $b+c$ seconden worden volbragt, zoo is de tijd, waarin elke omwenteling volbragt wordt, $\frac{b+c}{x}$ seconden, en substituerende hierin de gevondene waarde van x, dan verkrijgen wij voor het aantal seconden, waarin elke omwenteling van de spil volbragt is,

$$\frac{d\,(c^2+2bc-b^2)}{(a-d)\,(b-c)}.$$

CXXVI. Voorstel.

Door I. P. Delprat.

Een vierhoek, waarvan de achtervolgende zijden zijn a, b, c en d, en welke om de vier hoekpunten als scharnieren beweegbaar ondersteld wordt, neemt eenen gegevenen vorm aan, wanneer vier krachten, in de rigting van de diagonalen, op de hoekpunten werken. Men vraagt de betrekking tusschen deze krachten te bepalen?

Oplossing. *Door* I. P. Delprat.

Laat ABCD, *Fig.* 72, de gegeven vorm des vierhoeks zijn, en P, Q, P′ en Q′ de krachten, werkende in de rigting van de diagonalen, en welker onderlinge betrekking derhalve gevonden moet worden. — De vorm van den vierhoek bekend zijnde, zoo kunnen wij ook, zoowel de grootte van deszelfs hoeken en diagonalen, als de zijden bekend beschouwen. Stellen wij dan CBD $= \alpha$, DBA $= \beta$, BAC $= \gamma$, CAD $= \delta$, ADB $= \varepsilon$, BDC $= \theta$, DCA $= \phi$ en ACB $= \psi$.

Ver-

Verdeelen wij nu elke der krachten P, Q, P′ en Q′, in twee andere krachten, werkende volgens de rigtingen der zijden AB en CB, BC en DC, CD en AD, DA en BA, dan worden de zamenstellende krachten van P op de volgende wijze voorgesteld:

Die in de rigting BC *door* $P \times \frac{Sin.\ \beta}{Sin.\ (\alpha + \beta)}$,

Die in de rigting BA *door* $P \times \frac{Sin.\ \alpha}{Sin.\ (\alpha + \beta)}$.

De zamenstellende krachten van Q worden dan eveneens uitgedrukt:

Die in de rigting CB *door* $Q \times \frac{Sin.\ \phi}{Sin.\ (\phi + \psi)}$,

Die in de rigting CD *door* $Q \times \frac{Sin.\ \psi}{Sin.\ (\phi + \psi)}$.

De zamenstellende krachten van P′ worden verder voorgesteld:

Die in de rigting DC *door* $P' \times \frac{Sin.\ \iota}{Sin.\ (\iota + \theta)}$,

Die in de rigting DA *door* $P' \times \frac{Sin.\ \theta}{Sin.\ (\iota + \theta)}$.

Eindelijk zullen de zamenstellende krachten van Q′ worden uitgedrukt.

Die in de rigting AD *door* $Q' \times \frac{Sin.\ \gamma}{Sin.\ (\gamma + \delta)}$,

Die in de rigting AB *door* $Q' \times \frac{Sin.\ \delta}{Sin.\ (\gamma + \delta)}$.

In plaats der krachten P, Q, P′ en Q′, hebben wij dan nu acht andere krachten, werkende twee aan twee in eene zelfde zijde van den vierhoek, en wel in tegengestelde rigting; voor het evenwigt zullen dus de krachten, welke in eene zelfde zijde werken, aan elkander gelijk moeten zijn, en dit geeft ons de vier volgende vergelijkingen:

$$\left.\begin{array}{l} P \times \frac{Sin.\ \beta}{Sin.\ (\alpha + \beta)} = Q \times \frac{Sin.\ \phi}{Sin.\ (\phi + \psi)} \\ Q \times \frac{Sin.\ \psi}{Sin.\ (\phi + \psi)} = P' \times \frac{Sin.\ \iota}{Sin.\ (\iota + \theta)} \\ P' \times \frac{Sin.\ \theta}{Sin.\ (\iota + \theta)} = Q' \times \frac{Sin.\ \gamma}{Sin.\ (\gamma + \delta)} \\ Q' \times \frac{Sin.\ \delta}{Sin.\ (\gamma + \delta)} = P \times \frac{Sin.\ \alpha}{Sin.\ (\alpha + \beta)} \end{array}\right\} \ldots (A)$$

 Wan-

Wanneer men de eerste en vierde dezer vergelijkingen met elkander vermenigvuldigt, dán komt er, na door P gedeeld en met $Sin. (\alpha + \beta)$ vermenigvuldigd te hebben,

$$Q' \times \frac{Sin.\ \beta \times Sin.\ \delta}{Sin.\ (\gamma + \delta)} = Q \times \frac{Sin.\ \phi\ .\ Sin.\ \alpha}{Sin.\ (\phi + \psi)},$$

of $$\frac{Q'}{Q} = \frac{Sin.\ \phi}{Sin.\ \delta} \times \frac{Sin.\ \alpha}{Sin.\ (\phi + \psi)} \times \frac{Sin.\ (\gamma + \delta)}{Sin.\ \beta}.$$

Nu is $\frac{Sin.\ \phi}{Sin.\ \delta} = \frac{c}{b}$, $\frac{Sin.\ \alpha}{Sin.\ (\phi + \psi)} = \frac{b}{BD}$, $\frac{Sin.\ (\gamma + \delta)}{Sin.\ \beta} = \frac{BD}{c}$,
en bij gevolg hebben wij

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{c}{b} \times \frac{b}{BD} \times \frac{BD}{c} = 1,$$

zoodat $$Q' = Q \ \ldots\ldots\ldots \ (B).$$

Op dezelfde wijze vinden wij, door de eerste en tweede der vergelijkingen (A) te vermenigvuldigen,

$$P \times \frac{Sin.\ \beta \times Sin.\ \psi}{Sin.\ (\alpha + \beta)} = P' \times \frac{Sin.\ \phi\ .\ Sin.\ \varepsilon}{Sin.\ (\varepsilon + \theta)},$$

of $$\frac{P'}{P} = \frac{Sin.\ \beta}{Sin.\ \varepsilon} \times \frac{Sin.\ \psi}{Sin.\ (\alpha + \beta)} \times \frac{Sin.\ (\varepsilon + \theta)}{Sin.\ \phi},$$

maar $\frac{Sin.\ \beta}{Sin.\ \varepsilon} = \frac{c}{d}$, $\frac{Sin.\ \psi}{Sin.\ (\alpha + \beta)} = \frac{d}{AC}$, $\frac{Sin.\ (\varepsilon + \theta)}{Sin.\ \phi} = \frac{AC}{c}$,
en wij hebben alzoo

$$\frac{P'}{P} = \frac{c}{d} \times \frac{d}{AC} \times \frac{AC}{c} = 1,$$

zoodat $$P' = P \ \ldots\ldots\ldots \ (C)$$

Het is ook niet moeijelijk, om uit den aard van het vraagstuk dadelijk op te maken, dat $Q' = Q$ en $P' = P$ moet zijn, omdat blijkbaar voor $P' <$ of $> P$ en voor $Q' <$ of $> Q$, er eene verplaatsing van het geheele stelsel in de rigting BD of AC zou moeten plaats hebben, en het evenwigt aldus verbroken zou wezen.

Stelt men nu, in de vergelijkingen (A), $P' = P$ en $Q' = Q$, dan veranderen dezelve in

$$\left.\begin{aligned}
P\ .\ \frac{Sin.\ \beta}{Sin.\ (\alpha + \beta)} &= Q\ .\ \frac{Sin.\ \phi}{Sin.\ (\phi + \psi)} \\
P\ .\ \frac{Sin.\ \varepsilon}{Sin.\ (\varepsilon + \theta)} &= Q\ .\ \frac{Sin.\ \psi}{Sin.\ (\phi + \psi)} \\
P\ .\ \frac{Sin.\ \theta}{Sin.\ (\varepsilon + \theta)} &= Q\ .\ \frac{Sin.\ \gamma}{Sin.\ (\gamma + \delta)} \\
P\ .\ \frac{Sin.\ \alpha}{Sin.\ (\alpha + \beta)} &= Q\ .\ \frac{Sin.\ \delta}{Sin.\ (\gamma + \delta)}
\end{aligned}\right\} \ldots (D)$$

Of-

Offschoon nu elke dezer vergelijkingen de betrekking tusschen P en Q kan doen kennen, zoo bestaat er echter natuurlijker wijze slechts eene enkele betrekking tusschen deze krachten; en het verschil, dat er in de vergelijkingen (D) schijnt te bestaan, komt alleen voort uit de onderlinge afhankelijkheid van de hoeken, welke in deze vergelijkingen voorkomen. Nemen wij, bij voorbeeld, de eerste en vierde, dan vinden wij, door dezelve in elkander te deelen,

$$\frac{Sin.\,\beta}{Sin.\,\alpha} = \frac{Sin.\,\phi}{Sin.\,\delta} \cdot \frac{Sin.\,(\gamma + \delta)}{Sin.\,(\phi + \psi)},$$

of $$\frac{Sin.\,\phi}{Sin.\,\delta} \times \frac{Sin.\,\alpha}{Sin\,(\phi + \psi)} \times \frac{Sin.\,(\gamma + \delta)}{Sin.\,\beta} = 1,$$

en daar wij reeds vroeger gevonden hebben

$$\frac{Sin.\,\phi}{Sin.\,\delta} = \frac{c}{b}, \quad \frac{Sin.\,\alpha}{Sin.\,(\phi+\psi)} = \frac{b}{BD} \text{ en } \frac{Sin.\,(\gamma+\delta)}{Sin.\,\beta} = \frac{BD}{c},$$

zoo is deze vergelijking werkelijk identiek, en men kan op dezelfde wijze aantoonen, dat de betrekking van P en Q, uit elke der vergelijkingen (D) gevonden, werkelijk dezelfde is.

Daar dan, wanneer de vorm des vierhoeks bekend is, eene der vergelijkingen (D) genoegzaam is, om de betrekking tusschen P en Q te bepalen, zoo nemen wij hiertoe de vierde, en de betrekking tusschen de vier krachten P, P′, Q′ en Q is alzoo begrepen in de vergelijkingen

$$P' = P \;(1),\quad Q' = Q \;(2), \text{ en } \frac{P}{Q} = \frac{Sin.\,\delta\, Sin.\,(\alpha+\beta)}{Sin.\,\alpha\, Sin.\,(\gamma+\delta)} \;. \;(3)$$

waardoor het vraagstuk kan worden gehouden voor opgelost.

Het is klaar, dat men geene der vier krachten volstrekt berekenen kan; want wanneer de vierhoek eens in evenwigt is, dan zal dezelve, door de krachten, die op de hoekpunten werken, in dezelfde reden te laten aangroeijen of verminderen, nog in evenwigt moeten blijven. Even duidelijk is het, dat de betrekking der krachten alleen van de hoeken α, β, γ en δ afhangende, deze betrekking niet zal veranderen, wanneer al de zijden van den vierhoek in dezelfde reden aangroeijen of verminderen, indien slechts de hoeken α, β, γ en δ, welke klaarblijkelijk den geheelen vorm van den vierhoek bepalen, onveranderd blijven. De gevondene betrekking tusschen de krachten P, Q, P′

en Q' blijft dus voor alle vierhoeken, die met ABCD gelijkvormig zijn, volkomen dezelfde.

Er blijft dan alleen over om aan te wijzen, hoe men, wanneer de hoeken α, β, γ en δ niet onmiddellijk gegeven zijn, maar de vierhoek door andere gegevens bepaald is, deze hoeken kan berekenen. Onderstellen wij dan, dat gegeven zijn de vier zijden BC $= a$, CD $= b$, DA $= c$ en AB $= d$, benevens de hoek B $= \alpha + \beta$, dan heeft men, om α, β, γ en δ te vinden, slechts op te merken, dat men in de driehoeken ABC en ADC heeft

$$a^2 + d^2 - 2\,ad\,Cos.\,B = b^2 + c^2 - 2\,bc\,Cos.\,D = AC^2,$$

dus $$Cos.\,D = \frac{(b^2 + c^2) - (a^2 + d^2) + 2\,ad\,Cos.\,B}{2\,bc},$$

waardoor de hoek D bekend wordt. Om de hoeken A en C te berekenen, heeft men verder de vergelijkingen

$$a^2 + b^2 - 2\,ab\,Cos.\,C = c^2 + d^2 - 2\,cd\,Cos.\,A;$$

en $$A + C = 360° - (B + D),$$

uit welke vergelijkingen, daar B en D bekend zijn, de hoeken A en C gemakkelijk berekend kunnen worden.

Hierdoor hebben wij, in elk der driehoeken ABC, ADC, BAD en BCD, twee zijden met den ingeslotenen hoek bekend, waardoor dan al de overige hoeken, waaronder α, β, γ en δ behooren, kunnen worden gevonden.

1°. Aanmerking. Wij kunnen de betrekking tusschen de krachten P en Q, gegeven door de vergelijking (3), namelijk

$$\frac{P}{Q} = \frac{Sin.\,\delta\ \ Sin.\ (\alpha + \beta)}{Sin.\,\alpha\,.\ Sin.\ (\gamma + \delta)},$$

op de volgende wijze, in de diagonalen, en de stukken, waarin dezelve elkander verdeelen, uitdrukken.

Omdat $\frac{Sin\ (\alpha+\beta)}{Sin.\,\psi} = \frac{AC}{AB}$ en $\frac{Sin.\ (\gamma+\delta)}{Sin.\,\epsilon} = \frac{BD}{AB}$ is, zoo is

$$\frac{Sin.\ (\alpha + \beta)}{Sin.\ (\gamma + \delta)} = \frac{Sin.\,\psi}{Sin.\,\epsilon} \times \frac{AC}{BD},$$

en dus $$\frac{P}{Q} = \frac{AC}{BD} \times \frac{Sin.\,\delta}{Sin.\,\epsilon} \times \frac{Sin.\,\psi}{Sin.\,\alpha},$$

maar $\frac{Sin.\,\delta}{Sin.\,\epsilon} = \frac{DE}{AE}$ en $\frac{Sin.\,\psi}{Sin.\,\alpha} = \frac{BE}{CE}$, en bij gevolg

$\frac{P}{Q}$

$$\frac{P}{Q} = \frac{AC \times DE \times BE}{BD \times AE \times CE},$$

dat is, *de betrekking tusschen de krachten P en Q, welke in de twee diagonalen werken, is dezelfde als die van de producten, welke men verkrijgt, door de regthoeken der deelen van de diagonalen, waarin die krachten werken, met de andere diagonalen te vermenigvuldigen.*

Stellen wij alzoo, *Fig.* 73, DE $= p$, BE $= p'$, CE $= q$ en AE $= q'$, dan hebben wij

$$\frac{P}{Q} = \frac{pp'(q + q')}{qq'(p + p')} \quad \ldots\ldots \quad (E)$$

en deze formule geeft ons aanleiding, om, wanneer de vierhoek gegeven is, de betrekking der krachten P en Q door eene gemakkelijke constructie te vinden.

Laat namelijk AF, gelegen in de verlengde diagonaal CA, de kracht Q voorstellen, en trekken wij FG evenwijdig met AB, dan is

$$BG = BE \times \frac{AF}{AE} = AF \times \frac{BE}{AE} = Q \times \frac{p'}{q'}.$$

Nemen wij verder CI $=$ BG, en trekken wij IH evenwijdig met CD, dan is

$$DH = CI \times \frac{ED}{EC} = BG \times \frac{ED}{EC} = Q \times \frac{p'}{q'} \times \frac{p}{q}.$$

Nemen wij eindelijk BK $=$ AC, trekken wij DK en evenwijdig met dezelve HL, dan is

$$KL = DH \times \frac{BK}{BD} = DH \times \frac{AC}{BD} = Q \times \frac{p'p}{q'q} \times \frac{q + q'}{p + p'},$$

dus
$$\frac{KL}{Q} = \frac{p'p\,(q + q')}{q'q\,(p + p')} = \frac{P}{Q},$$

waaruit volgt KL $=$ P.

Indien dus ABCD de gegevene vierhoek is, en men laat in A en C, volgens de rigting van de diagonaal AC, eene kracht Q $=$ AF werken, dan zal men voor het evenwigt in B en D, volgens de rigting van de diagonaal BD, eene kracht P $=$ KL moeten aanwenden.

2°. Aanmerking. Uit de vergelijking (E) blijkt, dat de betrekking tusschen de krachten P en Q dezelfde blijft, zoo

lang p, q, p' en q' niet veranderen. Deze betrekking hangt alzoo niet van den hoek, welken de diagonalen met elkander maken, maar alleen van de betrekkelijke grootte der stukken, waarin zij elkander verdeelen. Wanneer men dus de diagonalen AC en BD om het punt E doet bewegen, en in iederen stand de uiteinden vereenigt, dan zullen er telkens nieuwe vierhoeken geboren worden; en offchoon deze vierhoeken iederen keer een' anderen vorm hebben, zal echter de betrekking van de krachten P en Q voor het evenwigt onveranderd blijven.

3°. Aanmerking. Wanneer de vierhoek in een parallelogram overgaat, dan wordt, *Fig.* 74, BE = ED en AE = EC of $p' = p$ en $q' = q$, en dan verandert de vergelijking (E) in

$$\frac{P}{Q} = \frac{p^2 \cdot 2q}{q^2 \cdot 2p} = \frac{p}{q} = \frac{2p}{2q} = \frac{BD}{AC},$$

dat is, *de krachten zijn alsdan evenredig met de diagonalen, waarin zij werken.*

In een parallelogram ABCD kan men dus door middel van twee kleinere krachten Q twee veel grootere P in evenwigt houden, wanneer slechts de diagonaal AC veel kleiner dan de diagonaal BD genomen wordt. Indien dus de zijden van dit parallelogram en de diagonaal AC uit balken bestonden, dan ziet men, dat de balk AC weinig te lijden zou hebben, om dit parallelogram deszelfs vorm te doen behouden, al werkte er in BD een groote last. Hieruit kan men, bij gevolg, bij de zamenstelling van groote brug- en kapgebindten *enz.* veel voordeel trekken.

Voor een' regthoek en vierkant zijn de diagonalen even groot, en men heeft dus voor dezelve P = Q.

CXXVII. VOORSTEL.

Door I. R. Schmidt.

Men vraagt de waarde van de formule $\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$ *te bepalen, in het geval, waarin* n *oneindig groot is?*

Opgelost *door* I. R. Schmidt en R. van Wijk Jz.

Oplossing *van* I. R. Schmidt.

Stelt

Stelt men onmiddellijk in de opgegevene formule n gelijk oneindig, dan komt er, omdat $\frac{a}{\infty} = 0$ is, 1^{∞} en men zou hierdoor ligt in verzoeking kunnen geraken, om te gelooven, dat deze waarde werkelijk gelijk 1 is. Het is er echter verre van af, dat 1^{∞} in alle gevallen gelijk 1 zou zijn; want stellen wij in het algemeen $1^{\infty} = x$, dan is $\infty \times Log.\ 1 = Log.\ x$, dat is $Log.\ x = \infty \times 0$, en daar dit in het algemeen eene onbepaalde grootheid aanduidt, zoo volgt hieruit, dat $Log.\ x$ en dus ook $x = 1^{\infty}$ eene onbepaalde grootheid is.

Om te onderzoeken, welke de wezenlijke waarde is, die $(1 + \frac{a}{n})^n$ voor het geval van $n = \infty$ verkrijgt, zoo kunnen wij dezen weg inslaan. Ontwikkelen wij onze formule door het binomium, dan verkrijgen wij

$$(1+\frac{a}{n})^n = 1+n.\frac{a}{n}+\frac{n(n-1)}{2}.\frac{a^2}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}.\frac{a^3}{n^3}+ \text{enz.}$$

$$= 1+a+\frac{n-1}{2.n}.a^2+\frac{n-1}{2n}.\frac{n-2}{3n}.a^3+ \text{enz.}$$

$$= 1+\frac{a}{1}+(1-\frac{1}{n}).\frac{a^2}{1.2}+(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}).\frac{a^3}{1.2.3}+ \text{enz.}$$

Stellen wij nu $a = \infty$, dan worden de gebrokens $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, enz. alle gelijk 0, en wanneer wij alzoo de waarde, die $(1 + \frac{a}{n})^n$ voor $n = \infty$ verkrijgt, door A voorstellen, dan hebben wij

$$A = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{1.2} + \frac{a^3}{1.2.3} + \frac{a^4}{1.2.3.4} + \text{enz.}$$

Daar nu het tweede lid niets anders is dan de ontwikkeling van e^a, waarin e de bazis der neperiaansche logarithmen is, zoo hebben wij voor de gevraagde waarde van $(1 + \frac{a}{n})^n$ op het oogenblik, dat n oneindig is. $A = e^a$.

Zie hier eenen anderen weg, om tot deze zelfde uitdrukking te geraken. Stellen wij in het algemeen

$x =$

$$x = (1 + \frac{a}{n})^n,$$

dan is $\quad Nep.\ Log.\ x = n\ Nep.\ Log.\ (1 + \frac{a}{n}),$

en wanneer wij het laatste lid door den bekenden regel in eene reeks ontwikkelen,

$$Nep.\ Log.\ x = n\ (\frac{a}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{n^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{n^3} - enz.)$$

of $\quad Nep.\ Log.\ x = a - \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{a^3}{n^2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{a^4}{n^3} + enz.)$

stellen wij $n = \infty$, dan worden $\frac{a^2}{n}$, $\frac{a^3}{n^2}$, *enz.* alle gelijk 0, en indien wij de waarde, die x door deze stelling verkrijgt, door A aanduiden, komt er *Nep. Log.* $A = a$, waaruit $A = e^a$ even als boven.

Wij kunnen deze handelwijze zelve uitbreiden tot het geval, waarin de waarde van

$$x = (1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + enz.)^{nm},$$

voor n oneindig, wordt gevraagd, in welk geval de onmiddellijke substitutie van $n = 0$ wederom geeft 1^∞. Wij hebben namelijk

$$Nep.\ Log.\ x = nm\ Nep.\ Log.\ (1 + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \frac{c}{n^3} + enz.)$$

$$= nm\ Nep.\ Log.\ \left\{1 + \frac{1}{n}(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + enz.)\right\}$$

of $Nep.\ Log.\ x = m \left\{(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + enz.) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + enz.)^2\right.$

$$\left. + \frac{1}{3} \frac{1}{n^2}(a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + enz)^3 - enz. \right\}$$

en stellende hierin $n = \infty$, dan komt er

$$Nep.\ Log.\ A = ma \text{ dus } \quad A = e^{ma},$$

voor de gevraagde waarde.

CXXVIII

CXXVIII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Zoek twee getallen zoodanig, dat de helft van derzelver som, met één derde van derzelver verschil, één minder zij dan het grootste, en dat één vierde van het grootste met de helft van het kleinste op twee na zoo groot zij als het kleinste? (27)

OPGELOST door H. G. WITLAGE JR., A. VAN DER SWAN, C. F. JULIUS, J. PEEREBOOM, B. BEKKING, W. TOP WZ., M B. JUNG en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING van H. G. WITLAGE JR.

Stel de getallen x en y, dan zijn de vergelijkingen

$$\tfrac{1}{2}(x+y)+\tfrac{1}{3}(x-y)=x-1,$$

en

$$\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{2}y+2=y,$$

de eerste met 6 en de tweede met 4 vermenigvuldigd, komt er, na overbrenging der termen,

$$x-y=6 \quad \text{en} \quad 2y-x=8.$$

Hiervan is de som $y=14$, waaruit volgt $x=y+6=20$.

CXXIX. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Zoek twee getallen, welker product gelijk zij aan 5888 *en de som van derzelver trigonalen gelijk aan* 6358? (28)

OPGELOST door H. G. WITLAGE JR., M. B. JUNG, W. TOP WZ., A. VAN DER SWAN, J. PEEREBOOM, C. F. JULIUS en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING van H. G. WITLAGE JR.

Stel de getallen $x+y$ en $x-y$, dan is het product

$$x^2-y^2=5888 \quad \ldots \quad (1)$$

en de som der trigonalen

$$\tfrac{1}{2}((x+y)^2+(x+y))+\tfrac{1}{2}((x-y)^2+(x-y))=6358,$$

of

(27) J. DE GELDER, *Beg. der Stelkunst*, *bl.* 245. N°. 28.
(28) *Idem bl.* 258. N°. 106.

of $x^2 + y^2 + x = 6358$ . . . . . (2)

Deze twee vergelijkingen bij elkander tellende, komt er

$$2x^2 + x = 12246,$$

of $x^2 + \frac{1}{2}x = 6123,$

waaruit $x = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{6123\frac{1}{16}},$

dat is $x = -\frac{1}{4} \pm \frac{313}{4} = 78$ of $= -78\frac{1}{2}.$

Uit de eerste vergelijking is $y = \sqrt{(x^2 - 5888)}$. Nemende dus $x = 78$, dan is $y = \sqrt{196} = 14$, en de gevraagde getallen zijn $x + y = 92$ en $x - y = 64$.

Nemende daarentegen $x = -78\frac{1}{2}$, dan is $y = \sqrt{\frac{1097}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{1097}$, en de gevraagde getallen zijn $x + y = -78\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1097}$ en $x - y = -78\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1097}$.

ANDERE OPLOSSING. *Door* M. B. JUNG.

Stel de getallen x en y, dan is het product

$$xy = 5888,$$

en de som der trigonalen

$$\frac{x^2 + y^2 + x + y}{2} = 6358,$$

vermenigvuldigende beide vergelijkingen met twee, dan is derzelver som

$$(x + y)^2 + (x + y) = 24492;$$

uit welke vierkantsvergelijking gevonden wordt

$$x + y = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{24492\frac{1}{4}},$$

dus $x + y = -\frac{1}{2} \pm \frac{313}{2} = 156$ of $-157.$

Verder is

$$x - y = \sqrt{\{(x+y)^2 - 4xy\}} = \sqrt{\{(x+y)^2 - 23552\}}.$$

Nemende dus $x + y = 156$, dan is $x - y = 28$, en hieruit vinden wij voor de getallen $x = 92$ en $y = 64$.

Nemende daarentegen $x + y = -157$, dan is $x - y = \sqrt{1097}$, en wij vinden voor de getallen $x = -78\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1097}$ en $y = -78\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1097}$.

CXXX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Op hetzelfde oogenblik, dat een ligchaam van eene gegevene

hoog-

hoogte h vrij begint te vallen, wordt een ander ligchaam met eene snelheid c loodregt opgeworpen. Men vraagt op welke hoogte deze ligchamen elkander zullen voorbijgaan, en welke snelheid elk der ligchamen op dit oogenblik van voorbijgang zal hebben?

OPLOSSING. *Door* I. R. SCHMIDT.

Wanneer een ligchaam, vrij vallende, in de eerste seconde eene ruimte van g lengte-eenheden doorloopt, dan nemen wij als bekend aan, dat dit ligchaam na T seconden zal hebben doorgeloopen eene ruimte $S = g\,T^2$, en dat het alsdan eene snelheid $C = 2g\,T$ zal hebben verkregen.

Hieruit volgt terstond, dat wanneer eenig ligchaam met eene snelheid c loodregt wordt opgeworpen, hetzelve in den tijd van T seconden zal komen op eene hoogte $x = c\,T - g\,T^2$, want hetzelve zou, indien de zwaartekracht niet aanwezig was, in den tijd T met eene eenparige snelheid door de ruimte $c\,T$ loopen; doch het valt in dezen zelfden tijd door eene ruimte $g\,T^2$, waaruit de opgegevene formule van zelve volgt. Eindelijk zal de snelheid, welke hetzelve na T seconden verkrijgt, worden uitgedrukt door $C' = c - 2g\,T$; want was er geene zwaartekracht, dan zou hetzelve voortdurend met de snelheid c naar boven gaan; doch de vrije val geeft aan hetzelve na den tijd T eene snelheid $2g\,T$ naar beneden, waaruit dan de gestelde formule wederom van zelve volgt.

Daar het nu klaar is, dat de twee ligchamen, wanneer zij elkander voorbijgaan, even lang onder weg geweest zijn, zoo stellen wij dezen tijd T, en de hoogte, waarop deze voorbijgang plaats heeft, x; het eerste ligchaam heeft alsdan in T seconden eenen weg $h - x$ en het tweede eenen weg x doorloopen, en wij hebben, door de opgegevene formulen,

$$h - x = g\,T^2 \quad \text{en} \quad x = c\,T - g\,T^2.$$

Deze twee vergelijkingen optellende, verkrijgen wij terstond

$$h = c\,T \quad \text{waaruit} \quad T = \frac{h}{c} \;.\;.\;.\;. \;(1)$$

en hierdoor is de tijd bepaald.

Brengen wij deze waarde in eene der twee vergelijkingen, dan verkrijgen wij

$x =$

$$x = h - g \cdot \frac{h^2}{c^2} = \frac{h(c^2 - gh)}{c^2} \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

waardoor dan ook de gevraagde hoogte gevonden is; dat is, de ruimte, door welke het tweede ligchaam geloopen is, wordende de ruimte, die het eerste ligchaam heeft doorloopen, voorgesteld door

$$h - x = g\,\frac{h^2}{c^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

De snelheid, die het eerste ligchaam bij den voorbijgang heeft, is

$$C = 2gT = \frac{2gh}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

terwijl de snelheid, die het tweede ligchaam op dit oogenblik heeft, wordt uitgedrukt door

$$C' = c - 2gT = c - \frac{2gh}{c} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

en hieruit blijkt, dat de som der snelheden op het oogenblik van voorbijgang gelijk is aan de aanvankelijke snelheid van het opgeworpene ligchaam.

Aanmerkingen. Wanneer men $c = o$ neemt, dan wordt T oneindig; dit kan bij het eerste inzien vreemd schijnen, want men zou kunnen denken, dat c of de aanvankelijke snelheid o stellende, dit zeggen wil, dat het tweede ligchaam in rust blijft, in welk geval de tijd gelijk zou moeten zijn aan dien, welken het eerste ligchaam noodig heeft om door de ruimte h te vallen, dat is gelijk $\sqrt{\frac{h}{g}}$. Bij een weinig nadenken zal men zich echter kunnen overtuigen, dat het geheel anders met de zaak gelegen is; want daar wij onderstellen, dat het tweede ligchaam met de snelheid c opgeworpen wordende, deze snelheid wel blijft behouden, doch dadelijk door de zwaartekracht wordt aangedaan, en dus tevens oogenblikkelijk begint te vallen, zoo zal $c = o$ willen zeggen, dat zoo wel het tweede als het eerste ligchaam op het oogenblik, waarin wij de beweging onderstellen aan te vangen, vrij begint te vallen, en dan is het klaar, dat, hoe lang deze val ook duren moge, de ligchamen altijd denzelfden afstand van elkander blijven behouden, en elkander alzoo nooit voorbij kunnen gaan.

Stelt men c negatief, dan wordt ook t negatief; doch de formu-

mule voor x ondergaat hierdoor geene de minste verandering. Stelt men verder c positief of negatief, maar zoodanig, dat c^2 kleiner dan gh is, dan wordt x negatief. Deze en nog veele andere omstandigheden, welke ontstaan door aan c of h verschillende positieve of negatieve waarden toe te kennen, geven, wanneer men de ligchamen, voor het oogenblik, waarin wij derzelver beweging onderstellen aan te vangen, als in rust beschouwt, tot zwarigheden aanleiding, welke ondertusschen geheel en al verdwijnen, wanneer men het vallen van het eerste ligchaam beschouwt als het gevolg van een voorgaand klimmen, en dat men de beweging van het tweede ligchaam mede aanziet als onafgebroken, voor en na het aangenomen aanvangspunt, plaats te hebben; de twee ligchamen bewegen alsdan beide voor en na dit aanvangspunt onophoudelijk volgens de wet der eenparig versnelde en vertraagde beweging voort, met die bepalingen, dat de snelheid van het eerste is o, op het oogenblik dat het tweede eene snelheid c heeft verkregen, en dat de ligchamen op dit oogenblik eenen afstand h hebben. De zaak uit dit meer algemeene oogpunt beschouwende, worden niet alleen al de zwarigheden opgeheven, maar men zal alsdan tusschen de verschillende gevallen, waarin onze formulen kunnen verkeeren, de schoonste overeenstemming bespeuren. De verschillende teekens van T zullen alsdan aantoonen, of de voorbijgang vroeger of later dan het oogenblik plaats heeft, waarvan wij uitgaan, en de verschillende teekens van C en C′ zullen aanduiden, in welke rigting de ligchamen zich op het oogenblik van voorbijgang bewegen, indien wij slechts opmerken, dat wij in onze oplossing voor het eerste ligchaam de dalende en voor het tweede de klimmende beweging als positief hebben beschouwd.

CXXXI. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Men vraagt den inhoud en het oppervlak te bepalen van het ligchaam, dat geboren wordt, wanneer een gegeven driehoek om eene lijn als as omwentelt, welke buiten den driehoek, doch in deszelfs vlak, gelegen is?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, W. TOP Wz., en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

§ 1. Zij ABC, *Fig.* 75, de gegeven driehoek, en DE de omwentelingsas, dan zijn de drie loodlijnen AF $= a$, BG $= b$ en CH $= c$, benevens de deelen FG $= p$ en GH $= q$, welke deze loodlijnen van de as fnijden, bekend.

Het omwentelingsligchaam is klaarblijkelijk gelijk aan de fom der twee afgeknotte kegels, befchreven door de omwenteling van de trapeziums ABGF en BCHG, verminderd met den afgeknotten kegel, door de omwenteling van trapezium ACHF voortgebragt. Daar nu de inhoud van eenigen afgeknotten kegel, welke h tot hoogte en R en r tot ftralen van het boven- en benedenvlak heeft, wordt uitgedrukt door

$$\tfrac{1}{3}\,\pi\,h\,(R^2 + rR + r^2)$$

zoo zal de gevraagde inhoud van het omwentelingsligchaam worden voorgefteld door

$$I = \tfrac{1}{3}\,p\,\pi\,(a^2 + ab + b^2) + \tfrac{1}{3}\,q\,\pi\,(b^2 + bc + c^2) - \ldots \tfrac{1}{3}\,(p + q)\,\pi\,(a^2 + ac + c^2),$$

en wanneer wij de aangewezene producten ontwikkelen, zal er, na eene gemakkelijke herleiding, komen:

$$I = \tfrac{1}{3}\pi \left\{ -a^2q + abp - acp - acq + b^2q + b^2p + bcq - c^2p \right\} \ldots (1)$$

§ 2. Hierdoor kan nu het eerfte gedeelte van het Vraagftuk voor opgelost gehouden worden; doch de gevondene formule geeft tot zeer belangrijke aanmerkingen aanleiding, waarvan wij de voornaamfte achtervolgens zullen voordragen.

De inhoud van den gegeven' driehoek is gelijk de fom der trapeziums ABGF en BCHG, verminderd met het trapezium ACHF, en deze inhoud wordt dus voorgefteld door

$$\triangle\ ABC = \tfrac{1}{2}p\,(a + b) + \tfrac{1}{2}q\,(b + c) - \tfrac{1}{2}(p + q)\,(a + c)$$

welke uitdrukking gemakkelijk herleid wordt tot

$$\triangle\ ABC = \tfrac{1}{2}\,(-\,aq + bp + bq - cp) \ldots (2).$$

Deelende nu de vergelijking (1) door de vergelijking (2), welke vergelijkingen wij, ten einde de deeling gemakkelijk te maken, op dezelfde wijze gerangfchikt hebben, dan verkrijgen wij

I

$$\frac{I}{\triangle\ ABC} = \tfrac{2}{3}\pi . (a + b + c);$$

of $$I = \tfrac{2}{3}\pi . \triangle\ ABC . (a + b + c):$$

de gevraagde inhoud is dus gelijk aan den voortbrengenden cirkel, vermenigvuldigd met twee derde van de som der loodlijnen, die uit de hoekpunten op de omwentelingsas vallen; en dit product nog vermenigvuldigd met het getal π.

§ 3. Men kan de formule voor I ook aldus schrijven:

$$I = \tfrac{1}{3} \triangle\ ABC . (2a\pi + 2b\pi + 2c\pi).$$

Maar $2a\pi$, $2b\pi$ en $2c\pi$ zijn de omtrekken, die gedurende de omwenteling door de punten A, B en C doorloopen worden. *De gevraagde inhoud is dus gelijk aan den voortbrengenden cirkel; vermenigvuldigd met een derde van de som der drie cirkelomtrekken, die gedurende de omwenteling door de drie hoekpunten van den driehoek doorloopen worden.*

§ 4. Deelen wij twee der zijden midden door in T en R, en trekken wij AR en BT, snijdende elkander in P, dan wordt P het zwaartepunt van den driehoek ABC genoemd. Dit punt is zoodanig gelegen, dat AP = 2 PR is; want BC en AC in R en T midden door gedeeld zijnde, is TR evenwijdig aan AB en dus $\triangle$ PRS gelijkvormig met $\triangle$ ABP; maar TR = $\tfrac{1}{2}$ AB zijnde, moet dan ook PR = $\tfrac{1}{2}$ AP = $\tfrac{1}{3}$ AR wezen. Op gelijke wijze is TP = $\tfrac{1}{3}$ TB.

Laten wij nu uit R en P loodlijnen op de as vallen, dan is, omdat BR = RC is, ook GS = SH en bijgevolg

$$RS = \tfrac{1}{2}(BG + CH) = \tfrac{1}{2}(b + c).$$

Daar verder AP = $\tfrac{2}{3}$ AR is, zoo is ook PM = $\tfrac{2}{3}$ RN = $\tfrac{2}{3}$ (RS — AF) = $\tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}c - a) = \tfrac{1}{3}b + \tfrac{1}{3}c - \tfrac{2}{3}a$; en bij gevolg

$$PQ = PM + AF = \tfrac{1}{3}(a + b + c),$$

en dit in de waarde van I substituerende, komt er

$$I = \triangle\ ABC \times 2\pi . PQ.$$

De gevraagde inhoud is dus gelijk aan den voortbrengenden driehoek, vermenigvuldigd met den weg, welken het zwaartepunt van den driehoek gedurende de omwenteling doorloopen heeft, (*)

§ 5.

(*) Deze stelling gaat algemeen door voor den inhoud en het opper-

vlak

§. 5. Daar de gevondene inhoud alleen van $\triangle$ ABC en van PQ afhangt, zoo volgt hieruit, dat die inhoud onveranderd zal blijven, wanneer, gedurende de omwenteling om de as DE, de driehoek nog daarenboven om het zwaartepunt P omdraait, indien dezelve, gedurende deze dubbele beweging, slechts voortdurend met de as DE in een zelfde vlak blijft. Het ligchaam verkrijgt dan eenen gedraaiden of gewrongen' vorm, doch dit zal op den inhoud geenen invloed hebben. (*)

§ 6. Gaan wij nu tot de berekening van het oppervlak des ligchaams over. Hetzelve is klaarblijkelijk gelijk aan de som der ronde oppervlakken van de drie afgeknotte kegels, welke wij voor den inhoud in aanmerking genomen hebben. Deze oppervlakken zijn achtervolgens gelijk aan

$$\pi\,(a+b)\times AB,\qquad \pi\,(a+c)\times AC,\qquad \pi\,(b+c)\times BC.$$

Willen wij alzoo dit oppervlak in dezelfde bekenden uitdrukken als die, waarin wij den inhoud hebben uitgedrukt, dan hebben wij

$$O=\pi(a+b)\sqrt{\{p^2+(a-b)^2\}}+\pi(b+c)\sqrt{\{q^2+(b-c)^2\}}$$
$$+\pi\,(a+c)\sqrt{\{(p+q)^2+(a-c)^2\}}\ldots(3)$$

Stellen wij echter AB $=c'$, AC $=b'$ en BC $=a'$, dan wordt de uitdrukking voor dit oppervlak eenvoudiger; want dan verkrijgen wij

$$O=\pi\,\{c'\,(a+b)+b'\,(a+c)+a'\,(b+c)\},$$

maar dan zijn de zes gegevens ook niet meer onafhankelijk, want daar alsdan

$$(p+q)^2=b'^2-(a-c)^2,\ p^2=c'^2-(a-b)^2,\ q^2=a'^2-(b-c)^2$$

is, verkrijgen wij, door de waarden van p en q uit de twee laatste in de eerste te substitueren,

$$\sqrt{(b'^2-(a-c)^2)}=\sqrt{(c'^2-(a-b)^2)}+\sqrt{(a'^2-(b-c)^2)},$$

welke vergelijking nu de onderlinge betrekking der zes gegevens in zich bevat.

§ 7.

vlak van alle omwentelings-ligchamen, en is bekend onder den naam van *den regel van* GULDIN.

(*) Deze aanmerking is op alle ringvormige omwentelings-ligchamen toepasselijk, en geeft aanleiding tot het berekenen der inhouden van ligchamen, welke bij den eersten opslag zeer zamengesteld schijnen.

§ 7. De vergelijking (3) is genoegzaam, om te doen zien, *dat het gevraagde oppervlak gelijk is aan den omtrek van den gegeven driehoek, vermenigvuldigd met den weg, welken het zwaartepunt van dezen omtrek doorloopt.* Daar wij echter, om dit aan te toonen, eerst zouden moeten aanwijzen, hoe het zwaartepunt van dezen omtrek gevonden wordt, en wij bovendien op deze wijze tot zeer omflagtige berekeningen zouden geraken, zullen wij dit bewijs achterwege laten, te meer, daar de gestelde waarheid buiten twijfel is, wanneer men den regel van GULDIN in deszelfs algemeenheid heeft leeren kennen.

CXXXII. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Op welk eene hoogte moet men eenen willekeurigen kegel evenwijdig met het grondvlak doorsnijden, opdat de inhoud van deze doorsnede, vermenigvuldigd met de hoogte van den kegel, gelijk zij aan deszelfs inhoud?

OPGELOST *door* R. VAN WIJK Jz. en W. TOP Wz.

OPLOSSING *van* R. VAN WIJK Jz.

Laat ABC, *Fig.* 76, de gegeven kegel zijn, waarvan wij het grondvlak G, en de hoogte h stellen; onderstellen wij verder, dat de gevraagde doorsnede plaats moet hebben op de hoogte CG $= x$; wanneer wij dan den inhoud van deze doorsnede g stellen, dan is uit de eigenschap, die alle kegels en piramiden gemeen hebben,

$$G : g = h^2 : x^2,$$

en bij gevolg $$g = G \times \frac{x^2}{h^2},$$

en daar deze doorsnede, vermenigvuldigd met de hoogte, den inhoud van den kegel moet voortbrengen, verkrijgen wij de vergelijking

$$gh = G \times \frac{x^2}{h} = \tfrac{1}{3}\, h\, G,$$

waaruit $x^2 = \frac{1}{3} h^2$ en $x = \frac{1}{3} h \sqrt{3}$.

Niets is nu gemakkelijker dan deze hoogte te construeren;

 want

want beſchrijven wij op de hoogte h een' halven cirkel, en nemen wij de koorde FH $= \frac{1}{2} h$, dan is CH $= \sqrt{(h^2 - \frac{1}{4} h^2)}$ $= \frac{1}{2} h \sqrt{3}$; makende dus CG $= \frac{2}{3}$ CH, dan zal G het punt zijn, waardoor het ſnijdend vlak gebragt moet worden.

CXXXIII. VOORSTEL.

Door M. B. JUNG.

Van een driehoekig en negenhoekig getal zijn de wortels even groot en gelijk aan het quotient der getallen. Welke getallen zijn dit?

OPGELOST *door* M. B. JUNG, W. TOP WZ., en A. VAN DER SWAN.

OPLOSSING. *Door* M. B. JUNG.

Stel den gemeenſchappelijken wortel der getallen x, dan is het driehoekig getal $\frac{1}{2}(x^2 + x)$ en het negenhoekig getal $\frac{1}{2}(7x^2 - 5x)$, zoodat wij volgens de opgaaf moeten hebben

$$\frac{\frac{1}{2}(7x^2 - ax)}{\frac{1}{2}(x^2 + x)} = \frac{7x - 5}{x + 1} = x,$$

dus $$x(x + 1) = 7x - 5,$$

of $$x^2 - 6x + 5 = 0,$$

waaruit $$x = 1 \text{ of } x = 5.$$

Voor $x = 1$, vinden beide getallen gelijk 1, en voor $x = 5$ is het driehoekig getal 15 en het negenhoekig getal 75.

CXXXIV. VOORSTEL.

Door M. B. JUNG.

Men vraagt een driehoekig, een zeshoekig en een negenhoekig getal, zoodanig, dat de wortel van het driehoekig getal één minder zij dan die van het zeshoekig, en dat de wortel van het negenhoekig getal gelijk zij aan de ſom der wortels van de twee andere getallen, en eindelijk, dat hunne ſom gelijk zij aan een en dertig maal den wortel van het zeshoekig getal?

OPGELOST *door* M. B. JUNG, W. TOP WZ., A. VAN DER SWAN en R. VAN WIJK JZ.

Op-

OPLOSSING *van* M. B. JUNG.

Stel den wortel van het driehoekig getal gelijk x, dan is die van het zeshoekig getal $x + 1$, en die van het negenhoekig $2x + 1$. Hieruit volgt voor het driehoekig getal $\frac{1}{2}(x^2 + x)$, voor het zeshoekig $2(x + 1)^2 - (x + 1)$ of $2x^2 + 3x + 1$, en voor het negenhoekig getal $\frac{1}{2}\left\{7(2x + 1)^2 - 2(2x + 1)\right\}$ of $14x^2 + 9x + 1$. Daar nu de som dezer getallen gelijk moet zijn aan $31(x + 1)$, zoo is

$$16\tfrac{1}{2}x^2 + 12\tfrac{1}{2}x + 2 = 31(x + 1),$$

of
$$33x^2 + 25x + 4 = 62x + 62,$$

dus
$$33x^2 - 37x = 58,$$

of
$$x^2 - \tfrac{37}{33}x = \tfrac{58}{33}.$$

Stellen wij dus, om de gebrokens te vermijden, $x = \frac{1}{33}y$, dan komt er

$$y^2 - 37y = 1914,$$

waaruit
$$y = 66 \text{ of } y = -29,$$

dus
$$x = 2 \text{ of } x = -\tfrac{29}{33}.$$

Het tweede antwoord geeft tot gebrokene veelhoekige getallen aanleiding. Wij bepalen ons alzoo bij $x = 2$, en dit geeft ons voor de gevraagde getallen $\frac{1}{2}(x^2 + x) = 3$; $2x^2 + 3x + 1 = 15$ en $14x^2 + 9x + 1 = 75$.

CXXXV. VOORSTEL.

Door M. B. JUNG.

Twee driehoekige getallen te vinden, waarvan de som en het verschil wederom driehoekige getallen zijn?

OPGELOST *door* M. B. JUNG en W. TOP Wz.

OPLOSSING *van* M. B JUNG.

Daar een driehoekig getal in het algemeen wordt voorgesteld door $\frac{p^2 + p}{2}$, zoo volgt hieruit, dat een driehoekig getal met 8 vermenigvuldigd wordende, dit product met de eenheid opgeteld, een rationaal quadraat geeft; want hierdoor verkrijgen wij $4p^2 + 4p + 1$ of $(2p + 1)^2$. Deze formule toont tevens aan, dat de wortel van dit vierkant het dubbel van den wortel des driehoekigen getals plus één, en dus oneven is. Hieruit volgt dan bij

bij omkeering, dat wanneer wij het vierkant van een oneven getal met de eenheid verminderen en de rest door 8 deelen, het quotient een driehoekig getal zal zijn, en dit geeft ons aanleiding, om de twee gevraagde driehoekige getallen voor te ftellen door

$$\frac{x^2 - 1}{8} \quad \text{en} \quad \frac{y^2 - 1}{8},$$

waarin door x en y onevene getallen verbeelden.

De fom en het verfchil dezer getallen zijn nu

$$\frac{x^2 + y^2 - 2}{8} \quad \text{en} \quad \frac{x^2 - y^2}{8},$$

en ingevolge onze aanmerking en den eisch van het vraagftuk, zal dan nu het achtvoud van elk dezer getallen opgeteld, met de eenheid een rationaal quadraat moeten opleveren, zoodat de formulen

$$x^2 + y^2 - 1 \quad \text{en} \quad x^2 - y^2 + 1,$$

of wat hetzelfde is

$$x^2 + (y^2 - 1) \quad \text{en} \quad x^2 - (y^2 - 1),$$

rationale quadraten moeten zijn.

Stellen wij het eerfte m^2 en het tweede n^2, dan hebben wij door aftrekking

$$2y^2 - 2 = m^2 - n^2 = (m + n)(m - n),$$

en wij kunnen alzoo, daar $2y^2 - 2 = (2y + 2)(y - 1)$ is, ftellen

$$2y + 2 = m + n \quad \text{en} \quad y - 1 = m - n,$$

dus $$m = \frac{3y + 1}{2} \quad \text{en} \quad n = \frac{y + 3}{2}.$$

Maar door de vergelijkingen $x^2 + (y^2 - 1) = m^2$ en $x^2 - (y^2 - 1) = n^2$ op te tellen, verkrijgen wij, na door twee gedeeld te hebben,

$$x^2 = \frac{m^2 + n^2}{2} = \frac{5y^2 + 6y + 5}{4},$$

en hieruit volgt, dat $5y^2 + 6y + 5$ nog een rationaal quadraat moet zijn. Stellen wij te dien einde

$$5y^2 + 6y + 5 = (2y + a)^2,$$

dan is $$y^2 - (4a - 6)y = a^2 - 5,$$

en $$y = (2a - 3) + \sqrt{(5a^2 - 12a + 4)},$$

en dus moet $5a^2 - 12a + 4$ nog een rationaal quadraat wezen.

Stel-

Stellen wij alzoo $4 - 12a + 5a^2 = (2 - ab)^2$, dan komt er, na door a gedeeld te hebben,

$$5a - 12 = ab^2 - 4b,$$

waaruit $$a = \frac{4b - 12}{b^2 - 5} = \frac{12 - 4b}{5 - b^2} = 4 \times \frac{3 - b}{5 - b^2},$$

zoodat $$\sqrt{(5a^2 - 12a + 4)} = 2 - ab = \frac{10 - 12b + 2b^2}{5 - b^2},$$

en $$y = \frac{19 - 20b + 5b^2}{5 - b^2},$$

en $$x = \frac{2y + a}{2} = \frac{25 - 22b + 5b^2}{5 - b^2},$$

waarin men nu b naar welgevallen kan nemen. Om geheele getallen te verkrijgen neem ik $b = -1$, en dan wordt $y = 11$ en $x = 13$, waardoor voor de driehoekige getallen gevonden wordt 15 en 21, waarvan de som en het verschil, namelijk 36 en 6, wederom driehoekige getallen zijn.

ANDERE OPLOSSING *door* W. TOP Wz.

Stel de driehoekige getallen $\frac{x^2 + x}{2}$ en $\frac{y^2 + y}{2}$, dan moet, volgens het vraagstuk, elke der uitdrukkingen

$$\frac{x^2 + x + y^2 + y}{2} \quad \text{en} \quad \frac{y^2 + y - (x^2 + x)}{2},$$

een driehoekig getal zijn. Nu hebben de driehoekige getallen de eigenschap, dat derzelver tweevoud, vermeerderd met een vierde van de eenheid, een rationaal quadraat wordt, en hieruit volgt, dat

$$y^2 + y + x^2 + x + \tfrac{1}{4} \quad \text{en} \quad y^2 + y - (x^2 + x) + \tfrac{1}{4},$$

rationale quadraten moeten zijn.

Stellen wij den wortel van het eerste $x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$, dan is

$$y^2 + y + x^2 + x + \tfrac{1}{4} = (x + \tfrac{1}{2}y + \tfrac{1}{2})^2,$$

hierdoor verdwijnen de termen x^2, x en $\frac{1}{4}$, en alles door y gedeeld hebbende, vinden wij

$$y = \frac{4x - 2}{3}.$$

Daar wij echter x en y, zoo mogelijk, in geheele getallen willen bepalen, stellen wij $x = 3m + 2$, en dan hebben wij

$$x = 3m + 2 \quad \text{en} \quad y = 4m + 2.$$

Deze waarden van x en y maken nu de eerste van onze twee formulen tot een quadraat, en wel tot het vierkant van $5m + \frac{1}{2}$; maar zij moeten ook de tweede tot een vierkant maken, en hieruit volgt, dat

$$7m^2 + 5m + \frac{1}{4}$$

nog een rationaal vierkant moet zijn.

Stellen wij den wortel van dit vierkant $nm + \frac{1}{2}$, dan verkrijgen wij gemakkelijk

$$m = \frac{5 - n}{n^2 - 7},$$

en brengende deze waarde van m over in die van x en y, dan komt er

$$x = \frac{2n^2 - 3n + 1}{n^2 - 7} \quad \text{en} \quad y = \frac{2n^2 - 4n + 6}{n^2 - 7},$$

en het komt er nu voornamelijk op aan, voor n zulke getallen uit te kiezen, dat x en y beide geheele getallen worden. Zie hier eenige waarden van n, welke aan deze voorwaarde voldoen.

Stellen wij $n = 3$, dan wordt $x = 5$ en $y = 6$, en de gevraagde driehoekige getallen zijn 15 en 21.

Stellende $n = -3$, dan wordt $x = 14$ en $y = 18$, en de driehoekige getallen zijn 105 en 171.

Stellende $n = -2\frac{2}{3}$, dan is $x = 209$ en $y = 278$, en wij vinden voor de driehoekige getallen 38781 en 21945.

Stellende $n = +2\frac{2}{3}$, dan is $x = 65$ en $y = 86$; de driehoekige getallen zijn dan 2145 en 3741.

Nemende $n = 2\frac{21}{48}$, of $n = -2\frac{21}{48}$, dan zal men wederom antwoorden in geheele getallen vinden; doch dezelve worden reeds zeer groot, en wij zouden er nog meer kunnen aanwijzen, indien de getallen niet te groot werden om handelbaar te blijven.

CXXXVI. VOORSTEL.

Door W. Top, Wz.

Een holle concentrieke bol, waarvan de uit- en inwendige oppervlakten tot elkander in reden zijn als p en q, heeft evenveel inhoud als een masfive bol, waarvan r de straal is. Men vraagt hierdoor de dikte van den uitgeholden bol te bepalen?

Op-

OPGELOST *door* W. TOP Wz. en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* W. TOP Wz.

Stel den straal van de uitwendige oppervlakte x en die van het inwendig oppervlak y, dan is de inhoud van den uitgeholden bol $\frac{4}{3}\pi(x^3 - y^3)$; maar de inhoud van den masſiven bol is $\frac{4}{3} r^3 \pi$, en dit geeft ons de vergelijking

$$x^3 - y^3 = r^3.$$

Het uitwendig en inwendig oppervlak wordt, ingevolge onze aangenomene stelling, uitgedrukt door $4x^2\pi$ en $4y^2\pi$, en daar deze oppervlakten in reden moeten zijn als p en q, zoo is

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{p}{q} \quad \text{of} \quad \frac{x^3}{y^3} = \frac{p\sqrt{p}}{q\sqrt{q}},$$

dat is $$x^3 = y^3 \cdot \frac{p\sqrt{p}}{q\sqrt{q}} \quad \text{en} \quad y^3 = x^3 \cdot \frac{q\sqrt{q}}{p\sqrt{p}};$$

brengende nu elk der twee laatste vergelijkingen over in $x^3 - y^3 = r^3$, dan verkrijgen wij

$$y^3\left(\frac{p\sqrt{p}}{q\sqrt{q}} - 1\right) = r^3 \quad \text{en} \quad x^3\left(1 - \frac{q\sqrt{q}}{p\sqrt{p}}\right) = r^3,$$

of $$y^3 = r^3 \times \frac{q\sqrt{q}}{p\sqrt{p} - q\sqrt{q}} \quad \text{en} \quad x^3 = r^3 \times \frac{p\sqrt{p}}{p\sqrt{p} - q\sqrt{q}},$$

waaruit $$y = r \cdot \frac{\sqrt{q}}{\sqrt[3]{(p\sqrt{p} - q\sqrt{q})}} \quad \text{en} \quad x = r \times \frac{\sqrt{p}}{\sqrt[3]{(p\sqrt{p} - q\sqrt{q})}}$$

en daar de dikte van den uitgeholden bol gelijk is aan $x - y$, zoo vinden wij voor dezelve

$$x - y = r \times \frac{\sqrt{p} - \sqrt{q}}{\sqrt[3]{(p\sqrt{p} - q\sqrt{q})}}.$$

CXXXVII. VOORSTEL.

Door W. TOP Wz.

Van een bolvormig segment staat het ronde oppervlak tot den cirkelvormigen bazis als p tot q. Wanneer nu de inhoud van dit segment gelijk is aan dien van eenen hollen concentrieken bol, welke eene dikte d heeft, en waarvan de straal der uitholling r is, vraagt men naar de afmetingen van het segment, alsmede naar den straal van den bol, waaruit dit segment gesneden is?

OP-

OPGELOST *door* W. TOP Wz. en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* W. TOP Wz.

De inhoud van den uitgeholden bol is gelijk aan het verſchil der bollen, die $r + d$ en r tot ſtralen hebben, en bij gevolg gelijk $\frac{4}{3} \pi ((r + d)^3 - r^3)$, en dit is nu ook tevens de inhoud van het begeerde bolvormig ſegment.

Stellen wij nu den ſtraal van den bol, waaruit dit ſegment geſneden is, z, de hoogte van het ſegment x en den ſtraal van het grondvlak des ſegments y, dan is de inhoud van dit ſegment $\frac{1}{3} x^2 \pi (3z - x)$, waardoor wij als eerſte vergelijking verkrijgen

$$x^2 (3z - x) = 4 ((r + d)^3 - r^3) \quad . \; . \; . \; (1)$$

Het gebogen oppervlak van een bolvormig ſegment verder gelijk zijnde aan den omtrek van den grooten cirkel, vermenigvuldigd met de hoogte des ſegments, zoo wordt dit oppervlak voor ons ſegment uitgedrukt door $2 xz \pi$; en daar de inhoud van het grondvlak $y^2 \pi$ is, zoo verkrijgen wij, door deze inhouden als p tot q te onderſtellen, tot tweede vergelijking

$$2 xz = y^2 . \frac{p}{q} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (2)$$

Eindelijk is het klaar, dat wij tot derde vergelijking hebben

$$z^2 = y^2 + (z - x)^2 \quad . \; . \; . \; . \; (3)$$

en wij moeten alzoo x, y en z uit deze drie vergelijkingen oploſſen.

De derde vergelijking geeft terſtond

$$y^2 = 2 zx - x^2,$$

en brengende dit in de tweede vergelijking over, dan komt er

$$2 xz = \frac{p}{q} (2 xz - x^2),$$

of

$$2 z = \frac{p}{q} (2 z - x),$$

waaruit

$$z = \frac{p}{2 (p - q)} . x,$$

en brengende dit over in $y^2 = 2 zx - x^2$, verkrijgen wij

$$y^2 = \frac{p}{p - q} x^2 - x^2,$$

of

of $$y^2 = \frac{q}{p-q} x^2 \quad \text{en} \quad y = x \sqrt{\frac{q}{p-q}}.$$

Brengende eindelijk de waarde van z over in de vergelijking (1), dan komt er

$$x^2 \left(\frac{3p}{2(p-q)} x - x\right) = 4\left((r+d)^3 - r^3\right),$$

of $$\frac{p+2q}{p-q} x^3 = 8\left((r+d)^3 - r^3\right),$$

waaruit $$x = 2 \sqrt[3]{\frac{p-q}{p+2q} \cdot \left\{(r+d)^3 - r^3\right\}},$$

voor de hoogte van het segment, waardoor wij voor den straal van het grondvlak vinden

$$y = 2 \sqrt{\left(\frac{q}{p-q}\right)} \times \sqrt[3]{\frac{p-q}{p+2q} \left\{(r+d)^3 - r^3\right\}},$$

terwijl de straal van den geheelen bol wordt uitgedrukt door

$$z = \frac{p}{p-q} \cdot \sqrt[3]{\frac{p-q}{p+2q} \left\{(r+d)^3 - r^3\right\}}.$$

CXXXVIII. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

De waarde te vinden van de oneindig voortloopende uitdrukking

$$\sqrt{(x + \sqrt{(x + \sqrt{(x + \sqrt{(\text{enz.})})})})}?$$

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, W. TOP WZ., R. VAN WIJK JZ. en R. LOBATTO.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Stellen wij de gevraagde waarde der uitdrukking

$$\sqrt{(x + \sqrt{(x + \sqrt{(x + \sqrt{(\text{enz.})})})})} = y,$$

dan verkrijgen wij, door deze vergelijking tot de tweede magt te verheffen,

$$x + \sqrt{(x + \sqrt{(x + \sqrt{(x + \sqrt{(\text{enz.})})})})} = y^2,$$

en trekken wij hiervan de gestelde vergelijking af, zoo blijft er

$$y^2 - y = x,$$

waaruit $$y = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(x + \tfrac{1}{4})}.$$

Het dubbele teeken wordt alleen voortgebragt, omdat wij de gestelde vergelijking hebben moeten quadrateren, en het alsdan hetzelfde is, of er — dan wel + voor de uitdrukking had gestaan. Zoodra wij

wij echter voor het eerste wortelteeken het teeken — denken, dan volgt uit de regelmatigheid, die wij in onze formule onderstellen, dat voor al de wortelteekens het teeken — staat, en hieruit volgt, dat wij zullen hebben

$$\sqrt{(x+\sqrt{(x+\sqrt{(x+\sqrt{(enz.)})})})}=\tfrac{1}{2}+\sqrt{(x+\tfrac{1}{4})};$$

$$-\sqrt{(x-\sqrt{(x-\sqrt{(x-\sqrt{(enz.)})})})}=\tfrac{1}{2}-\sqrt{(x-\tfrac{1}{4})}.$$

Het volgende voorbeeld zal het gezegde volkomen bevestigen. Stellen wij $x=2$, dan vinden wij voor de eerste reeks $+2$, en voor de tweede -1, en het is in dit bijzonder geval klaar, dat wij voor 2 en -1 kunnen schrijven:

$$\begin{aligned}2 &= \sqrt{(2+2)}\\ &= \sqrt{(2+\sqrt{(2+2)})}\\ &= \sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+2)})})}\\ &= enz.\\ &= \sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(enz.)})})})}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-1 &= -\sqrt{(2-1)}\\ &= -\sqrt{(2-\sqrt{(2-1)})}\\ &= \sqrt{(2-\sqrt{(2-\sqrt{(2-1)})})}\\ &= enz.\\ &= -\sqrt{(2-\sqrt{(2-\sqrt{(2-\sqrt{(enz.)})})})}\end{aligned}$$

CXXXIX. VOORSTEL.

Door R. LOBATTO.

Men vraagt den loop der kromme lijn te bepalen, waarvan de polaire vergelijking is $z = a\ Cos.\ \phi + b\ Sin.\ \phi$?

OPGELOST *door* R. LOBATTO en R. VAN WIJK JZ.

Zij O, *Fig.* 77, de pool en OX de oorsprong der veranderlijke hoeken; indien dan M eenig willekeurig punt van de kromme is, en wij trekken MP loodregt op OX, dan is, $OP = x$ en $PM = y$ stellende,

$$x = z\ Cos.\ \phi \qquad \text{en} \qquad y = z\ Sin.\ \phi,$$

waaruit $$Cos.\ \phi = \frac{x}{z} \qquad \text{en} \qquad Sin.\ \phi = \frac{y}{z};$$

substituerende dit in onze vergelijking, dan komt er

$$z = a\,.\,\frac{x}{z} + b\,.\,\frac{y}{z},$$

of $$z^2 = ax + by;$$

maar wij hebben bovendien $z^2 = x^2 + y^2$, en bij gevolg

$$x^2 + y^2 = ax + by,$$

of $$x^2 - ax + y^2 - by = 0;$$

dat

dat is $(x-\frac{1}{2}a)^2+(y-\frac{1}{2}b)^2=\{\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2)}\}^2$,
hetwelk de vergelijking van eenen cirkel is, die $\frac{1}{2}a$ en $\frac{1}{2}b$ tot coördinaten van het middelpunt heeft en waarvan $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2)}$ de ſtraal is. Maken wij dus OA $=\frac{1}{2}a$ en AC $=\frac{1}{2}b$, en beſchrijven wij uit C met CO als ſtraal eenen cirkel, dan zal dezelve de gevraagde kromme lijn, zijn. Waaruit nog volgt, dat de gegevens a en b de waarden zijn der lijnen OB en OD, welke de punten bepalen, waarin de cirkel de asſen der coördinaten doorſnijdt.

CXL. VOORSTEL.

Door J. VAN WIJK RZ.

Twee getallen te vinden, welker product gelijk zij aan het vierkant van het verſchil, en waarvan de ſom der vierkanten gegeven en gelijk a is? (29)

OPGELOST *door* J. VAN WIJK RZ., R. VAN WIJK JZ., en W. TOP WZ.

OPLOSSING *van* J. VAN WIJK RZ.

Stel de getallen x en y, dan zijn de vergelijkingen
$$xy=(x-y)^2 \quad \text{en} \quad x^2+y^2=a.$$
Brengen wij de waarde van x^2+y^2 uit de tweede vergelijking in de eerſte over, dan komt er
$$xy=a-2xy,$$
waaruit $xy=\frac{1}{3}a$ en $2xy=\frac{2}{3}a$.

Nemen wij alzoo de ſom en het verſchil van
$$x^2+y^2=a \quad \text{en} \quad 2xy=\frac{2}{3}a,$$
dan verkrijgen wij
$$(x+y)^2=\frac{5}{3}a \quad \text{en} \quad (x-y)^2=\frac{1}{3}a,$$
waaruit $x+y=\pm\frac{1}{3}\sqrt{15a}$ en $x-y=\pm\frac{1}{3}\sqrt{3a}$,
en hierdoor vinden wij verder
$$x=\pm\frac{1}{6}\sqrt{15a}\pm\frac{1}{6}\sqrt{3a},$$
$$y=\pm\frac{1}{6}\sqrt{15a}\mp\frac{1}{6}\sqrt{3a}.$$

ANDERE OPLOSSING *door* W. TOP WZ.

Stellen wij de getallen $x+y$ en $x-y$, dan is derzelver pro-

(29) J. DE GELDER, *Beg. der Stelkunst*, *bl.* 252. No. 64.

product $x^2 - y^2$ en het vierkant van hun verschil $4y^2$, zoodat $x^2 - y^2 = 4y^2$ of $x^2 = 5y^2$ en $x = \pm y\sqrt{5}$.

De som der vierkanten is $2x^2 + 2y^2 = a$, en breigende hierin de gevondene waarde van x^2, komt er $12y^2 = a$, waaruit $y^2 = \frac{1}{12}a$ en $y = \pm \frac{1}{6}\sqrt{3a}$, zoodat $x = \pm y\sqrt{5} = \pm \frac{1}{6}\sqrt{15a}$. De gevraagde getallen zijn dus

$$x + y = \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{15a} \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{3a},$$
$$x - y = \mp \tfrac{1}{6}\sqrt{15a} \mp \tfrac{1}{6}\sqrt{3a}.$$

CXLI. VOORSTEL

Door J. VAN WIJK Rz.

Van twee getallen gegeven zijnde de som der vierkanten gelijk a en de som der quotienten van het eerste gedeeld door het tweede en van het tweede door het eerste gelijk b, vraagt men die getallen te vinden? (30)

OPGELOST *door* J. VAN WIJK Rz., R. VAN WIJK Jz. en W. TOP Wz.

OPLOSSING *van* J. VAN WIJK Rz.

Stel voor de getallen x en y, dan zijn de vergelijkingen

$$x^2 + y^2 = a \quad \text{en} \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = b.$$

Vermenigvuldigen wij de tweede met xy, dan komt er $x^2 + y^2 = bxy$, en brengen wij hierin de waarde van $x^2 + y^2$ uit de eerste over, dan verkrijgen wij

$$bxy = a \quad \text{of} \quad xy = \frac{a}{b}.$$

Nemende dus de som en het verschil van $x^2 + y^2 = a$ en $2xy = \frac{2a}{b}$, dan vinden wij

$$(x + y)^2 = a + \frac{2a}{b} \quad \text{en} \quad (x - y)^2 = a - \frac{2a}{b},$$

dus $$x + y = \pm\sqrt{\frac{a(b+2)}{b}} \quad \text{en} \quad x - y = \pm\sqrt{\frac{a(b-2)}{b}};$$

zoo-

(30) J. DE GELDER, *B.g. der Stelkunst*, *bl.* 232. N°. 66.

zoodat $x = \{ \pm \sqrt{(b+2)} \pm \sqrt{(b-2)} \} . \sqrt{\frac{b}{a}}$

$$y = \{ \pm \sqrt{(b+2)} \mp \sqrt{(b-2)} \} . \sqrt{\frac{b}{a}};$$

welke waarden wij ook aldus kunnen schrijven:

$$x = \pm \sqrt{\frac{2b}{a}(b \pm \sqrt{(b^2-4)})}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{2b}{a}(b \mp \sqrt{(b^2-4)})}.$$

CXLII. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Op eene gegevene lijn als bazis een' driehoek te construeren, zoodanig, dat de som der vierkanten van de opstaande zijden gelijk zij aan n maal het vierkant van de gegevene bazis? Men vraagt bovendien de meetkunstige plaats van den top te vinden, en de limieten te bepalen, waartusschen n genomen moet worden, opdat de oplossing mogelijk zij?

OPGELOST door J. R. SCHMIDT, W. TOP Wz. en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING van J. R. SCHMIDT.

Laat AB, *Fig.* 78, de gegevene lijn zijn en stellen wij dezelve gelijk $2a$, indien wij dan AB in C midden door deelen, is $AC = CB = a$. Stellen wij nu, dat AMB een driehoek is, die aan het gevraagde voldoet, zoodat

$$AM^2 + BM^2 = n \times AB^2$$

is, en trekken wij MP loodregt op AB, dan kunnen wij CP en MP als de coördinaten beschouwen van de kromme lijn, waarin de toppunten van al de driehoeken gelegen zijn, die aan de vraag beantwoorden. Stellen wij alzoo $CP = x$ en $MP = y$, dan is $AP = a + x$, $BP = a - x$ en $AB = 2a$, en hieruit volgt

$$AM^2 = (a+x)^2 + y^2; BM^2 = (a-x)^2 + y^2; AB^2 = 4a^2,$$

waardoor de vergelijking, die de voorwaarden van het vraagstuk uitdrukt, overgaat in

$$(a+x)^2 + (a-x)^2 + 2y^2 = 4na^2.$$

of $$2\,a^2 + 2\,x^2 + 2\,y^2 = 4\,n\,a^2,$$
dat is $$x^2 + y^2 = (2\,n - 1)\,a^2,$$
hetwelk de vergelijking van eenen cirkel is, waarvan het middelpunt in C ligt en die $a\sqrt{(2\,n - 1)}$ tot straal heeft.

Wanneer wij alzoo uit C als middelpunt met eenen straal, die midden evenredig is tusschen a en $(2\,n - 1)\,a$, een' cirkel beschrijven, zal elk punt, in den omtrek van dezen cirkel, het toppunt van eenen driehoek zijn, die aan de vraag voldoet.

Daar de straal van den gevonden' cirkel wordt uitgedrukt door $a\sqrt{(2\,n - 1)}$, zoo zal dezelve onbestaanbaar en dus het vraagstuk onmogelijk worden; wanneer $n < \frac{1}{2}$ wordt; maar zoodra $n > \frac{1}{2}$ is, zal het vraagstuk altijd mogelijk zijn.

Voor het geval van $n = \frac{1}{2}$ wordt de straal gelijk o, en dan is er geene andere oplossing dan het punt C. Voor $n = 1$ wordt de straal gelijk a, en dus moet de cirkel voor dit geval op AB als middellijn beschreven worden; de driehoek wordt dan regthoekig, hetgeen ook uit andere gronden blijkbaar is.

CXLIII. VOORSTEL.

Door I. P. DELPRAT.

Drie punten in eene regte lijn gegeven zijnde, vraagt men naar de meetkunstige plaats van al de punten, uit welke men de drie gegevene punten onder gelijke hoeken ziet?

OPGELOST *door* I. P. DELPRAT, W. TOP WZ., en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* I. P. DELPRAT.

Laat A, B en C, *Fig.* 79, de drie gegevene punten zijn in eene regte lijn gelegen, en zij D een der punten, waaruit de drie eerste onder gelijke hoeken gezien worden, zoodat $\angle$ ADB $= \angle$ CDB is, dan is D een der punten van de gezochte kromme. De loodlijn DE getrokken hebbende, zoo stellen wij BE $= x$, DE $= y$, AB $= a$ en BC $= b$. Omdat nu in den driehoek ADC de lijn DB den hoek ADC in twee gelijke deelen deelt, zoo is

$$AD : DC = AB : BC \quad \text{en} \quad AD^2 : DC^2 = AB^2 : BC^2;$$

maar

maar volgens onze gestelde waarden, is
$AD^2 = (a + x)^2 + y^2$ en $DC^2 = (b - x)^2 + y^2$;
zoodat onze laatste evenredigheid overgaat in
$$(a + x)^2 + y^2 : (b - x)^2 + y^2 = a^2 : b^2$$
of $\quad a^2 (b - x)^2 + a^2 y^2 = b^2 (a + x)^2 + b^2 y^2$,
dus $(b^2 - a^2) y^2 + (b^2 - a^2) x^2 + 2ab (a + b) x = 0$;
of door $b^2 - a^2$ deelende
$$x^2 - \frac{2ab}{a - b} x + y^2 = 0;$$
welke vergelijking, door aan beide zijden $\left(\frac{ab}{a - b}\right)^2$ op te tellen, overgaat in
$$\left(x - \frac{ab}{a - b}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{ab}{a - b}\right)^2.$$

Stellen wij dus $\frac{ab}{a - b} = p$; dat is, nemen wij p vierde evenredig tot $a - b$; a en b, dan wordt onze vergelijking
$$(x - p)^2 + y^2 = p^2,$$
hetwelk de vergelijking van eenen cirkel is, die deszelfs middelpunt G op de as BX der abscissen heeft, en wel op eenen afstand BG van den oorsprong gelijk aan p, en waarvan bovendien de straal mede gelijk p is. (*)

Nemen wij dus BG vierde evenredig tot BA — BC, BA en BC, en beschrijven wij uit G met GB als straal eenen cirkel, dan zal dezelve de meetkunstige plaats van het punt D zijn, dat is, dan zal elk punt D in den omtrek van dezen cirkel aan de vraag beantwoorden.

Wanneer $a = b$ is, dan wordt de straal des cirkels $\frac{ab}{0}$, en dus oneindig, dat is, de cirkel gaat dan over in eene regte lijn, welke nog door het punt B gaat, maar loodregt op AC staat. Dit is ook uit den aard der zaak op te maken, want het is klaar, dat, uit welk punt van deze loodlijn dan ook lijnen naar de punten A en C getrokken worden, hierdoor altijd een gelijkbeenige drie-

(*) Het is namelijk bekend, dat de vergelijking $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ tot eenen cirkel behoort, waarvan r de straal is, terwijl p en q de coördinaten van middelpunt zijn.

driehoek gevormd wordt, wiens tophoek men door deze loodlijn in twee gelijke deelen verdeelt.

CXLIV. VOORSTEL.

Door I. P. DELPRAT.

Van een regthoekig trapezium is gegeven de bazis, of de afstand der evenwijdige zijden, benevens de loodlijn, welke uit een der hoekpunten van deze bazis op de overstaande of schuinsche zijde valt. Men vraagt onder deze gegevens, de schuinsche zijde zoodanig te plaatsen, dat de inhoud van het trapezium een minimum worde?

OPGELOST *door* I. P. DELPRAT en W. TOP WZ.

OPLOSSING *van* I. P. DELPRAT.

Zij ABCD, *Fig.* 80, het gevraagde trapezium, waarvan AB $= b$ en AE $= a$ gegeven is; stellen wij dan $\angle$ EAB $= \phi$, dan is in den driehoek DEA,

$$AD = AE \; Sec. \; DAE = a \; Cosec. \; \phi = \frac{a}{Sin. \; \phi},$$

en in den driehoek FCD, welke met DEA gelijkvormig is,

$$DF = FC \; . \; Tang. \; FCD = b \; Cot. \; \phi,$$

zoodat $$BC = AD - DF = \frac{a}{Sin. \; \phi} - b \; Cot. \; \phi$$

en $$AD + BC = \frac{2a - b \; Cos. \; \phi}{Sin. \; \phi}.$$

Nu is de inhoud van het trapezium gelijk aan de som der zijden AD en BC, vermenigvuldigd met de halve bazis AB; en daar AB standvastig is, zal de meerdere of mindere grootte van het trapezium alleen van de som der zijden AD en BC afhangen. Wij behoeven alzoo alleen den hoek ϕ zoodanig te bepalen, dat de som dezer zijden een minimum zij. Stellen wij deze som S, dan is

$$S = \frac{2a}{Sin. \; \phi} - b \; Cot. \; \phi \; \ldots\ldots\ldots \; (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = -2a \frac{Cos. \; \phi}{Sin.^2 \phi} + b \; . \; \frac{1}{Sin.^2 \phi} = \frac{b - 2a \; Cos. \; \phi}{Sin.^2 \phi} \; \ldots \; (2)$$

en

en $\frac{\partial^2 S}{\partial \phi^2} = 2a \,.\, \frac{1 + Cos^2 \phi}{Sin.^3 \phi} - 2b\, \frac{Cos. \phi}{Sin.^3 \phi} \ldots . (3).$

Voor het minimum moet $\frac{\partial S}{\partial \phi} = 0$ zijn, en dit geeft ons

$$b - 2a\, Cos.\, \phi = 0, \quad \text{dus} \quad Cos.\, \phi = \frac{b}{2a}.$$

Schrijven wij in de tweede differentiaal coëfficient $2a\, Cos.\, \phi$ in plaats van b, dan gaat dezelve over in

$$\frac{2a}{Sin.^3 \phi} \left\{ 1 + Cos.^2 \phi - 2\, Cos.^2 \phi \right\} = \frac{2a}{Sin\ \phi},$$

welke waarde altijd positief zal wezen, wanneer ϕ positief en kleiner dan 180° is, waaruit volgt, dat de zoo even gevondene waarde van ϕ werkelijk een minimum geeft.

De waarde van ϕ voor het minimum is gemakkelijk te construeren: men behoeft namelijk alleen uit een der hoekpunten van de bazis, met eenen straal AG = 2 AE = $2a$, eenen cirkelboog te beschrijven, die het verlengde van BC snijdt in G, en alsdan de lijn AG te trekken, dezelve in E midden door te deelen, en door E de lijn DC loodregt op AE te trekken. De vierhoek ABCD zal dan het gevraagde trapezium zijn; want alsdan is

$$Cos.\ EAB = \frac{AB}{AG} = \frac{b}{2a}.$$

1e Aanmerking. De inhoud van het trapezium wordt in het algemeen uitgedrukt door

$$\tfrac{1}{2} S \times b = \tfrac{1}{2} b \,.\, \frac{2a - b\, Cos.\, \phi}{Sin.\, \phi},$$

en dus in geval van het minimum door

$$\tfrac{1}{2} b \,.\, \frac{2a - \frac{b^2}{2a}}{\sqrt{(1 - \frac{b^2}{4a^2})}} = \tfrac{1}{2} b \,.\, \frac{4a^2 - b^2}{\sqrt{(4a^2 - b^2)}} = \tfrac{1}{2} b . \sqrt{(4a^2 - b^2)}.$$

2e Aanmerking. Wanneer $b = 2a$ is, dan wordt $Cos.\, \phi = 1$ dus $\phi = 0$; maar alsdan wordt de tweede differentiaal coëfficient $\frac{2a}{0} = \infty$, en men kan alzoo voor dit geval niet dadelijk besluiten, dat $\phi = 0$ een minimum geeft. Stelt men $b = 2a$ in de vergelijking (1), dan vindt men

$$S = 2a\ Tang.\ \tfrac{1}{2} \phi,$$

 wel.

welke uitdrukking voor geen minimum vatbaar is, omdat de tangens van positief, door o gaande, negatief wordt, en dus voor de kleinste waarde, dat is voor $\phi = o$, het kenmerk van een maximum of minimum niet doorgaat, hetwelk eigenlijk hierin bestaat, dat de naast voorgaande en volgende waardijen beide grooter of beide kleiner moeten zijn, dan de waarde voor het maximum of minimum. Voor $b > 2a$ wordt $Cos. \phi > 1$ en derhalve ϕ onbestaanbaar; er kan dus ook geen maximum of minimum voor dit geval bestaan.

3e Aanmerking. Het hier opgeloste Voorstel vindt zijne toepassing bij den aanleg van overwelfde gebouwen, hoedanig er vele in den vestingbouw voorkomen. De gewelven dezer gebouwen worden gewoonlijk, voor het afloopen van het regenwater, van boven, volgens een hellend vlak, waarvan DC, *Fig.* 81, de doorsnede voorstelt, gemetseld; dit metselwerk, begrepen tusschen het buiten-oppervlak FGH van het gewelf en de lijnen DC en BC, (zijnde BI de dikte van den regtstandsmuur) noemt men de *aanrasfeering*, en het voorgaande Voorstel dient nu, om de rigting DC van het bovenvlak dezer aanrasfeering zóó te bepalen, dat derzelver inhoud DCBHGF een minimum zij; in de onderstelling namelijk, dat de buiten-oppervlakte van het gewelf een cirkelboog van eenen gegevenen straal is, alsmede, dat de dikte BI van den regtstand, en de kleinste afstand GE, waarop de aanrasfeering de buiten-oppervlakte van het gewelf mag naderen, gegeven zij. Daar namelijk in dit geval de oppervlakte FGHA standvastig blijft, zoo zal, wanneer DECBHGF een minimum is, ook het trapezium ABCD een minimum moeten wezen; en omgekeerd zal, wanneer dit trapezium een minimum is, ook de aanrasfeering de kleinste oppervlakte hebben. Volgens de gegevene oplossing wordt nu de rigting DC van den bovenkant der aanrasfeering gevonden, door uit A, met 2 AE als straal, een cirkelboog te beschrijven, snijdende het verlengde der buitenzijde van den regtstandsmuur in L, en vervolgens DC loodregt door het midden van AL te trekken.

CXLV. VOORSTEL.

Door J. van der Stok.

Op eene onbepaalde lijn XY, *Fig.* 82, *is een vast punt A aan-* ge-

genomen. Indien men nu eene standvastige lijn CD zoodanig laat bewegen, dat het eene uiteinde C altijd in de lijn XY blijft liggen, terwijl de afstand, die het tweede uiteinde D van de lijn XY heeft, overal gelijk is aan den afstand van het uiteinde C tot het vaste punt A, dan vraagt men de meetkunstige plaats te vinden van het punt D?

OPGELOST *door* J. VAN DER STOK, W. TOP WZ. en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* J. VAN DER STOK.

Stellen wij den oorsprong der coördinaten in A, en nemen wij aan, dat CD een stand der gegevene lijn zij en dus BD = AC is; dan is, AB = x, BD = y en CD = a stellende, CB = AB — AC = AB — BD = $x - y$, en daar $CD^2 = BC^2 + BD^2$ is,

$$(x - y)^2 + y^2 = a^2,$$

of
$$x^2 - 2xy + 2y^2 - a^2 = 0,$$

dat is
$$y^2 - xy + \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}a^2 = 0 \ldots\ldots (1),$$

welke van den tweeden graad zijnde, aantoont, dat de gevraagde meetkunstige plaats eene der kegelsneden is.

Daar wij onze vergelijking ook aldus kunnen schrijven

$$(y - \tfrac{1}{2}x)^2 + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}a^2 = 0,$$

zoo zal dezelve veel eenvoudiger worden, door $y - \tfrac{1}{2}x = y'$ te stellen; want dan verkrijgen wij

$$4y'^2 + x^2 = 2a^2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

In deze vergelijking is nu x nog de waarde van AB gebleven; doch y' heeft eene geheele andere beteekenis gekregen dan BD. Om deze waarde van y' aan te wijzen, nemen wij BE = $\tfrac{1}{2}$ AB en trekken door A en E de onbepaalde lijn X′ Y′, dan zal overal EB = $\tfrac{1}{2}x$, en dus ED = — EB + BD = $-\tfrac{1}{2}x + y = y - \tfrac{1}{2}x$ zijn, waaruit volgt, dat voor ieder punt D van onze kromme lijn DE de waarde van y' zal wezen.

Daar alzoo de vergelijking (2) de betrekking tusschen AB en DE voor elk punt onzer kromme lijn uitdrukt, zal het natuurlijker zijn, AB = x uit deze vergelijking te verdrijven en in derzelver plaats AE = x' in te voeren; want dan zullen wij de vergelijking, ten opzigte van de assen VZ en X′ Y′, verkrijgen.

Hiertoe is het genoegzaam op te merken, dat $AE^2 = AB^2 + BE^2 = x^2 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{5}{4}x^2$ zijnde $x'^2 = \frac{5}{4}x^2$ en dus $x^2 = \frac{4}{5}x'^2$ is, waardoor de vergelijking (2) overgaat in

$$4y'^2 + \frac{4}{5}x'^2 = 2a^2$$

of

$$\frac{y'^2}{\frac{1}{2}a^2} + \frac{x'^2}{\frac{5}{2}a^2} = 1,$$

zijnde dit de vergelijking van eene ellips, waarvan de toegevoegde middellijnen op de asſen VZ en $X'Y'$ gelegen zijn. Stellen wij deze halve toegevoegde middellijnen $AF = m$ en $AG = n$, dan hebben wij door $y' = 0$ te ſtellen $m^2 = \frac{5}{2}a^2$ en door $x' = 0$ te ſtellen $n^2 = \frac{1}{2}a^2$, waaruit $AF = m = \frac{1}{4}a\sqrt{10}$ en $AG = n = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. Hierdoor is alzoo de geheele ellips bepaald.

Wil men de punten H en H' bepalen, waarin de ellips de lijn XY doorſnijdt, dan behoeft men alleen in de vergelijking (1) $y = 0$ te ſtellen, en hierdoor zal men verkrijgen $x^2 = a^2$, waaruit $x = \pm a$, zoodat $AH = AH' = CD$.

CXLVI. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Twee bollen, waarvan de ſtralen gegeven zijn, bewegen zich met verſchillende, doch eenparige ſnelheden, zoodanig, dat hunne middelpunten regte lijnen doorloopen, die in een zelfde vlak liggen. Indien men nu de aanvangspunten der beweging, benevens de betrekking der ſnelheden kent, en bovendien de rigtingen bekend zijn, waarin zich de middelpunten bewegen, dan vraagt men de punten te bepalen, waarin zich de middelpunten zullen bevinden, op het oogenblik, dat de bollen elkander aanraken.

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT en W. TOP WZ.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Onderſtellen wij, dat XX' en YY' *Fig.* 83, elkander in C ſnijdende, de lijnen zijn, waarin zich de middelpunten der bollen bewegen, en dat A en B de punten zijn, waarin zich deze middelpunten bij den aanvang der beweging bevinden, dan zijn $AB = m$, $\angle BAC = \alpha$ en $\angle ABC = \beta$ bekende grootheden.

On-

Onderstellen wij verder, dat op het oogenblik, waarin de bollen elkander aanraken, derzelver middelpunten zich in P en Q bevinden, dan gaat de lijn PQ, die deze middelpunten vereenigt, door het raakpunt R en is gelijk aan de som der stralen. Stellen wij dus deze stralen RP = AA' = a en RQ = BB' = b, dan is PQ = $a + b$.

Omdat de bol A even veel tijds besteed heeft, om van A in P, als de bol B om van B in Q te komen, staan de afgeloopene wegen AP en BQ tot elkander in dezelfde reden als de snelheden, waarmede deze bollen zich bewegen. Stellen wij dus deze snelheden tot elkander in reden als $p:q$, dan is ook AP:BQ = $p:q$.

Wij hebben alzoo in den vierhoek ABQP vijf dingen bekend, namelijk de zijde AB = m, den hoek A = α, den hoek B = β, de zijde PQ = $a + b$, en de reden der zijden AP en BQ als p tot q. Deze vierhoek is alzoo geheel bepaald, en wij kunnen de zijden AP en BQ, die den gevraagden stand der middelpunten P en Q bepalen, op de volgende wijze berekenen.

Daar wij in den driehoek de zijde m benevens de aanliggende hoeken α en β bekend hebben, is niets gemakkelijker, dan den hoek C en de zijden AC en BC te berekenen. Wij kunnen dus deze drie dingen als de oorspronkelijke gegevens beschouwen, en alzoo $\angle$ C = δ, AC = a' en BC = b' stellen.

Stellen wij dan CP = x en CQ = y, dan is AP = $a' - x$ en BQ = $b' - y$, en wij hebben alzoo

$$a' - x : b' - y = p : q \quad . \; . \; . \quad (1)$$

maar in driehoek PCQ hebben wij bovendien

$$BC^2 + CQ^2 - 2\,PC \times CQ\ Cos.\ C = PQ^2,$$

of

$$x^2 + y^2 - 2xy\ .\ Cos.\ \delta = (a + b)^2 \quad . \; . \quad (2)$$

zoodat wij x en y uit deze twee vergelijkingen zullen moeten bepalen.

Uit de eerste vergelijking vinden wij gemakkelijk

$$py - qx = pb' - qa',$$

en losfen wij uit deze vergelijking eerst de waarde van y en dan die van x op, dan komt er

$$y = \frac{q}{p}\,x + \left(b' - \frac{q}{p}\,a'\right) \text{ en } x = \frac{p}{q}\,y + \left(a' - \frac{p}{q}\,b'\right)$$

en brengen wij deze waarden achtervolgens in de vergelijking (2) over, dan verkrijgen wij, na behoorlijke herleiding,

$$x^2 + 2\,\frac{(pb'-qa')(q-p\,Cos.\,\delta)}{p^2-2pq\,Cos.\,\delta+q^2}\,x + \frac{(pb'-qa')^2 - p^2(a+b)^2}{p^2-2pq\,Cos.\,\delta+q^2} = 0,$$

$$y^2 + 2\,\frac{(qa'-pb')(p-q\,Cos.\,\delta)}{p^2-2pq\,Cos.\,\delta+q^2}\,y + \frac{(qa'-pb')^2 - q^2(a+b)^2}{p^2-2pq\,Cos\,\delta+q^2} = 0,$$

en deze vergelijkingen oplosfende, zullen wij vinden

$$x = \frac{(qa'-pb')(q-p\,Cos.\,\delta) \pm p\sqrt{\{(a+b)^2(p^2-2pq\,Cos.\,\delta+q^2)-(qa'-pb')^2\,Sin.^2\,\delta\}}}{p^2-2pq\,Cos.\,\delta+q^2}$$

$$y = \frac{(pb'-qa')(p-q\,Cos.\,\delta) \pm q\sqrt{\{(a+b)^2(p^2-2pq\,Cos\,\delta+q^2)-(pb'-qa')^2\,Sin.^2\,\delta\}}}{p^2-2pq\,Cos.\,\delta+q^2}$$

en wij zouden deze laatfte ook uit de eerfte verkregen hebben door middel van de vergelijking $y = \frac{qx + pb' - qa'}{p}$.

Het dubbele teeken, dat in de waarde van x en y voorkomt, toont aan, dat ons vraagftuk, wanneer het niet onmogelijk is, twee oplosfingen toelaat, en de figuur bevestigt dit; want de middelpunten kunnen ook in Q′ en P′ liggen, waarbij AP : BQ = AP′ : BQ′ en P′Q′ = PQ is.

Het is verder klaar, dat ons vraagftuk onder fommige omftandigheden onmogelijk kan worden; bewoog, bij voorbeeld, het ligchaam A zeer fnel ten opzigte van het ligchaam B, dan kan het ligchaam A het punt C zijn voorbijgegaan, lang voordat het ligchaam B zich in dit punt bevond. De omftandigheden, waaronder dit plaats heeft, zijn gemakkelijk uit onze oplosfing op te maken; want het is duidelijk in te zien, dat x en y beide onbeftaanbaar worden, zoodra

$$(pb'-qa')\,Sin.\,\delta > (a+b)\sqrt{(p^2-2pq\,Cos.\,\delta+q^2)}$$

wordt, dat is zoodra

$$a+b < \frac{(pb'-qa')\,Sin.\,\delta}{\sqrt{(p^2-2pq\,Cos.\,\delta+q^2)}},$$

mogt zijn.

Wil men de omftandigheden nagaan, onder welke er flechts eene oplosfing plaats heeft, dan behoeft men alleen de grootheid onder het wortelteeken gelijk 0 te ftellen; men zal vinden, dat, om hieraan te voldoen, voor de fom der ftralen zal moeten worden genomen

$$a+b = \frac{(pb'-qa')\,Sin.\,\delta}{\sqrt{(p^2-2qp\,Cos.\,\delta+q^2)}},$$

maar

maar wil men de ſtralen als bekend aanzien, en de betrekking der ſnelheden zoodanig bepalen, dat aan het opgegeven vereischte voldaan wordt, dan komt men neder op de vergelijking

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 - 2.\frac{(a+b)^2 - 2a'b'\,Sin^2.\,\delta}{(a+b)^2 - b'^2\,Sin^2.\,\delta}.\frac{p}{q} + \frac{(a+b)^2 - a'^2\,Sin^2.\,\delta}{(a+b)^2 - b'^2\,Sin^2.\,\delta} = 0,$$

Onderſtellen wij, bij de oploſſing van ons vraagſtuk, dat de ſnelheden gelijk zijn, dan verkrijgen wij, door $p = q$ te ſtellen,

$$x = \tfrac{1}{2}(a' - b') \pm \frac{V((a+b)^2 - (a'-b')^2\,Cos^2.\,\tfrac{1}{2}\delta)}{2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\delta},$$

$$y = \tfrac{1}{2}(b' - a') \pm \frac{V((a+b)^2 - (a'-b')^2\,Cos^2\,\tfrac{1}{2}\delta)}{2\,Sin.\,\tfrac{1}{2}\delta},$$

en zal er in dit geval ſlechts een antwoord beſtaan, dan moet $(a+b) = (a'-b')\,Cos.\,\tfrac{1}{2}\delta$ genomen worden, en dan zal $x = \tfrac{1}{2}(a'-b')$ en $y = \tfrac{1}{2}(b'-a')$ zijn.

Stellen wij eindelijk, dat de ſnelheden even groot zijn, en bovendien $a' = b'$ of, AC = BC is, dan verkrijgen wij $x = y = \pm \frac{a+b}{2\,Sin.\,\frac{1}{2}\delta}$, hetgeen ook uit den aard der zaak klaar is.

Opmerkelijk is nog het geval, waarin de rigtingen der beweging elkander loodregt ſnijden. Voor dit geval is $\delta = 90°$, dus $Sin.\,\delta = 1$ en $Cos.\,\delta = 0$, waardoor wij voor de waarden van x en y vinden:

$$x = \frac{(qa'-pb')q \pm pV\{(a+b)^2(p^2+q^2) - (qa'-pb')^2\}}{p^2+q^2},$$

$$y = \frac{(pb'-qa')p \pm qV\{(a+b)^2(p^2+q^2) - (pb'-qa')^2\}}{p^2+q^2},$$

waaruit nu wederom gemakkelijk de formulen voor $p = q$ of $a' = b'$ worden afgeleid.

Eindelijk merken wij nog op, dat in geene onzer formulen a of b afzonderlijk voorkomen, maar alleen derzelver ſom. Of dus de ſtralen der bollen veranderen, zal dit, zoo lang derzelver ſom ſtandvastig blijft, geene verandering in de waarden van x en y te weeg brengen.

Het éénigſte geval, waarin de formulen, die wij voor x en y gevonden hebben, niet gebruikt kunnen worden, is dat, waarin

de

de rigtingen der beweging met elkander evenwijdig loopen; omdat in dit geval a' en b' beide oneindig zijn. Wij zullen alzoo bijzondere formulen voor dit geval moeten opſpeuren. Stellen wij hiertoe *Fig.* 84, AB $= m$, ∠ ABQ $= \beta$, AP $= u$ en BQ $= v$, dan is, BE loodregt op XX′ trekkende, BE $= m\ Sin.\beta$ en AE $= m\ Cos.\ \beta$. Trekkende vervolgens QS loodregt op XX′, dan is PS $=$ PE $-$ QB $= u + m\ Cos.\ \beta - v$ en SQ $=$ BE $= m\ Sin.\ \beta$. Maar in den regthoekigen driehoek PQS is

$$PS^2 = PQ^2 - QS^2,$$

en brengende hierin de geſtelde en gevondene waarden over, dan verkrijgen wij, na den vierkantswortel getrokken te hebben,

$$u + m\ Cos.\beta - v = \pm\sqrt{((a+b)^2 - m^2\ Sin^2.\beta)},$$

waaruit $\quad u - v = -m\ Cos.\beta \pm \sqrt{((a+b)^2 - m^2\ Sin^2.\beta)}.$

Maar wij hebben bovendien uit den aard des vraagſtuks

$$\frac{u}{v} = \frac{p}{q},$$

en uit deze vergelijkingen vinden wij gemakkelijk

$$v = \frac{q}{p-q}\left\{-m\ Cos.\beta \pm \sqrt{((a+b)^2 - m^2\ Sin^2.\beta)}\right\},$$

$$u = \frac{p}{p-q}\left\{-m\ Cos.\beta \pm \sqrt{((a+b)^2 - m^2\ Sin^2.\beta)}\right\},$$

Wij zullen in geene bijzondere aanmerkingen over deze twee laatſte formulen treden, daar dezelve grootſtendeels eene herhaling zouden zijn van die, welke wij op het algemeene geval hebben gemaakt. Alleen merken wij op, dat het ſlechts tot bekorting der berekeningen is, dat wij voor het geval der evenwijdige rigtingen eenen bijzonderen weg zijn ingeſlagen. Men had namelijk in de eerſte figuur a', b' en δ in m, α en β kunnen uitdrukken, en dan zouden wij x en y mede in m, α en β uitgedrukt gevonden hebben. Verder had men uit de waarden van x en y die voor $u = a' - x$ en $v = b' - y$ in m, α en β uitgedrukt kunnen vinden, en het zou dan voldoende geweest zijn $\alpha = 180° - \beta$ te ſtellen, om de formulen voor u en v in het geval der evenwijdige rigtingen te bekomen.

CXLVII. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Wanneer is de driehoek, welke in eene der kegelsneden gevormd wordt, door den voerstraal, de ordinaat en de as, een maximum of minimum?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, R. VAN WIJK Jz. en W. TOP Wz.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Laat AK, *Fig.* 85, eenig gedeelte van eene der kegelsneden wezen, AR de as en F het brandpunt, waaruit wij de voerstralen onderstellen getrokken te zijn, indien wij dan $AP = x$ en $MP = y$ stellen, dan is de algemeene vergelijking voor de drie kegelsneden $y^2 = px + qx^2$, waarin p de parameter verbeeldt en q het quotient van de groote of eerste as in de parameter is. Deze vergelijking zal verder tot de hyperbool, parabool of ellips behooren, naarmate q positief, nul of negatief is.

Stellen wij verder den afstand van den top tot het brandpunt m, dan is $FP = x - m$, en $MP = \sqrt{(px + qx^2)}$, waardoor $\triangle\ FPM = \frac{1}{2}(x - m)\sqrt{(px + qx^2)}$, en bij gevolg moet de functie

$$X = (x - m)\sqrt{(px + qx^2)},$$

een maximum of minimum wezen.

Nu is

$$\frac{\delta X}{\delta x} = \sqrt{(px + qx^2)} + \frac{(x - m)(p + 2qx)}{2\sqrt{(px + qx^2)}};$$

stellen wij alzoo deze uitdrukking gelijk o, dan verkrijgen wij

$$2(px + qx^2) = (m - x)(p + 2qx),$$

of ontwikkelende en herleidende

$$x^2 + \frac{3p - 2mq}{4q}x = \frac{mp}{4q},$$

waaruit $x = \frac{2mq - 3p}{8q} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{3p - 2mq}{8q}\right)^2 + \frac{mp}{4q}\right\}}.$

In deze uitdrukking is nu m afhankelijk van p en q, want voor $x = m$ moet $y = \frac{1}{2}p$ zijn. Dit geeft ons

$$\tfrac{1}{4}p^2 = pm + qm^2,$$

waar

waaruit $m = \frac{p}{2q}(-1 \pm \sqrt{(1+q)})$;

Daar wij hier echter door m den kleinsten der twee afstanden bedoelen, dien de top van de twee brandpunten heeft; zoo is

$$m = \frac{p}{2q}(-1 + \sqrt{(1+q)});$$

en brengen wij deze waarde van m in de formule voor x over, dan verkrijgen wij voor de waarden van x, die met de gevraagde maxima of minima overeenkomen,

$$x = \tfrac{1}{8} \cdot \frac{p}{q} \left\{-4 + \sqrt{(1+q)} \pm \sqrt{(9+q)}\right\}.$$

Om nu te onderzoeken, of deze gevondene waarden van x werkelijk maxima of minima aanwijzen, zouden wij de tweede differentiaal-coefficient te hulp moeten roepen: Het is echter in de bijzondere gevallen zoo gemakkelijk uit de figuur op te maken, hoe het met deze zaak gelegen is, dat wij het niet noodig achten, tot deze tweede differentialen toevlugt te nemen.

Stellen wij dan vooreerst, dat de kromme eene parabool is. In dit geval is $q = 0$ en dit doet de waarde van x overgaan in $\infty \times (-3 \pm 3)$; de tweede dezer waarden is klaarblijkelijk oneindig, doch de eerste is $\infty \times 0$, en om deze waarde nader te bepalen, schrijven wij de waarde van x, waaruit deze onbepaalde uitdrukking is voortgekomen, onder den vorm

$$x = \tfrac{1}{8} p \cdot \frac{-4 + \sqrt{(1+q)} + \sqrt{(9+q)}}{q},$$

en het komt er dan alleen op aan te bepalen, waarin de laatste factor overgaat, als $q = 0$ genomen wordt. Differentieren wij te dien einde teller en noemer van dezen factor ten opzigte van q, en deelen wij onder en boven door dq, dan komt er, na $q = 0$ gesteld te hebben, $\frac{2}{3}$; waaruit volgt, dat de gevraagde waarde van x voor de parabool is $x = \frac{1}{8} p \times \frac{2}{3}$ of $x = \frac{1}{12} p$. Nemende alzoo, *Fig.* 86, AP $= \frac{1}{3}$ AF, dan zal FMP de begeerde driehoek wezen, welke nu, grooter dan de naastvoorgaande en volgende zijnde, een maximum is, en het is klaar, dat er in de parabool voor geene andere waarde van x een maximum of minimum bestaan kan; want, offchoon $x =$ AF $= \frac{1}{4} p$ nemende, de inhoud van onze driehoek gelijk nul wordt, zoo is dit geen minimum, omdat voor de punten, welke het punt Q on-

onmiddellijk voorafgaan en volgen, MP hetzelfde teeken behoudt, maar FP van teeken verandert: zoodat de inhoud van den driehoek hierdoor van den positieven in den negatieven toestand overgaat. Valt M in A, dan is de inhoud van driehoek FMP mede gelijk nul, maar omdat voor het voorgaande en volgende punt MP van teeken verandert, zonder dat FP eenige verandering van teeken ondergaat, en dus de driehoek wederom van den positieven in den negatieven toestand overgaat, heeft er ook hier geen minimum plaats.

Is de kromme eene hyperbool, dan blijft de vergelijking $y^2 = px + qx^2$, en de gevondene waarde van x ondergaat geene verandering. Daar nu, de halve asfen a en b stellende, $p = \frac{2b^2}{a}$ en $q = \frac{b^2}{a^2}$ is, gaat voor de hyperbool de waarde van x, die met de maxima of minima overeenkomt, over in

$$x = -a + \tfrac{1}{4}\sqrt{(a^2 + b^2)} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{(9a^2 + b^2)}.$$

De figuur 87 toont echter ten duidelijkste aan, dat er slechts een maximum bij M kan plaats hebben, en daar $x = -a$ het middelpunt C aanduidt, zal $\frac{1}{4}\sqrt{(a^2 + b^2)} \pm \frac{1}{4}\sqrt{(9a^2 + b^2)}$ de waarde van CP voorstellen; maar CF is gelijk aan $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ en dus is CP $= \frac{1}{4}$ CF $\pm \frac{1}{4}\sqrt{(9a^2 + b^2)} =$ CD + DP, en hieruit volgt, dat wij het bovenste teeken moeten gebruiken. Nemende dus CD $= \frac{1}{4}$ CF en DP $= \frac{1}{4}\sqrt{(9a^2 + b^2)}$, dan zal FMP het gevraagde maximum zijn.

Is eindelijk de kromme eene ellips, dan is q negatief, en bij gevolg

$$x = \tfrac{1}{8}\,\frac{p}{q}\left\{4 - \sqrt{(1 - q)} \pm \sqrt{(9 - q)}\right\};$$

stellende nu de halve asfen a en b, dan is wederom $p = \frac{2b^2}{a}$,

$q = \frac{b^2}{a^2}$ en $\frac{p}{q} = 2a$, zoodat

$$x = a - \tfrac{1}{4}\sqrt{(a^2 - b^2)} \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{(9a^2 - b^2)}.$$

Raadplegen wij nu wederom de figuur 88, dan is het duidelijk, dat er in dit laatste geval twee verschillende maxima voor driehoek FMP bestaan, namelijk FMP en FM′P′, van welke wij echter de eerste, ingevolge de aanmerkingen op de parabool gemaakt, als eene grootste negatieve waarde en dus als een minimum moeten be-

beschouwen. De constructie der punten P en P′ is volmaakt overeenkomstig met die voor de hyperbool. Maken wij namelijk CD = ¼ CF en nemen wij DP = DP′ = $\frac{1}{4}\sqrt{(9a^2 - b^2)}$, dan zullen hierdoor de punten P en P′ bepaald zijn; want dan is, AP′ = AC — CD + DP′ en AP = AC — CD — DP; en daar AC = a, CD = ¼ CF = $\frac{1}{4}\sqrt{(a^2 - b^2)}$ en DP′ = DP = $\frac{1}{4}\sqrt{(9a^2 - b^2)}$ is, zoo hebben wij

$$AP' = a - \tfrac{1}{4}\sqrt{(a^2 - b^2)} + \tfrac{1}{4}\sqrt{(9a^2 - b^2)},$$
$$AP = a - \tfrac{1}{4}\sqrt{(a^2 - b^2)} - \tfrac{1}{4}\sqrt{(9a^2 - b^2)}.$$

CXLVIII. Voorstel.

Door I. R. Schmidt.

Men vraagt te bewijzen, dat de projectie van eene der kegelsneden, naar welgevallen, op een willekeurig plat vlak, altijd eene gelijksoortige kegelsnede is, en omgekeerd.

Oplossing. *Door* I. R. Schmidt.

Nemen wij aan, dat XAX, *Fig.* 89, eenig gedeelte is van eene kegelsnede; welke in X′A′X′ op het vlak UV is geprojecteerd; dan moeten wij bewijzen, dat X′A′X′ mede eene kegelsnede is van dezelfde soort als XAX.

Trekken wij in de kegelsnede XAX twee willekeurige, maar evenwijdige lijnen Nn en Mm, en deelen wij dezelve midden door in Q en P, dan zal de lijn TA, die door deze deelpunten gaat, eene middellijn van de kegelsnede XAX wezen; stellen wij alzoo AP = x en PM = y, dan zullen wij hebben

$$y^2 = px + qx^2, \quad \ldots \ldots (1)$$

waarin q positief, nul of negatief zal zijn, naarmate de kegelsnede eene hyperbool, parabool of ellips is.

Brengen wij nu door Nn, Mm en TA vlakken, loodregt op het vlak van projectie UV, dan zullen vooreerst de evenwijdige vlakken, die door Mm en Nn gebragt zijn, het vlak UV volgens evenwijdige lijnen M′m′ en N′n′ doorsnijden. Omdat verder NQ = Qn en MP = Pm is, zal ook N′Q′ = Q′n′ en M′P′ = P′m′ wezen. Hieruit volgt dus, dat, welke kromme lijn de projectie X′A′X′ dan ook zijn moge, de projectie van de middellijn AT, al de evenwijdige lijnen N′n′, M′m′, enz. mid-

midden door zal deelen. De lijn $A'T'$ is dus eene middellijn van de kromme $X'AX'$.

Onderstellen wij voorts, dat KL de doorsnijding is van het vlak der kegelsnede XAX met het vlak UV van projectie, dan zullen de punten B, C en D, waarin het verlengde van de lijnen Nn en $N'n'$, Mm en $M'm'$, TA en $T'A'$ elkander snijden, alle in deze lijn KL gelegen zijn, en de hoeken NBN', MCM', *enz.* zullen, als door onderling evenwijdige beenen gevormd, alle even groot zijn. Wij stellen alzoo $\angle NBN' = \angle MCM' =$ *enz.* $= \alpha$ en $\angle TDT' = \beta$.

Om dan de vergelijking der projectie $X'A'X'$ te vinden, stellen wij $A'P' = x'$ en $P'M' = P'm' = y'$, en dan is het uit de figuur duidelijk genoeg in te zien, dat wij overal zullen hebben

$$y' = y \; Cos.\, \alpha \qquad \text{en} \qquad x' = x \; Cos.\, \beta \; . \; . \; (2)$$

waaruit

$$y = \frac{y'}{Cos.\, \alpha} \qquad \text{en} \qquad x = \frac{x'}{Cos.\, \beta} \; . \; . \; . \; (3)$$

brengen wij alzoo deze waarden van y en x over in de vergelijking (1), dan komt er voor de vergelijking tusschen x' en y'; dat is, voor de vergelijking der projectie $X'A'X'$

$$\frac{y'^2}{Cos^2.\, \alpha} = p \cdot \frac{x'}{Cos.\, \beta} + q \cdot \frac{x'^2}{Cos^2.\, \beta};$$

of

$$y'^2 = \frac{p \; Cos^2.\, \alpha}{Cos.\, \beta} x' + \frac{q \; Cos^2.\, \alpha}{Cos^2.\, \beta} x'^2;$$

dat is, wanneer wij $\frac{p \; Cos^2.\, \alpha}{Cos \; \beta} = p'$ en $\frac{q \; Cos^2.\, \alpha}{Cos^2.\, \beta} = q'$ stellen

$$y'^2 = p'x' + q'x'^2,$$

en daar dit de algemeene vergelijking der kegelsneden is; zoo volgt hieruit, *dat de projectie van eene kegelsnede op een willekeurig vlak wederom eene kegelsnede is.*

Omdat $q' = q \times \frac{Cos^2.\, \alpha}{Cos^2.\, \beta}$ en $\frac{Cos^2.\, \alpha}{Cos^2.\, \beta}$ altijd positief is; zoo zullen q' en q altijd hetzelfde teeken hebben, en daar de soort der kegelsneden alleen van het teeken van q afhangt, zoo volgt hieruit, *dat eene kegelsnede en derzelver projectie op een plat vlak altijd gelijksoortig zijn.*

Het omgekeerde van de nu bewezene stelling is een noodzakelijk gevolg van dezelve. Is namelijk de kromme $X'A'X'$ eene kegelsnede, waarvan $y'^2 = p'x' + q'x'^2$ de vergelijking is;

dan verkrijgen wij, door in deze vergelijking de waarden van x' en y, die wij in (2) gevonden hebben, over te brengen, voor de kromme XAX de vergelijking

$$y^2 \, Cos^2. \, \alpha = p'x \, Cos. \, \beta + q'x^2 \, Cos^2. \, \beta,$$

of

$$y^2 = \frac{p' \, Cos. \, \beta}{Cos^2. \, \alpha} \, x + \frac{q' \, Cos^2 \, \beta}{Cos^2. \, \alpha} \, x^2,$$

welke door $\frac{p' \, Cos. \, \beta}{Cos^2. \, \alpha} = p$ en $\frac{q' \, Cos^2. \, \beta}{Cos^2. \, \alpha} = q$ te stellen, overgaat in

$$y^2 = px + qx^2,$$

waarin nu q en q' wederom hetzelfde teeken hebben, en dus gelijksoortige kegelsneden aanduiden.

CXLIX. VOORSTEL.

Door I. P. DELPRAT.

Twee overwelfde gangen van ongelijke breedte snijden elkander regthoekig door. De gewelven zijn gemaakt volgens halve ellipsen, waarvan de groote assen gelijk aan de breedten der gangen zijn, terwijl de kleine assen voor beide even groot zijn. De ruimte, welke beide de gangen gemeen hebben, heeft een' regthoek tot bazis; nu vraagt men de oppervlakte van het gewelf te vinden, dat juist boven den genoemden regthoek gelegen is? (*)

OPLOSSING. *Door* I. P. DELPRAT.

Zij, *Fig.* 90, de platte-grond-teekening der beide overwelfde gangen, die elkander regthoekig doorsnijden, zoodat de wijdte en strekking van den eersten gang door de evenwijdige lijnen A'B' en C'D' aangetoond wordt, terwijl de evenwijdige lijnen A''D'' en B''C'' hetzelfde voor den tweeden gang aantoonen. De regthoek ABCD is dan gemeen aan beide gangen, en de grootte van de oppervlakte des gewelfs boven ABCD is dan hetgeen, waarnaar gevraagd wordt. Laat nu verder de halve ellipsen F'G'H' en F''G''H'' diegene wezen, volgens welke de binnen-oppervlakten der gewelven gevormd zijn, zoodat deze oppervlakten voort- [illegible] ge-

(*) *Dit Voorstel is eene meer algemeene opgave van* Voorstel CLXXX, Deel I, *alwaar voor de halve ellipsen halve cirkels genomen zijn.*

gebragt worden, wanneer men deze halve ellipsen langs de lijnen A′B′ en D′C′, A″D″ en B″C″ doet bewegen, na dezelve eerst in verticale vlakken loodregt op A′B′ en A″D″ gesteld te hebben; het spreekt van zelf, dat de groote assen F′A′ en F″H″ ieder gelijk de breedte der gangen, en de beide halve kleine assen G′I′ en G″I″ dezer ellipsen naar welgevallen, doch even groot, genomen moeten worden.

De cilindervormige oppervlakken, door de beweging dezer twee halve ellipsen voortgebragt, snijden elkander volgens het beloop van twee kromme lijnen, voor welker projectie men gewoonlijk de diagonalen DB en AC van den regthoek ABCD neemt. Daar de waarheid hiervan ondertusschen niet terstond in het oog loopt, zullen wij vooraf bewijzen, dat de diagonalen DB en AC werkelijk de projectiën dezer twee doorsneden zijn.

Hiertoe nemen wij de twee verticale vlakken, gaande door de lijnen AB en AD, benevens het horizontale vlak ABCD, als de vlakken der coördinaten aan; waardoor dan AB de as van de x, AD de as van de y en de loodlijn uit A opgerigt de as van de z is. Deze vlakken snijden de ronde oppervlakte der gewelven volgens halve ellipsen, gelijk en gelijkvormig aan de aangenomene: Stellende dus, in de ellips H′F′G′, de halve groote as H′I′ $= a$ en de halve kleine as I′G′ $= b$, als mede in de ellips F″G″H″, de halve groote as F″I″ $= d$ en I″G″ $= b$; dan is de vergelijking der ronde oppervlakte van den eersten gang

$$z^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ay - y^2);$$

en de vergelijking der oppervlakte van den tweeden gang

$$z^2 = \frac{b^2}{d^2}(2dx - x^2).$$

Nu wordt de horizontale projectie van de doorsnede dezer twee oppervlakken, zoo als bekend is, gevonden door uit de bovenstaande vergelijkingen de waarde van z te elimineren; en men heeft dus terstond voor de vergelijking der projectie van de gezochte doorsnede

$$a^2(2dx - x^2) = d^2(2ay - y^2);$$

of

$$a^2(-2dx + x^2) = d^2(-2ay + y^2);$$

en tellende aan beide zijden $a^2 d^2$ op

$$a^2 (d - x)^2 = d^2 (a - y)^2,$$

of
$$a (d - x) = \pm d (a - y),$$

en hieruit volgen voor y deze twee verschillende waarden

$$y = \frac{a}{d} x \quad \text{of} \quad y = 2a - \frac{a}{d} x,$$

en dit zijn klaarblijkelijk niet anders dan de vergelijkingen van de lijnen AC en BD.

Daar de twee doorsneden van de oppervlakken der gangen regte lijnen tot projectie hebben, liggen zij in platte vlakken, die, loodregt op het horizontale vlak, door deze projectiën gaan; maar zij liggen tevens op de oppervlakken der cilindervormige gangen, en het zijn dus de doorsnijdingen van deze platte met deze cilindervlakken. Deze doorsneden zijn bij gevolg wederom halve ellipsen, (*) die de diagonalen AC en BD tot groote assen hebben, en waarvan de kleine as gelijk is aan die van de aangenomene ellipsen F′G′H′ en F″G″H″.

Dit nu vooraf bewezen hebbende, zoo merken wij verder op, dat de oppervlakte van het gewelf, boven den regthoek ABCD, uit vier onderscheidene stukken DEC, AEB, AED en BEC bestaat, welke door de verticale vlakken, boven de diagonalen AC en DB staande, van elkander worden afgescheiden; behoorende de twee stukken DEC en AEB tot de cilindervormige oppervlakte A″B″C″D″ en de twee stukken AED en BEC tot de cilindervormige oppervlakte A′B′C′D′. De oppervlakte van de twee stukken AEB en DEC kan men vinden, door van de geheele oppervlakte des cilinders, voortgebragt door de halve ellips F″G″H″, en begrepen tusschen de verticale vlakken door AB en DC gaande, af te trekken de oppervlakte van de gedeelten AED en BEC, welke van dezen cilinder, door de andere cilindervormige oppervlakte A′B′C′D′, bedekt worden.

Tot meerdere duidelijkheid, stelt figuur 91 het gedeelte ABCD van het gewelf A″B″C″D″ in perspectief voor; zijnde nu hierin CEB en DEA de gedeelten, die door het gewelf van den tweeden gang bedekt worden. Wij gaan dus over tot het berekenen

van

(*) Zie het bewijs van het onmiddellijk voorgaand *Voorstel*.

van deze gedeelten, ten einde dezelve van het geheele oppervlak ABCDE te kunnen aftrekken. Hiertoe laten wij uit E de loodlijn EE′ op het vlak ABCD neder, trekken de diagonalen AC en DB en laten door EE′ een vlak EGIE′ gaan, dat loodregt op BC ſtaat, en in *Fig.* 90 door de lijn EI wordt voorgeſteld. Dit vlak ſnijdt het cilindervormig oppervlak *Fig.* 91, volgens eene ellips EGI, gelijk en gelijkvormig aan de gegevene ellips F″G″H″ van *Fig.* 90, en waarvan de middelpuntsvergelijking is

$$z^2 = \frac{b^2}{d^2}(d^2 - x^2),$$

zijnde het klaar, dat men deze x niet moet verwarren met de x, die wij in den aanvang der oploſſing gebezigd hebben, daar dezelve nu de middelpunts-abscis beteekent.

Verder late men door een willekeurig punt K van de lijn EE′ een vlak KFH gaan, evenwijdig met het grondvlak ABCD; dit vlak ſnijdt de cilindervormige oppervlakte volgens eene regte lijn HF evenwijdig met BC, en bepaalt met de doorſnede *fh* van een tweede vlak *kfh*, evenwijdig aan het eerſte, op eenen afſtand ∂z van hetzelve getrokken, een trapezium *fh* HF op het cilindervormig oppervlak, hetwelk als de differentiaal der oppervlakte van het gedeelte CEB kan beſchouwd worden, en waarvan de inhoud gevonden wordt, door de lijn FH met de differentiaal Gg des boogs EGI te vermenigvuldigen. Wanneer men nu, in *Fig.* 90, de lijn EG gelijk maakt aan KG van *Fig.* 91, en verder FGH evenwijdig met BC trekt, dan zal FH gelijk wezen aan FH van *Fig.* 91; omdat FH van *Fig.* 91 evenwijdig aan het vlak ABCD zijnde, derzelver projectie op dit vlak even groot als de lijn zelve is, en, volgens het vroeger bewezene, deze projectie tusſchen de verticale vlakken, door de diagonalen gaande, bevat moet zijn.

Nu is in *Fig.* 90, FH : BC = EG : EI, of

$$\text{FH} : 2a = \text{KG } (\textit{Fig. } 91) : d,$$

dus
$$\text{FH} = \frac{2a}{d} \cdot \text{KG},$$

ſtellende dus E′K (*Fig.* 91) $= z$, en KG $= x$, dan is

$$\text{FH} = \frac{2a}{d} \cdot x,$$

 en

en bijgevolg de inhoud van het differentiaal-trapezium FHhf

$$FHhf = \frac{2a}{d}\, x \sqrt{(\delta x^2 + \delta z^2)}.$$

Daar nu $z^2 = \frac{b^2}{d^2}(d^2 - x^2)$ is, zoo heeft men

$$\sqrt{(\delta x^2 + \delta z^2)} = \delta x \,.\, \sqrt{\frac{(d^2 - x^2) + b^2 x^2}{d^2 (d^2 - x^2)}},$$

waardoor wij verkrijgen

$$\delta O = FHhf = \frac{2a}{d^2} \,.\, x\delta x \sqrt{\frac{d^2 (d^2 - x^2) + b^2 x^2}{d^2 - x^2}} \ldots (a)$$

wanneer wij namelijk het geheele oppervlak CED door O uitdrukken.

Ten einde deze uitdrukking gemakkelijk te integreren, stellen wij $d^2 - x^2 = u^2$, waardoor $x\delta x = -u\delta u$, en dit doet de vergelijking (a) overgaan in

$$\delta O = -\frac{2a}{d^2} \sqrt{(d^2 - b^2)} \times \delta u \sqrt{(u^2 + \frac{b^2 d^2}{d^2 - b^2})},$$

en dit volgens de gewone regels integrerende, vinden wij

$$O = -\frac{a}{d^2} \left\{ u \sqrt{\left\{(d^2 - b^2) u^2 + b^2 d^2\right\}} - \frac{b^2 d^2}{\sqrt{(d^2 - b^2)}} \ldots \right.$$

$$\left. Log. \left(-u + \sqrt{(u^2 + \frac{b^2 d^2}{d^2 - b^2})}\right)\right\} + C,$$

of wanneer wij voor u derzelver waarde $\sqrt{(d^2 - x^2)}$ in de plaats schrijven

$$O = -\frac{a}{d^2} \,.\, \sqrt{(d^2 - x^2)} \times \sqrt{\left\{(d^2 - x^2) d^2 + b^2 x^2\right\}} \ldots$$

$$+ \frac{ab^2}{\sqrt{(d^2 - b^2)}} Log. \left\{-\sqrt{(d^2 - x^2)} + \sqrt{\frac{(d^2 - x^2) d^2 + b^2 x^2}{d^2 - b^2}}\right\} + C$$

en wanneer wij deze integraal tusschen de limieten $x = 0$ en $x = d$ nemen, zoo verkrijgen wij voor de geheele oppervlakte ECB of AED van *Fig.* 91

$$O = a \left\{ d - \frac{b^2}{\sqrt{(d^2 - b^2)}}\, Log. \frac{d - \sqrt{(d^2 - b^2)}}{b} \right\} \ldots (\beta)$$

De geheele ronde oppervlakte DG″CBG′A is, volgens de algemeene formule voor het oppervlak van eenen regten willekeurigen cilinder, gelijk aan de volgende uitdrukking

opperv. DG″CBG′A = *omt.* DG″C × BC = 2 a × *omt.* DG″C,

en

en bijgevolg is de som der oppervlakken DEC en AEB van *Fig.* 91 gelijk aan de uitdrukking

$$DEC+AEB=2a\left\{omtr.DG''C-d+\frac{b^2}{\sqrt{(d^2-b^2)}}Log.\frac{d-\sqrt{(d^2-b^2)}}{b}\right\}(I)$$

zijnde DEC en AEB elk gelijk aan de helft van deze uitdrukking.

Het oppervlak der overeenkomstige deelen van den tweeden gang A'B'C'D' wordt volmaakt op dezelfde wijze berekend, en het is klaar, dat wij, in onze gevondene formule (I), hiertoe alleen a in d, d in a, en omtrek DG''C in omtrek F'G'H' zullen moeten veranderen, waardoor men verkrijgen zal

$$BEC+AED=2d\left\{omh.F'G'H'-a+\frac{b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}L.\frac{a-\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}\right\}(II)$$

en hieruit volgt dan eindelijk, door de som van (I) en (II) te nemen, voor het geheele gevraagde oppervlak

$$op.gew.=2a\left\{omtr.F''G''H''-d+\frac{b^2}{\sqrt{(d^2-b^2)}}Log.\frac{d-\sqrt{(d^2-b^2)}}{b}\right\}$$

$$+2d\left\{omtr\ F'G'H'-a+\frac{b^2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}Log.\frac{a-\sqrt{(a^2-b^2)}}{b}\right\}\ldots(III)$$

waarin de logarithmen de natuurlijke of neperiaansche logarithmen verbeelden.

Er blijft in deze formulen dan geene andere zwarigheid over, dan het berekenen der lengte van de halve ellipsen. Volgens Lacroix *calcul integral*, heeft men echter voor de lengte van de halve ellips, welke a en b tot halve groote en kleine as heeft, deze reeks

$$\pi a\left\{1-\frac{1.1}{2.2}\cdot\frac{a^2-b^2}{a^2}-\frac{1.1.1.3}{2.2\ 4.4}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^2-\frac{1.1.1.3.3.5}{2.2.4.4.6.6}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)^3-enz.\right\}.$$

en hierdoor is dus nu alles bepaald.

1°. Aanmerking. Het gewelf, waarvan wij het oppervlak hebben leeren vinden, draagt in de bouwkunst den naam van *kruisgewelf*, en is van een uitgestrekt gebruik. Een ander gewelf, *kloostergewelf* genaamd, en dat met het kruisgewelf in een naauw verband staat, is mede van veel gebruik, en deszelfs oppervlakte wordt zeer gemakkelijk door het voorgaande gevonden. Het kloostergewelf wordt namelijk dikwijls gebezigd, wanneer een regthoekig gebouw, door vier muren ingesloten, overwelfd moet

moet worden, bestaande zulk een gewelf alsdan uit cilindervormige oppervlakken, zoodanig, dat het kloostergewelf juist uit die gedeelten van de cilindervlakken bestaat, welke bij het kruisgewelf wegvallen. Het kloostergewelf verkrijgt alzoo eene gedaante, die in *Fig.* 92 perspectievisch is voorgesteld. In deze figuur zijn nu de oppervlakken BEC en DEA juist dezelfde, als die van *Fig.* 91, en welke uit den gang $A''B''C''D''$ van *Fig.* 90 uit het kruisgewelf wegvallen. Met de oppervlakken DEC en AEB van *Fig.* 92 is het even eens gelegen, zijnde deze de deelen van het gewelf van den gang $A'B'C'D'$, die bij het kruisgewelf wegvallen.

Daar nu de formule (β) de oppervlakte van het gedeelte BEC (*Fig.* 91 en 92) doet kennen, zoo is het klaar, dat de geheele oppervlakte van het kloostergewelf zal worden uitgedrukt door de formule

$$2a \left\{ d - \frac{b^2}{\sqrt{(d^2 - b^2)}} \, Log. \, \frac{d + \sqrt{(d^2 - b^2)}}{b} \right\} \ldots$$
$$+ \, 2d \left\{ a - \frac{b^2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \, Log. \, \frac{a + \sqrt{(a^2 - b^2)}}{b} \right\} \text{(IV)}$$

2°. Aanmerking. Wanneer men in de formule (I); $b = d = a$ stelt, dat is, wanneer men halve cirkels in plaats van halve ellipsen neemt, dan moet deze formule overgaan in die, gevonden door de oplossing van *Voorstel* CLXXX *Deel* I. Door deze substitutie gaat de formule (I) over in

$$a \left\{ 2a - a + \frac{a}{0} \, Log. \, 1 \right\} \ldots\ldots (\gamma)$$

en daar *Log.* $1 = 0$ is, wordt deze uitdrukking onbepaald.

Ten einde nu de wezenlijke waarde van de uitdrukking

$$\frac{b^2}{\sqrt{(d^2 - b^2)}} \, Log. \, \frac{d + \sqrt{(d^2 - b^2)}}{b}$$

voor het geval van $d = b$ te vinden, schrijve men dezelve onder den vorm

$$b^2 \times \frac{Log. \, (d + \sqrt{(d^2 - b^2)}) - Log. \, b}{\sqrt{(d^2 - b^2)}},$$

differentierende teller en noemer van den tweeden factor ten opzigte van d, dan kómt er, na door δd gedeeld en met $\sqrt{(d^2 - b^2)}$ en $d - \sqrt{(b^2 - d^2)}$ vermenigvuldigd te hebben,

V

$$\frac{\sqrt{(d^2-b^2)}-d}{d^2-d\sqrt{(d^2-b^2)}},$$

en ſtellende nu $d = b$, verkrijgen wij $-\frac{1}{b}$, hetgeen, met b^2 vermenigvuldigd, $-b$ of $-a$ voor $\frac{a}{0}$ *Log.* 1 geeft. (*)

De uitdrukking (γ) wordt alzoo

$$a(\pi a - 2a) = a^2(\pi - 2) = 1{,}1416\, a^2 \ldots (V)$$

waarmede de formule van gemeld voorſtel overeenkomt.

Stelt men in de formule (IV) $b = d = a$, dan vindt men, op dezelfde wijze handelende, voor het kloostergewelf de oppervlakte

$$4a^2 + 4a^2 = 8a^2,$$

hetwelk mede overeenkomt met de formule in genoemd voorſtel CLXXX gevonden.

CL.

(*) Men kan tot de waarde van $\frac{b^2}{\sqrt{(d^2-b^2)}}$ *Log.* $\frac{d-\sqrt{(d^2-b^2)}}{b}$ ook op deze wijze geraken. Men ſtelle $\frac{d-\sqrt{(d^2-b^2)}}{b} = \frac{1+x}{1-x}$, dan is

$$Log.\ \frac{d-\sqrt{(d^2-b^2)}}{b} = Log.\ \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + enz.\right),$$

of, omdat uit onze aangenomene ſtelling volgt $x = -\left(\frac{d-b}{d+b}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$Log.\ \frac{d-\sqrt{(d^2-b^2)}}{b} = -2\left\{\left(\frac{d-b}{d+b}\right)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{d-b}{d+b}\right)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{5}\left(\frac{d-b}{d+b}\right)^{\frac{5}{2}} + enz.\right\}$$

en vermenigvuldigende dit met $\frac{b^2}{\sqrt{(d^2-b^2)}}$ of $\frac{b^2}{(d-b)^{\frac{1}{2}}(d+b)^{\frac{1}{2}}}$.

$$\frac{b^2}{\sqrt{(d^2-b^2)}}.L.\frac{d-\sqrt{(d^2-b^2)}}{b} = -2b^2\left\{\frac{1}{d+b} + \tfrac{1}{3}.\frac{d-b}{(d+b)^2} + \tfrac{1}{5}.\frac{(d-b)^2}{(d+b)^3} + enz.\right\}$$

ſtelt men nu hierin $b = d$, zoo verdwijnen al de termen behalve de eerſte, en men vindt $-2b^2 \times \frac{1}{2b}$ of $-b$, even zoo als boven.

CL. VOORSTEL.

Door I. P. DELPRAT.

Hetzelfde als in het voorgaande Voorstel gegeven zijnde, vraagt men naar den inhoud van de ledige ruimte, welke deze beide gangen gemeen hebben.

OPGELOST *door* I. P. DELPRAT en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* I. P. DELPRAT.

De oplossing van het voorgaande Voorstel gelezen hebbende, zoo is die van dit Voorstel niet moeijelijk; want even zoo als de oppervlakte van de gedeelten DEC en AEB van het kruisgewelf gevonden worden, door van de geheele oppervlakte DG″CBG′A, *Fig.* 91, die van de stukken BEC en AED af te trekken, zoo wordt ook de inhoud van het stuk DEE′CD en AEE′BA gevonden, door van den inhoud des halven eliptischen cilinders, DG″CBG′A, den inhoud van de stukken BEE′C en DEE′A af te trekken. De differentiaal van het ligchaam BEE′A wordt klaarblijkelijk gevonden, door den inhoud van den driehoek FKH met de differentiaal Kk der hoogte EE′ te vermenigvuldigen, en wij hebben uit het voorgaand Voorstel

$$FH = \frac{2a}{d}x;\ KG = x,\ z^2 = \frac{b^2}{d^2}(d^2 - x^2) \text{ en } Kk = \delta z,$$

zoodat, den inhoud van het stuk BEE′A = I stellende,

$$\delta I = \frac{a}{d}x^2\,\delta z,$$

is; schrijven wij dus voor x^2 derzelver waarde in z uitgedrukt, dan komt er

$$\delta I = \frac{ad}{b^2}\left\{ b^2 - z^2 \right\}\delta z,$$

welke uitdrukking geïntegreerd geeft

$$I = \frac{ad}{b^2}\left(b^2 z - \tfrac{1}{3}z^3 + C\right).$$

Voor $z = 0$ moet $I = 0$ zijn, derhalve is $C = 0$, terwijl men door $z = b$ te stellen, voor den geheelen inhoud vindt

$$I = \tfrac{2}{3}\,adb \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Daar

Daar nu de inhoud van den halven cilinder DCBA $= \pi bda$ is, zoo vindt men voor den inhoud van het gedeelte DEE C, *Fig.* 91.

$$\textit{Inh.}\ DEE'C = \tfrac{1}{2}\pi bda - \tfrac{2}{3}bda = (\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{2}{3})\, bda = 0{,}9041 \,.\, bda \quad (2)$$

De inhoud van het ſtuk DCE, *Fig.* 90, van het kruisgewelf, wordt nu gevonden, door in (2) d in a en a in d te doen veranderen; daar dit echter geene verandering in deze formule te weeg brengt, zoo volgt hieruit vooreerst, dat de inhouden der ſtukken BEC, AEC, AED en DEC, *Fig.* 90, van het kruisgewelf, even groot zijn, offchoon, volgens het voorgaande vraagſtuk, hunne oppervlakten veel kunnen verſchillen, en ten tweede, dat de ruimte, onder het geheele kruisgewelf begrepen, wordt voorgeſteld door

$$(2\pi - \tfrac{8}{3})\, bda = 3{,}6164 \,.\, bda \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

waardoor het vraagſtuk is opgelost.

Aanmerkingen. Voor het kloostergewelf, waarvan in de voorgaande oplosſing geſproken is, wordt de inhoud van de ruimte, die door hetzelve wordt ingeſloten, gemakkelijk gevonden; want hiertoe hebben wij, ingevolge het vroeger gezegde, alleen de vergelijking (1) met 4 te vermenigvuldigen; waardoor wij voor den inhoud ABCDE, *Fig.* 92, zullen vinden,

$$\textit{Inh.}\ ABCDE = \tfrac{8}{3}\, bda \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Stelt men $a = b = d$, dan gaat de formule voor den inhoud van het kruisgewelf over in

$$I = 3{,}6164\, a^3,$$

en die voor het kloostergewelf in

$$I' = \tfrac{8}{3}\, a^3,$$

waarvan de laatſte overeenkomt met een derde van den cubus op het grondvlak.

De formulen voor den inhoud dezer gewelven kunnen dienen tot het vinden der hoeveelheid metſelwerk tot zulk een gewelf vereischt, wanneer deszelfs buitenſte oppervlakte gegeven is, dewijl men dan ſlechts de ruimte onder de buitenſte oppervlakte, en onder de binnenſte oppervlakte begrepen, door middel van onze formulen, te berekenen heeft, gevende het verſchil dezer inhouden alsdan blijkbaar de vereischte hoeveelheid metſelwerk.

CLI.

CLI. VOORSTEL.

Door M. B. JUNG.

Men vraagt vier getallen in eene rekenkunstige evenredigheid, zoodanig, dat de som der beide eerste termen is 80, *de som der beide laatste* 28, *en het product der beide middelste* 405? (31)

OPGELOST *door* R. VAN WIJK Jz., C. F. JULIUS, W. TOP Wz., M. B. JUNG, H. FOKKES BAKKER, A. VAN DER SWAN en G. J. SARLET.

OPLOSSING *van* R. VAN WIJK Jz.

Omdat de vier getallen eene rekenkunstige evenredigheid moeten uitmaken, stellen wij voor dezelve

$$x, \ x+y, \ z \ \text{en} \ z+y,$$

en dan hebben wij, volgens het Voorstel,

$$2x+y=80, \ 2z+y=28 \ \text{en} \ (x+y)z=405;$$

uit de twee eersten vinden wij

$$y=28-2z \quad \text{en} \quad x=\frac{80-y}{2}=26+z,$$

en substituerende deze waarden in de derde, komt er na herleiding

$$z^2-54z+405=0,$$

waaruit $z=45$ of $z=9$, en dit geeft ons $y=-62$ of $y=10$ en $x=71$ of $x=35$. Wij hebben dus twee rekenkunstige reeksen, die aan het vraagstuk voldoen, namelijk

$$71, \ 9, \ 45 \ \text{en} \ -17$$

of

$$35, \ 45, \ 9 \ \text{en} \ 19.$$

CLII. VOORSTEL.

Door M. B. JUNG.

Twee getallen te vinden, waarvan de som een quadraat is, dat het verschil der getallen tot wortel heeft; terwijl de som der vierkanten van de getallen mede een quadraat is, hebbende 35 *tot wortel.* (32)

Op-

(31) PRINSEN, *Algebra voor Scholen*, *bl.* 141. N°. 61.
(32) *Idem bl.* 138. N°. 54.

Opgelost *door* M. B. Jung, W. Top Wz., C. F. Julius, R. van Wijk Jz., A. van der Swan, B. Bekking, H. Forkes Bakker en G. J. Sarlet.

Oplossing *van* M. B. Jung.

Stel de getallen $x + y$ en $x - y$, dan is derzelver som $2x$, derzelver verschil $2y$ en de som der vierkanten $2x^2 + 2y^2$, zoodat wij, volgens het vraagstuk, deze twee vergelijkingen hebben

$$\sqrt{2x} = 2y \quad \text{en} \quad \sqrt{(2x^2 + 2y^2)} = a = 35.$$

Hiervan zijn de tweede magten

$$2x = 4y^2 \quad \text{en} \quad 2x^2 + 2y^2 = a^2,$$

of

$$x = 2y^2 \quad \text{en} \quad x^2 + y^2 = \tfrac{1}{2}a^2.$$

Uit de eerste is $y^2 = \frac{1}{2}x$, en brengende dit in de tweede, komt er

$$x^2 + \tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{2}a^2,$$

waaruit

$$x = -\tfrac{1}{4} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{2}a^2 + \tfrac{1}{16})},$$

of $a = 35$ nemende

$$x = -\tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{35^2}{2} + \frac{1}{16}\right)} = -\tfrac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9801}{16}},$$

dat is $x = -25$ of $x = 24\frac{1}{2}$.

De eerste waarde van x maakt $y = \frac{1}{2}\sqrt{2x}$ onbestaanbaar. Wij hebben alzoo alleen $x = 24\frac{1}{2}$, waaruit $y = \frac{1}{2}\sqrt{2x} = \pm\frac{7}{2}$, en deze beide waarden van y geven voor de gevraagde getallen 28 en 21.

CLIII. Voorstel.

Door R. van Wijk Jz.

Een getal bestaat uit twee factoren, waarvan de laatste gelijk is aan den wortel uit de som van tweemaal den eersten factor en de eenheid; verder is het verschil der quadraten van beide factoren gelijk aan de helft van den eersten factor. Men vraagt naar dit getal?

Opgelost *door* R. van Wijk Jz., A. van der Swan, C. F. Julius, H. Forkes Bakker en W. Top Wz.

Op-

OPLOSSING *van* R. VAN WIJK Jz.

Stel de factoren x en y, dan hebben wij de vergelijkingen

$$y = \sqrt{(2x+1)} \quad \text{en} \quad y^2 - x^2 = \tfrac{1}{2}x,$$

brengen wij de waarde van y uit de eerste in de tweede over, dan komt er

$$2x + 1 - x^2 = \tfrac{1}{2}x,$$

of

$$x^2 - \tfrac{3}{2}x - 1 = 0,$$

waaruit

$$x = \tfrac{3}{4} \pm \sqrt{\left(1 + \tfrac{9}{16}\right)},$$

dat is $x = 2$ of $x = -\tfrac{1}{2}$.

De tweede waarde van x maakt den tweeden factor y en dus het geheele getal gelijk 0; doch de eerste geeft $y = \sqrt{5}$, en dus is het getal $2\sqrt{5}$.

CLIV. VOORSTEL.

Door M. B. JUNG.

De Maatschappij: Tot Nut van het Algemeen, *is tot stand gekomen in een jaartal, geschreven met vier getalmerken, hetwelk de volgende eigenschappen heeft: de som der cijferletters van de duizend-, honderd- en tientallen maken een vierkant, waarvan de wortel gelijk is aan het cijfer der eenheden; de duizendtallen als tientallen en de honderdtallen als eenheden beschouwd, en bij dit getal het cijfer der tientallen van het gevraagde jaartal vergaard; komt er wederom een quadraat, waarvan de wortel gelijk is aan de som der cijfers van de duizendtallen en eenheden des gevraagden getals. Vervolgens is nog bekend, dat het product van de honderdtallen en eenheden, verminderd met het cijfer der duizendtallen, een cubus is, wiens wortel is 3. Men vraagt hierdoor het jaartal te bepalen?*

OPGELOST *door* R. VAN WIJK Jz., M. B. JUNG, A. VAN DER SWAN, G. J. SARLET, W. TOP Wz., C. F. JULIUS en H. FOEKES BAKKER.

OPLOSSING *van* R. VAN WIJK Jz.

Stellen wij voor het jaargetal

$$1000w + 100x + 10y + z,$$

dan

dan hebben wij, door de opgaaf van het vraagstuk, deze drie vergelijkingen

$$w + x + y = z^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$
$$10w + x + y = w^2 + 2wz + z^2 \; . \; . \quad (2)$$
$$xz - w = 27 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

en het voorstel zou dus onbepaald wezen, indien de getallen uit den aard der zaak niet aan de voorwaarde moesten voldoen, van geheel positief en niet grooter dan 9 te zijn. Deze voorwaarden nu in aanmerking nemende, hebben wij deze oplossing.

Het verschil der twee eerste vergelijkingen door w deelende, verkrijgen wij

$$9 = w + 2z \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

en hierbij de derde vergelijking optellende, komt er

$$36 = z\,(x + 2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Uit de vergelijking (4) vinden wij $z = \frac{9 - w}{2}$ en hierdoor geeft ons de vergelijking (5)

$$x = \frac{36}{z} - 2 = \frac{54 + 2w}{9 - w} \quad . \; . \; . \quad (6).$$

Nu geeft de vergelijking (4) ons reeds te kennen, dat w oneven moet zijn, want anders zou z geen geheel getal kunnen wezen. Wij hebben dus

$$w = 9, \quad 7, \quad 5, \quad 3, \quad \text{of} \quad 1;$$

maar uit de vergelijking (6) blijkt, dat hiermede overeenstemt

$$x = \infty, \quad 34, \quad 16, \quad 10, \quad \text{of} \quad 7;$$

doch x mag niet grooter dan 9 zijn, en wij hebben dus $w = 1$ en $x = 7$, waaruit verder volgt $z = \frac{9 - w}{2} = 4$ en $y = z^2 - (w + x) = 8$: zoodat het gevraagde jaartal 1784 is.

CLV. VOORSTEL.

Door B. BEKKING.

DIOPHANTES, *Schrijver van het oudste boek, dat ons over de Stelkunst is overgebleven, bragt* $\frac{1}{6}$ *van zijn leven door in zijne kindschheid en* $\frac{1}{12}$ *in zijne jongelingschap; vervolgens trad hij in het huwelijk, en eerst, nadat hij* $\frac{1}{7}$ *van zijn leven met nog* 5 *ja-*

ren

ren daarin had doorgebragt, werd hem een zoon geboren, die slechts de helft van den geheelen ouderdom zijns vaders bereikte, en door Diophantes *nog vier jaren overleefd werd. Hoe oud is dan* Diophantes *geworden?*

Opgelost *door* B. Bekking, R. van Wijk Jz., W. Top Wz., G. J. Sarlet, H. Foekes Bakker, A. van der Swan en C. F. Julius.

Oplossing *van* B. Bekking.

Stel dat Diophantes x jaren oud is geworden, dan is de tijd van zijne kindschheid geweest $\frac{1}{6}x$, die van zijne jongelingschap $\frac{1}{12}x$ en die, welken hij vóór de geboorte van zijnen zoon in het huwelijk heeft doorgebragt, $\frac{1}{7}x + 5$. De som hiervan, dat is $\frac{11}{28}x + 5$, van zijn' geheelen ouderdom x aftrekkende, blijft er voor den tijd, welken hij na de geboorte van zijn' zoon heeft geleefd, $\frac{17}{28}x - 5$, en daar hij zijn' zoon nog 4 jaren heeft overleefd, is dezelve $\frac{17}{28}x - 9$ jaren oud geworden. Nu moet dit de helft van den geheelen ouderdom van Diophantes uitmaken, en wij hebben dus de vergelijking $\frac{17}{28}x - 9 = \frac{1}{2}x$, of $\frac{3}{28}x = 9$; waaruit $x = 84$ jaren, voor den gevraagden ouderdom.

CLVI. Voorstel.

Door G. A. van Kerkwijk.

Door een punt in den omtrek van het grondvlak eens gegeven regten kegels een vlak te brengen, dat het oppervlak van den kegel volgens eene ellips doorsnijdt, en bovendien den kegel in twee gelijke deelen verdeelt?

Opgelost *door* G. A. van Kerkwijk, W. Top Wz., en R. van Wijk Jz.

Oplossing *van* G. A. van Kerkwijk.

Laat ABC, *Fig.* 93, het vlak voorstellen, dat door het gegeven punt A en de as van den kegel gaat, en stellen wij, dat ALDG het gevraagde elliptische vlak is, loodregt op het vlak ABC staande, en hetzelve volgens AD doorsnijdende. Indien wij dan den tophoek van den kegel ABC $= a$, de schuinsche zij-

zijde AB $= b$ en de standhoek der vlakken ALDG en AMCA, dat is DAC $= \phi$ stellen, dan hebben wij.

$$AK = b \; Sin. \tfrac{1}{2} a \quad \text{en} \quad BK = b \; Cos. \tfrac{1}{2} a,$$

dus $\quad Inh.\ keg.\ ABC = \tfrac{1}{8} b^3 \pi \; Sin^2. \tfrac{1}{2} a \; Cos. \tfrac{1}{2} a,$

Verder is $\quad \angle BAD = \angle BAC - \angle DAC = 90° - (\tfrac{1}{2}a + \phi),$

en $\quad \angle BDA = 90° - (\tfrac{1}{2}a - \phi);$

wij hebben dus in den driehoek ABD

$$Sin.\ BDA : Sin.\ ABD = AB : AD,$$

of $\quad Cos.\ (\tfrac{1}{2} a - \phi) : Sin.\ a = b : AD,$

waaruit $\quad AD = b \, . \, \dfrac{Sin.\ a}{Cos.\ (\tfrac{1}{2} a - \phi)},$

en in den driehoek AHD

$$Sin.\ AHD : Sin.\ HAD = AD : HD,$$

of $\quad Cos. \tfrac{1}{2} a : Cos. (\tfrac{1}{2}a + \phi) = b \, . \, \dfrac{Sin.\ a}{Cos.\ (\tfrac{1}{2} a - \phi)} : HD,$

waaruit $\quad HD = b \, . \, \dfrac{Sin.\ a \; Cos.\ (\tfrac{1}{2} a + \phi)}{Cos. \tfrac{1}{2} a \; Cos.\ (\tfrac{1}{2} a - \phi)},$

dat is $\quad HD = 2b \; Sin. \tfrac{1}{2} a \, . \, \dfrac{Cos.\ (\tfrac{1}{2} a + \phi)}{Cos.\ (\tfrac{1}{2} a - \phi)}.$

Laat ons nu door het midden E van AD een vlak evenwijdig aan het grondvlak gaan, dan is

$$EG^2 = FE \times EI,$$

maar FE $= \tfrac{1}{2}$ HD en EI $= \tfrac{1}{2}$ AC zijnde, geeft dit

$$EG^2 = \tfrac{1}{4}\ HD \times AC,$$

en dus $\quad GL^2 = HD \times AC,$

zoodat $\quad GL = \sqrt{AC \times HD}.$

Brengen wij dus hierin de waarden, die wij voor AC en HD gevonden hebben, dan komt er

$$GL = 2 \, b \; Sin. \tfrac{1}{2} a \sqrt{\frac{Cos.\ (\tfrac{1}{2} a + \phi)}{Cos.\ (\tfrac{1}{2} a - \phi)}}.$$

De groote en kleine as AD en GL van de ellips ALDG alzoo bepaald hebbende, verkrijgen wij voor derzelver inhoud

$$Inh.\ El.\ ALDG = \tfrac{1}{4} AD \times GL \, \pi = \tfrac{1}{2} \pi b^2 \frac{Sin.\ a \; Sin. \tfrac{1}{2} a}{Cos. (\tfrac{1}{2} a - \phi)} \sqrt{\frac{Cos.\ (\tfrac{1}{2} a + \phi)}{Cos.\ (\tfrac{1}{2} a - \phi)}},$$

en daar de loodlijn BN, die uit den top op het vlak van deze ellips valt, wordt uitgedrukt door

$$BN = AB \; Sin.\ BAD = b \; Cos.\ (\tfrac{1}{2} a + \phi),$$

zoo vinden wij voor den inhoud van den kegel, door het elliptisch vlak van den gegeven' kegel afgesneden,

$$Inh.\ Ligch.\ AGDLB = \tfrac{1}{3} . El.\ AGDL \times BN$$

$$= \tfrac{1}{6} \pi b^3 . Sin.\ a\ Sin.\ \tfrac{1}{2} a \left(\frac{Cos.\ (\tfrac{1}{2} a + \phi)}{Cos.\ (\tfrac{1}{2} a - \phi)}\right)^{\frac{3}{2}},$$

en daar deze inhoud gelijk moet zijn aan den halven inhoud van den gegeven' kegel, hebben wij de vergelijking

$$\tfrac{1}{6} \pi b^3 Sin\ a\, Sin\ \tfrac{1}{2} a \left(\frac{Cos. (\tfrac{1}{2} a + \phi)}{Cos. (\tfrac{1}{2} a - \phi)}\right)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{6} b^3 \pi\, Sin^2. \tfrac{1}{2} a\, Cos. \tfrac{1}{2} a,$$

of door $\tfrac{1}{6} \pi b^3$ *Sin. a Sin.* $\tfrac{1}{2}$ *a* deelende

$$\left\{\frac{Cos. (\tfrac{1}{2} a + \phi)}{Cos. (\tfrac{1}{2} a - \phi)}\right\}^{\frac{3}{2}} = \tfrac{1}{2},$$

dus
$$\frac{Cos. (\tfrac{1}{2} a + \phi)}{Cos. (\tfrac{1}{2} a - \phi)} = (\tfrac{1}{2})^{\frac{2}{3}} = \tfrac{1}{2} \sqrt[3]{2},$$

of
$$\frac{Cos. \tfrac{1}{2} a\ Cos. \phi - Sin. \tfrac{1}{2} a\ Sin. \phi}{Cos. \tfrac{1}{2} a\ Cos. \phi + Sin. \tfrac{1}{2} a\ Sin. \phi} = \tfrac{1}{2} \sqrt[3]{2},$$

dat is, onder en boven door *Cos.* $\tfrac{1}{2}$ *a Cos.* ϕ deelende,

$$\frac{1 - Tang. \tfrac{1}{2} a\ Tang. \phi}{1 + Tang. \tfrac{1}{2} a\ Tang. \phi} = \tfrac{1}{2} \sqrt[3]{2},$$

en lossen wij hieruit de waarde van *Tang.* ϕ op, dan komt er

$$Tang. \phi = \frac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt[3]{4} + 1} . Cot. \tfrac{1}{2} a,$$

waardoor het vraagstuk is opgelost.

CLVII. VOORSTEL.

Door G. A. VAN KERKWIJK.

Eenen gegeven' kegel zoodanig door een plat vlak te snijden, dat deszelfs oppervlak volgens eene parabool doorsneden wordt, en de inhoud des kegels hierdoor is midden doorgedeeld?

OPGELOST *door* G. A. VAN KERKWIJK en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* G. A. VAN KERKWIJK.

Zij ACB, *Fig.* 94, eene snede, door de as van den kegel gaande, en laat door eene lijn DE evenwijdig met AC een vlak gebragt worden loodregt op ABC, dan zal de doorsnede van dit

laat.

laatste vlak met het oppervlak van den kegel, zoo als genoegzaam bekend is, eene parabool zijn, en de vraag is alzoo, waar het punt E genomen moet worden, opdat deze parabool den kegel ABC midden door zal deelen?

Stellen wij hiertoe AB $= a$; AC $= b$ en BE $= x$, dan hebben wij in de gelijkvormige driehoeken BAC en BED

$$AC : AB = DE : EB,$$

of

$$b : a = DE : x,$$

waaruit

$$DE = \frac{b}{a}\, x;$$

maar wij hebben uit de eigenschap van den cirkel

$$ED = \sqrt{EB \times AE} = \sqrt{x\,(a - x)};$$

en bij gevolg vinden wij;

$$\textit{Inh. par.}\ DIK = \tfrac{4}{3}\, EI \times ED = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{b}{a}\, x \sqrt{x\,(a - x)}.$$

Stellen wij verder den inhoud van het ligchaam BIKD voor door V en stellen wij Ee $= \delta x$, dan is de ruimte begrepen tusschen de evenwijdige parabolen KID en kid, de differentiaal van het ligchaam BIKD; maar deze ruimte is gelijk aan de parabool KID, vermenigvuldigd met het loodlijntje Ef, dat uit E op het vlak kid valt, en wij hebben dus

$$\delta V = \textit{par.}\ KID \times Ef.$$

Daar wij nu boven den inhoud van parabool KID gevonden hebben en BF $=$ Ee . *Sin.* Eef $=$ Ee . *Sin.* BAC $=$ $\delta x \cdot \dfrac{\sqrt{(b^2 - \frac{1}{4}a^2)}}{b}$ is, zoo hebben wij

$$\delta V = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{b}{a}\, x \sqrt{x\,(a - x)} \times \frac{\delta x}{b} \sqrt{(b^2 - \tfrac{1}{4}a^2)};$$

waaruit

$$V = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{(b^2 - \frac{1}{4}a^2)}}{a} \int x\,\delta x \sqrt{x\,(a - x)},$$

en deze formule volgens de bekende regels integrerende

$$V = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{(b^2 - \frac{1}{4}a^2)}}{a} \left\{ \tfrac{1}{24}(8x^2 - 2ax - 3a^2)\sqrt{x(a - x)} - \tfrac{1}{8}a^3 B.T. \sqrt{\frac{a-x}{x}} \right\}$$
$$+ C.$$

Daar nu deze inhoud voor $x = 0$ moet verdwijnen, hebben wij

$$- \tfrac{1}{6}\, a^2 \sqrt{(b^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} \cdot \textit{Boog Tang.}\ \infty + C = 0;$$

waaruit

$$C = \tfrac{1}{12}\, a^2\, \pi \sqrt{(b^2 - \tfrac{1}{4}a^2)};$$

X 2 en

en de waarde van V wordt dus, na herleiding,

$$V = \tfrac{1}{18} \cdot \frac{\sqrt{(b^2 - \frac{1}{4}a^2)}}{a} (8x^2 - 2ax - 3a^2)\sqrt{x(a-x)} + \ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{a^2}{6}\sqrt{(b^2 - \tfrac{1}{4}a^2)}\left\{\tfrac{1}{2}\pi - \textit{Boog Tang.}\sqrt{\frac{a-x}{x}}\right\},$$

of, omdat $\frac{1}{2}\pi -$ *Boog Tang.* $z =$ *Boog Cot.* $z =$ *Boog Tang.* $\frac{1}{z}$ is,

$$V = \tfrac{1}{18} \cdot \frac{\sqrt{(b^2 - \frac{1}{4}a^2)}}{a}\left\{(8x^2 - 2ax - 3a^2)\sqrt{x(a-x)} + 3a^3 B\,T.\sqrt{\frac{x}{a-x}}\right\}.$$

Deze inhoud moet nu gelijk zijn aan den halven kegel, dat is, wij moeten ook hebben

$$V = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} a^2 \pi \sqrt{(b^2 - \tfrac{1}{4}a^2)};$$

ſtellende dus deze waarden aan elkander gelijk, en deelende door de gelijke factoren, komt er

$$(8x^2 - 2ax - 3a^2)\sqrt{x(a-x)} + 3a^3\,\textit{Boog Cot.}\sqrt{\frac{a-x}{x}} = \tfrac{3}{4}a^3\pi.$$

Welke vergelijking de waarde van x niet anders dan bij benadering kan doen kennen.

ANDERE OPLOSSING. *Door* R. VAN WIJK Jz.

Laat DFE, *Fig.* 95, de gevraagde doorſnede zijn, dan moet het ligchaam ACFDE gelijk wezen aan de helft van den gegeven kegel. Brengen wij nu door C en DE een plat vlak, dan wordt dit ligchaam in twee kegels ADEC en DEFC verdeeld, welke het ſegment ADE en de parabool DFE tot grondvlak en het punt C tot top hebben. Daar nu de inhoud van elk kegelvormig ligchaam gelijk is aan het grondvlak vermenigvuldigd met een derde van de hoogte, zoo geeft deze wijze van verdeelen ons terſtond

$$\tfrac{1}{3}CG \times \textit{ſegt.}\,ADE + \tfrac{1}{3}CK \times \textit{parab.}\,DEF = \tfrac{1}{6}CG \times AG^2\pi.$$

of $\quad CG \times \textit{ſegt.}\,ADE + CK \times \textit{parab.}\,DEF = \tfrac{1}{8}CG \times AB^2\pi$. (1)

Stellen wij nu AB $= a$, AC $= b$ en BH $= x$, dan is

$$DE = 2\sqrt{x(a-x)} \text{ en } HF = \frac{b}{a}x, \text{ waaruit}$$

$$\textit{parab.}\,DFE = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{b}{a} x\sqrt{x(a-x)}.$$

Stel-

Stellen wij verder den hoek DGE $= \phi$, dan is, volgens de bekende formule voor den inhoud van een cirkel-segment,

$$\textit{segt.}\ ADE = \tfrac{1}{2}\, AG^2 \cdot (\phi - \textit{Sin.}\ \phi),$$

maar AG $= \frac{1}{2} a$ en

$$\textit{Cos.}\ HEG = \textit{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\phi = \frac{HG}{GE} = \frac{x - \frac{1}{2}a}{\frac{1}{2}a} = \frac{2x - a}{a}$$

zijnde, hebben wij

$$\textit{Sin.}\ \phi = 2\ \textit{Sin.}\ \tfrac{1}{2}\phi\ \textit{Cos.}\ \tfrac{1}{2}\phi = \frac{4(2x-a)}{a^2}\sqrt{x(a-x)},$$

en

$$\phi = 2\ \textit{Boog Cos.}\ \frac{2x-a}{a} = 2\ \textit{Boog Tang.}\ \frac{2\sqrt{x(a-x)}}{2x-a},$$

dat is

$$\phi = 4\ \textit{Boog Tang.}\ \sqrt{\frac{a-x}{x}},$$

zoodat wij vinden

$$\textit{segt.}\ ADE = \tfrac{1}{8}a^2 \left\{ 4\ \textit{Boog Tang.}\ \sqrt{\frac{a-x}{x}} - \frac{4(2x-a)}{a^2}\sqrt{x(a-x)} \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}a^2 \left\{ -\frac{2x-a}{a^2}\sqrt{x(a-x)} + \textit{Boog Tang.}\ \sqrt{\frac{a-x}{x}} \right\}$$

brengende nu deze waarden over in de vergelijking (1), dan wordt dezelve

$$\tfrac{1}{2}a^2 \left\{ -\frac{2x-a}{a^2}\sqrt{x(a-x)} + \textit{BoogTang.}\sqrt{\frac{a-x}{x}} \right\} \times \sqrt{(b^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} + \ldots$$

$$\tfrac{4}{3} \cdot \frac{b}{a}\, x\sqrt{(a-x)}\, x \times CK = \tfrac{1}{8}a^2 \pi \cdot \sqrt{(b^2 - \tfrac{1}{4}a^2)} \ldots (2)$$

zoodat er, ter verkrijging van eene vergelijking voor de oplossing van ons voorstel, niet anders overblijft dan CK in x uit te drukken.

Hiertoe hebben wij nu

$$CK = HI = AH \cdot \textit{Sin.}\ CAG = AH \times \frac{GC}{CA} = (a-x) \times \frac{\sqrt{(b^2 - \frac{1}{4}a^2)}}{b}$$

en de vergelijking (2) wordt dus, na dezelve door $\sqrt{(b^2 - \frac{1}{4}a^2)}$ gedeeld te hebben,

$$\tfrac{1}{2}a^2 \left\{ -\frac{2x-a}{a^2}\sqrt{x(a-x)} + \textit{BoogTang.}\sqrt{\frac{a-x}{x}} \right\} + \tfrac{4}{3}\frac{1}{a}x(a-x)\sqrt{x(a-x)}$$

$$= \tfrac{1}{8}a^2 \pi,$$

of de overeenkomstige termen vereenigende,

$$(-8x^2 + 2ax + 3a^2)\sqrt{x(a-x)} + 3a^3\ \textit{Boog Tang.}\sqrt{\frac{a-x}{x}} = \tfrac{3}{4}a^3 \pi,$$

 dat

dat is; $(8x^2-2ax-3a^2)\sqrt{(a-x)x}-3a^3\,\text{BoogTang}\,\sqrt{\frac{a-x}{x}}=-\frac{3}{4}a^3\pi$,
welke, door aan beide zijden $\frac{3}{4}\,a^3\,\pi$ op te tellen, overgaat in

$$(8x^2-2ax-3a^2)\sqrt{(a-x)x}+3a^3\,\text{Boog Cot.}\sqrt{\frac{a-x}{x}}=\frac{3}{4}a^3\pi.$$

Aanmerking. *Door* I. R. Schmidt.

De twee bovenstaande oplossingen voeren tot eene zelfde vergelijking ter berekening voor x; doch daar dezelve transcendentaal is, zal het niet ondienstig zijn aan te wijzen, hoe men, door middel van deze vergelijking, x bij benadering kan vinden. Vooreerst merken wij op, dat b in onze vergelijking niet voorkomende, de waarde van x alleen van a afhangt, en dat x alzoo een bepaald gedeelte van a is; de vergelijking toont dit nog duidelijker hierdoor aan, dat wij, dezelve door a^3 deelende, verkrijgen

$$\left(\frac{8x^2}{a^2}-\frac{2x}{a}-3\right)\sqrt{\frac{x}{a}\left(1-\frac{x}{a}\right)}+3\,\text{Boog Cot.}\sqrt{\left(\frac{a}{x}-1\right)}=\frac{3}{4}\pi,$$

stellen wij dus $x=za$ of $\frac{x}{a}=z$, dan vinden wij

$$(8z^2-2z-3)\sqrt{z(1-z)}+3\,\text{Boog Cot.}\sqrt{\left(\frac{1}{z}-1\right)}=\frac{3}{4}\pi,$$

en indien wij dus z bij benadering kunnen vinden, zal $x=az$ de banaderde waarde van x zijn.

Stellen wij hiertoe $\text{Boog Cot.}\sqrt{\left(\frac{1}{z}-1\right)}=\psi$, dan is $\sqrt{\left(\frac{1}{z}-1\right)}=\text{Cot.}\,\psi$ en $\frac{1}{z}-1=\text{Cot}^2.\,\psi$, waaruit $\frac{1}{z}=\text{Cosec}^2.\,\psi$, en $z=\frac{1}{\text{Cosec}^2.\,\psi}=\text{Sin}^2.\,\psi$. Hieruit volgt verder $1-z=1-\text{Sin}^2.\,\psi=\text{Cos}^2.\,\psi$ en $\sqrt{z(1-z)}=\text{Sin}.\,\psi\,\text{Cos}.\,\psi$, waardoor dan onze vergelijking overgaat in

$$(8\,\text{Sin}^4.\,\psi-2\,\text{Sin}^2.\,\psi-3)\,\text{Sin}.\,\psi\,\text{Cos}.\,\psi+3\,\psi=\frac{3}{4}\pi,$$

en daar wij verder hebben $2\,\text{Sin}^2.\,\psi=1-\text{Cos}.\,2\,\psi$ en $\text{Sin}.\,\psi\,\text{Cos}.\,\psi=\frac{1}{2}\,\text{Sin}.\,2\,\psi$, in

$$(2\,\text{Cos}^2.\,2\,\psi-3\,\text{Cos}.\,2\,\psi-2)\,\text{Sin}.\,2\,\psi+6\,\psi=\frac{3}{2}\pi,$$

of $\psi=90^\circ-\omega$ stellende

$$(2\,\text{Cos}^2.\,2\,\omega+3\,\text{Cos}.\,2\,\omega-2)\,\text{Sin}.\,2\,\omega-6\,\omega+\frac{3}{2}\pi=0\,..\,(A)$$

Laat

Laat nu a eene benaderde waarde van 2ω wezen, zoodanig, dat $2\omega = a + \delta$ zijnde, δ als zeer klein kan worden ondersteld, dan zal men bij de benadering $Sin.\ \delta = \delta$ en $Cos.\ \delta = 1$ kunnen nemen, en men zal bovendien de hoogere magten van δ kunnen verwaarloozen, waardoor $Cos.\ 2\omega = Cos.\ a - \delta\ Sin.\ a$ en $Sin.\ 2\omega = Sin.\ a + \delta\ Cos.\ a$ zal worden, zoodat onze vergelijking zal overgaan in

$$\left.\begin{array}{l}(2Cos^2.a + 8Cos.a - 2)\,Sin.a - \delta\,Sin^2.a(4Cos.a + 3Sin.a) \\ \qquad - 3a + \tfrac{3}{2}\pi + \delta\,Cos.a(2Cos^2.a + 3Cos.a - 2) \\ \qquad - 3\delta\end{array}\right\} = 0$$

en hieruit δ oplossende, verkrijgen wij de benaderings-formule

$$\delta = \frac{(2\,Cos^2.a + 3\,Cos\,a - 2)\,Sin.a - 3a + \tfrac{3}{2}\pi}{Sin^2.a(4\,Cos.a + 3\,Sin.a) - Cos.a(2\,Cos^2.a + 3\,Cos.a - 2) + 3}.$$

Hierdoor alzoo, voor eene benaderde waarde $2\omega = a$, de waarde van δ verkregen hebbende, zal $2\omega' = a + \delta$ eene naauwkeuriger waarde van 2ω zijn, welke, voor a in de plaats gesteld, eene nieuwe waarde δ' zal doen kennen, die tot eene nog naauwkeuriger waarde $2\omega = a + \delta + \delta'$ aanleiding geeft, en hiermede zal men voort kunnen gaan, totdat men voor 2ω eene waarde verkrijgt, die de naauwkeurigheid heeft, welke men zich voorstelt te bereiken. Deze waarde van 2ω gevonden hebbende, zal de gevraagde waarde van x gemakkelijk uit dezelve worden afgeleid.

Daar het geenszins ons oogmerk is de opgegevene benadering wezenlijk te verrigten, laten wij dezelve aan den lezer over, en merken alleen op, dat daar $\omega = 30°$ het eerste lid van de vergelijking (A) gelijk $\tfrac{1}{2}\pi$ en $\omega = 45°$ dit eerste lid gelijk -2 maakt, 2ω tusschen $60°$ en $90°$ moet begrepen zijn. Men zal dus voor eene eerste benadering $a = \frac{60° + 90°}{2} = 75°$ kunnen nemen. Eindelijk is het duidelijk, dat ω niets anders is dan den hoek GBE, en dat a, π en δ in onze herleidings-formule niet in graden, maar in deelen van den straal moeten genomen worden.

CLVIII. Voorstel.

Door H. Foekes Bakker.

Er bevinden zich onder de deelers van een getal drie factoren, die eene rekenkunstige reeks uitmaken. Deelt men deze factoren, in rangorde van de grootste af, achtervolgens in dit getal, zoo hebben de komende quotienten de volgende eigenschappen: het vierkant van het middelste is gelijk aan de dubbele som der beide andere plus 4; en het verschil tusschen het grootste en kleinste is gelijk aan het middelste plus de helft van het kleinste. Welke zijn die quotienten?

Opgelost *door* C. F. Julius, H. Foekes Bakker, W. Top Wz. en R. van Wijk Jz.

Oplossing *van* C. F. Julius.

Omdat de drie factoren eene rekenkunstige reeks moeten uitmaken, nemen wij voor dezelve $x+y$, x en $x-y$. Stellen wij dan het getal z, zoo zijn de quotienten $\frac{z}{x+y}$, $\frac{z}{x}$ en $\frac{z}{x-y}$, en het voorstel geeft aanleiding tot deze twee vergelijkingen

$$\frac{z^2}{x^2} = \frac{2z}{x-y} + \frac{2z}{x+y} + 4 \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

en

$$\frac{z}{x-y} - \frac{z}{x+y} = \frac{z}{x} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{z}{x+y} \quad \ldots \ldots (2)$$

De tweede vergelijking kan aldus geschreven worden

$$\frac{z}{x-y} = \frac{z}{x} + \frac{3z}{2(x+y)}.$$

deelende nu dezelve door z en vermenigvuldigende met het product der noemers, dan verkrijgen wij

$$2x(x+y) = 2(x+y)(x-y) + 3x(x-y),$$

of $$2x^2 + 2xy = 2x^2 - 2y^2 + 3x^2 - 3xy,$$

dat is $$2y^2 + 5xy - 3x^2 = 0,$$

of wel $$(2y - x)(y + 3x) = 0,$$

aan welke vergelijking voldaan wordt door $2y - x = 0$ of $y + 3x = 0$, dat is, door $y = \frac{1}{2}x$ en door $y = -3x$ te nemen. Onderzoeken wij nu, wat er in deze beide gevallen plaats heeft.

1°. Als

1°. Als $y = -3x$ genomen wordt, dan gaat de eerste vergelijking over in

$$\frac{z^2}{x^2} = \frac{2z}{4x} - \frac{2z}{2x} + 4,$$

of $$z^2 + \tfrac{1}{2}zx = 4x^2,$$

waaruit $$z = \tfrac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{65})\,x,$$

zoodat $$x = \frac{4z}{-1 \pm \sqrt{65}}.$$

en $$y = -3x = -\frac{12z}{-1 \pm \sqrt{65}},$$

dus $$x + y = -\frac{8z}{-1 \pm \sqrt{65}},$$

en $$x - y = \frac{16z}{-1 \pm \sqrt{65}}.$$

De drie gevraagde quotienten zijn dus in dit geval

$$\frac{z}{x+y} = -\tfrac{1}{8}(-1 \pm \sqrt{65}),\ \frac{z}{x} = \tfrac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{65}),\ \frac{z}{x-y} = \tfrac{1}{16}(-1 \pm \sqrt{65}).$$

2°. Wordt daarentegen $y = \frac{1}{2}x$ genomen, dan verandert de eerste vergelijking, na alles met x^2 vermenigvuldigd te hebben, in

$$z^2 - 5\tfrac{1}{3}xz = 4x^2,$$

waaruit $$z = 6x \text{ of } z = -\tfrac{2}{3}x.$$

De tweede waarde geeft $x = -\frac{3}{2}z$ en $y = -\frac{3}{4}z$, waardoor de gevraagde quotienten worden

$$\frac{z}{x+y} = -\tfrac{4}{9},\ \frac{z}{x} = -\tfrac{2}{3} \text{ en } \frac{z}{x-y} = -\tfrac{4}{3}.$$

Het eerste antwoord $z = 6x$ geeft eindelijk $x = \frac{1}{6}z$ en $y = \frac{1}{12}z$, waardoor $x + y = \frac{3}{12}z$ en $x - y = \frac{1}{12}z$, hetgeen voor de gevraagde quotienten geeft

$$\frac{z}{x+y} = 4,\ \frac{z}{x} = 6 \text{ en } \frac{z}{x-y} = 12.$$

Dit is dus het eenigste geval, waarbij de gevraagde quotienten geheele positieve getallen worden, en men kan hierbij voor z elk geheel getal nemen, dat door 12 deelbaar is.

CLIX. VOORSTEL.

Door H. Foekes Bakker.

Zeker getal van drie cijferletters is het verschil tusschen twee andere getallen van drie cijfers, waarvan het eene het omgekeerde van het andere is. Het gevraagde getal heeft bovendien de volgende eigenschappen: het middelste cijfer is de som van de twee overige, en het driehoekig getal, dat het cijfer der eenheden tot wortel heeft, verminderd met het vierkant van het cijfer der honderdtallen en met den vierkantswortel uit het cijfer der tientallen, is gelijk aan den grootsten deeler, beneden 10, waardoor het gevraagde getal deelbaar is. Welk getal is dit?

Opgelost *door* W. Top Wz., R. van Wijk Jz., A. van der Swan, C. F. Julius en H. Foekes Bakker.

Stellen wij de twee getallen van drie cijfers, waarvan het gevraagde getal het verschil is, en waarvan het eene het omgekeerde van het andere moet zijn, voor door

$$100m + 10n + p \quad \text{en} \quad 100p + 10n + m,$$

dan zal de rest voor het gevraagde getal geven

$$99m - 99p,$$

of

$$9.11\,(m - p).$$

Hieruit volgt dan, *dat het gevraagde getal door 9 moet deelbaar zijn, en dat dus ook deszelfs grootste deeler, beneden 10, niet anders dan 9 kan zijn.*

Omdat het gevraagde getal door 9 deelbaar moet zijn, is ook de som der cijfers door 9 deelbaar; doch het middelste cijfer is, volgens de opgaaf, gelijk de som der beide uiterste, en hieruit volgt, dat de som der cijferletters gelijk tweemaal het middelste cijfer is. Het dubbel van het tweede cijfer alzoo door 9 deelbaar zijnde, moet ook dit tweede cijfer door 9 deelbaar wezen, en hieruit volgt, *dat het middelste cijfer van het gevraagde getal niet anders dan 9 kan zijn.*

Stellen wij alzoo het cijfer der honderdtallen gelijk x, dan zal dat der eenheden $9 - x$ zijn, en de laatste voorwaarde van het vraagstuk geeft de vergelijking

$$\frac{(9 - x)^2 + (9 - x)}{2} - x^2 - \sqrt{9} = 9,$$

of

of, na behoorlijke herleiding,

$$x^2 + 19x - 66 = 0,$$

waaruit $x = 3$ of $x = -22$. De tweede waarde van x kan ons echter niet dienen, omdat het aantal der honderdtallen noch negatief noch grooter dan 10 kan worden aangenomen. Wij behouden dus alleen $x = 3$ en het gevraagde getal is derhalve 396.

CLX. VOORSTEL.

Door H. FOEKES BAKKER.

Van eene meetkunstige reeks, waarvan de reden vier is, is de som der termen plus een derde van den eersten term, gelijk vijfmaal den derden term plus het vierkant der gemeene reden. Voorts is het vierkant des tweeden terms, verminderd met den cubus van den eersten term, gelijk 117. Men vraagt naar deze reeks?

OPGELOST *door* H. FOEKES BAKKER, A. VAN DER SWAN, G. J. SARLET, C. F. JULIUS en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* H. FOEKES BAKKER.

Stellen wij den eersten term x en het aantal termen n, dan is de n^e term $4^{n-1}x$ en de som der termen $\frac{4^n-1}{4-1}x$ of $\frac{1}{3}(4^n-1)x$. De bepalingen van het voorstel geven alzoo tot deze twee vergelijkingen aanleiding

$$\tfrac{1}{3}(4^n-1)x + \tfrac{1}{3}x = 5(4^2x) + 4^2$$

en

$$(4x)^2 - x^3 = 117.$$

Uit de tweede vergelijking hebben wij terstond

$$x^3 - 16x^2 + 117 = 0,$$

van welke vergelijking $x = 3$ de eenigste rationale wortel is. Nemende dan $x = 3$, zoo wordt hierdoor de eerste vergelijking

$$4^n = 5 \cdot 48 + 16 = 256 = 4^4,$$

waaruit $n = 4$. De gevraagde reeks is alzoo 3, 12, 48, 192.

CLXI. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Wanneer zal $x^m - x^n$ een maximum of minimum zijn, in de

de onderstelling, dat m en n geheele positieve getallen zijn, waarbij m grooter dan n is.

OPGELOST *door* W. TOP Wz. en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* W. TOP Wz.

Stellen wij de uitdrukking $x^m - x^n = y$, dan hebben wij voor de achtervolgende differentialen

$$\frac{\partial y}{\partial x} = mx^{m-1} - nx^{n-1},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m(m-1)x^{m-2} - n(n-1)x^{n-2},$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3} - n(n-1)(n-2)x^{n-3},$$

enz. *enz.*

Stellen wij nu het eerste differentiaal quotient $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, dan hebben wij

$$m\,x^{m-1} = nx^{n-1},$$

of

$$x^{m-n} = \frac{n}{m},$$

waaruit

$$x = \sqrt[m-n]{\frac{n}{m}}.$$

Deze waarde in het tweede differentiaal quotient substituerende, verkrijgen wij

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m(m-1)\sqrt[m-n]{\left(\frac{n}{m}\right)^{m-2}} - n(n-1)\sqrt[m-n]{\left(\frac{n}{m}\right)^{n-2}}.$$

Is nu m grooter dan n, dan zal deze laatste uitdrukking klaarblijkelijk positief zijn, en de gevondene waarde van x zal dan de opgegevene formule tot een minimum maken.

CLXII. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Van het gegeven veelhoekig getal 35 *is de wortel of zijde gelijk het aantal der hoeken. Vrage naar beide?*

OPGELOST *door* R. VAN WIJK Jz., W. TOP Wz., G. J. SARLET, H. FOKKES BAKKER en C. F. JULIUS.

OP-

OPLOSSING *van* R. VAN WIJK Jz.

Stellen wij het getal der hoeken n en den wortel x, dan is, volgens de bekende formule, het veelhoekig getal

$$\tfrac{1}{2} x \left\{(m - 2) x - (m - 4)\right\};$$

ſtellen wij alzoo, omdat hier de wortel gelijk het aantal der hoeken moet zijn $m = x$, dan wordt het veelhoekig getal

$$\tfrac{1}{2} x \left\{(x - 2) x - (x - 4)\right\},$$

en daar dit getal gelijk 35 moet wezen, hebben wij

$$\tfrac{1}{2} x \left\{x^2 - 3x + 4\right\} = 35,$$

of

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 70 = 0,$$

van welke vergelijking de wortels zijn $x = 5$ en $x = -1 \pm \sqrt{-13}$.

De twee laatſte wortels onbeſtaanbaar zijnde, hebben wij alleen $x = 5$, en 35 is dus het vijfde vijfhoekig getal.

CLXIII. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Men vraagt door een' gegeven' bol een plat vlak te brengen zoodanig, dat de bol, beſchreven in een der bolvormige ſegmenten, welke hierdoor ontſtaan, denzelfden inhoud hebbe, als het overſchietend bolvormig ſegment?

OPGELOST *door* W. TOP Wz. en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* W. TOP Wz.

Zij in *Fig.* 96, AB het platte vlak, dat den gegeven' bol AEBC in twee bolvormige ſegmenten verdeelt, en zij CD de middellijn van den bol, beſchreven in het bolvormig ſegment ACB, dan moet de inhoud van dezen bol gelijk zijn aan den inhoud van het andere bolvormige ſegment AEB. Stellen wij nu den ſtraal van den gegeven' bol AM = CM = r, en de hoogte van het overſchietend ſegment ED = x, dan is de inhoud van dit ſegment

$$\textit{bolv. ſegt.}\ AED = \tfrac{1}{3}\pi x^2 (3r - x).$$

Daar verder de middellijn van den bol, in het ſegment ACB be-

beschreven, gelijk is aan $2r - x$, zoo is de inhoud van dezen bol:

$$Inh.\ bol.\ CD = \frac{1}{6}\pi(2r - x)^3,$$

en deze twee inhouden aan elkander gelijk stellende; komt er

$$\frac{1}{3}\pi x^2(3r - x) = \frac{1}{6}\pi(2r - x)^3,$$

of $$2x^2(3r - x) = (2r - x)^3,$$

dat is $$x^3 - 16r^2x + 8r^3 = 0.$$

Stellen wij in deze vergelijking $x = 2zr$, dan gaat dezelve over in

$$z^3 - 4z + 1 = 0.$$

Deze vergelijking heeft drie bestaanbare wortels, namelijk een' tusschen 0 en 1, een' tusschen 1 en 2 en een' tusschen -2 en -3. Nemende echter z tusschen 1 en 2, dan zou x tusschen $2r$ en $4r$ vallen, hetgeen onmogelijk is, omdat x niet grooter dan $2r$ kan zijn. Evenmin kan de wortel tusschen -2 en -3 voldoen, want dezelve zou x negatief maken, en in dit geval zou het vlak den bol mede niet snijden. Er blijft dus alleen over, om den wortel tusschen 0 en 1 te benaderen; en hiervoor zullen wij ten naasten bij vinden $z = 0,254$, waardoor $x = 2rz = 0,508.r$, dat is ED = 0,508 . ME.

CLXIV. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Door eenen gegevenen bol een plat vlak zoodanig te brengen; dat het oppervlak van den bol, in een van de twee bolvormige segmenten beschreven, gelijk zij aan het gebogen oppervlak van het andere bolvormige segment?

OPGELOST *door* W. TOP Wz. en R. VAN WIJK Jz.

Alles als in het voorgaande vraagstuk stellende, hebben wij, Fig. 96, omdat het oppervlak van eenen bol gelijk is aan vier maal den grooten cirkel,

$$oppervl.\ bol\ DC = \pi . CD^2 = \pi(2r - x)^2;$$

en omdat het gebogen oppervlak van een bolvormig segment

ge-

gelijk is aan den omtrek van den grooten cirkel des bols, vermenigvuldigd met de hoogte van het segment

geb. opperv. segt, EAB $= 2 r \pi x$; CD $= 2 r \pi x$.

Deze oppervlakken aan elkander gelijk stellende, verkrijgen wij de vergelijking

$$\pi (2r - x)^2 = 2 r \pi x,$$

of $$4r^2 - 4rx + x^2 = 2rx,$$

dat is $$x^2 - 6rx + 4r^2 = 0,$$

waaruit $$x = 3r \pm r\sqrt{5}.$$

Het bovenste teeken kan hier niet gebezigd worden, omdat x onmogelijk grooter dan $2r$ kan zijn, en wij hebben dus $x = r(3 - \sqrt{5})$. Daar dit nu de waarde van DE is, zoo is CD $= 2r -$ DE $= r(-1 + \sqrt{5})$ en hieruit blijkt, dat men alleen de middellijn EC van den gegeven bol in de uiterste en middelste reden moet deelen, om het punt D te verkrijgen, waardoor het gevraagde vlak gebragt moet worden.

CLXV. VOORSTEL.

Door G. A. VAN KERKWIJK.

De waarde van $\frac{a^x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots x}$ *te bepalen, ingevalle* x *oneindig groot genomen wordt?*

OPLOSSING. *Door* G. A. VAN KERKWIJK.

De teller a^x niets anders uitdrukkende dan het product van x factoren, welke alle gelijk a zijn, zoo kan het opgegeven gebroken ook aldus geschreven worden

$$\frac{a}{1} \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{3} \times \text{enz.} \ldots\ldots \frac{a}{x-2} \times \frac{a}{x-1} \times \frac{a}{x},$$

of wanneer wij dezelve twee aan twee combineren

$$\frac{a^2}{x} \times \frac{a^2}{2(x-1)} \times \frac{a^2}{3(x-2)} \times \frac{a^2}{4(x-3)} \times \text{enz.}$$

Is nu x oneindig, dan gaat deze reeks van factoren tot in het oneindige voort; doch dan is het tevens klaar, dat elk dezer factoren gelijk 0 wordende, ook derzelver product gelijk 0 moet zijn. Waaruit dan volgt, dat de opgegevene formule gelijk 0 is, wanneer x oneindig groot genomen wordt.

CLXVI. VOORSTEL.

Door G. A. VAN KERKWIJK.

De waarde van $\frac{x^x}{1.2.3\ldots\ldots x}$ *te bepalen, als x gelijk oneindig genomen wordt?*

OPLOSSING. *Door* G. A. VAN KERKWIJK.

Daar de teller van ons gebroken uit x factoren bestaat, die alle gelijk x zijn, kunnen wij ons gebroken aldus schrijven

$$X = \frac{x}{1} \times \frac{x}{2} \times \frac{x}{3} \times \text{enz.} \ldots \frac{x}{x-1} \times \frac{x}{x}.$$

Nemen wij nu aan beide zijden de logarithmen, dan verkrijgen wij

$$Log.X = (Log.x - Log.1) + (Log.x - Log.2) + (Log.x - Log.3) + \text{enz.}$$
$$+ (Log.x - Log.(x-1)) + (Log.x - Log.x).$$

Het laatste lid bestaat wanneer $x = \infty$ genomen wordt uit de som van een oneindig aantal termen, waarvan een oneindig aantal oneindig groot is, terwijl alleen de laatsten gelijk nul wordt. Deze som moet dus mede oneindig groot zijn, zoodat wij, de waarde, die X voor $x = \infty$ verkrijgt, gelijk A stellende, zullen hebben $Log.\ A = \infty$, waaruit dan volgt $A = \infty$. Ons gebroken is dus voor $x = \infty$ mede oneindig groot.

CLXVII. VOORSTEL.

Door J. VAN DER STOK.

Om eene gegevene ellips een parallelogram van gegevenen inhoud te beschrijven, en waarvan de hoekpunten in het verlengde van de assen gelegen zijn?

OPGELOST *door* J. VAN DER STOK en W. TOP WZ.

Laat EGFH, *Fig.* 97, het gevraagde parallelogram zijn, de ellips, waarvan de assen $AB = 2a$ en $CD = 2b$ zijn, in het punt M aanrakende, waarvan de coördinaten zijn $OP = x$ en $OQ = y$, dan is door de bekende eigenschap van de raaklijn der ellips.

OP

$$OP : OA = OA : OE \quad \text{en} \quad OQ : OC = OC : OG$$

dus $$OE = \frac{OA^2}{OP} = \frac{a^2}{x} \quad \text{en} \quad OG = \frac{OC^2}{OQ} = \frac{b^2}{y},$$

zoodat $$\textit{paral}, EHFG = 4.\triangle EOG = \frac{2a^2b^2}{xy},$$

daar nu de inhoud van dit parallelogram gelijk I gegeven is, hebben wij $\frac{2a^2b^2}{xy} = I$, waaruit

$$xy = \frac{2a^2b^2}{I} \quad \ldots\ldots (1)$$

Uit de vergelijking van de ellips $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, volgt verder

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \quad \ldots (2)$$

en wij moeten dus uit deze vergelijkingen de waarde van x en y bepalen.

Vermenigvuldigen wij hiertoe de eerste met $2ab$, dan komt er $2abxy = \frac{4a^3b^3}{I}$, welke, bij de tweede vergelijking geteld en er van afgetrokken, geeft

$$(ay + bx)^2 = a^2b^2 + \frac{4a^3b^3}{I},$$

en $$(ay - bx)^2 = a^2b^2 - \frac{4a^3b^3}{I}.$$

Hieruit den vierkantswortel trekkende, komt er

$$ay + bx = ab\sqrt{\left(1 + \frac{4ab}{I}\right)};$$

en $$ay - bx = ab\sqrt{\left(1 - \frac{4ab}{I}\right)},$$

waarvan de som en het verschil is

$$2ay = ab\left\{\sqrt{\left(1 + \frac{4ab}{I}\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{4ab}{I}\right)}\right\},$$

en $$2bx = ab\left\{\sqrt{\left(1 + \frac{4ab}{I}\right)} - \sqrt{\left(1 - \frac{4ab}{I}\right)}\right\},$$

welke door $2a$ en $2b$ gedeeld, geven

$$y = \tfrac{1}{2}b\left\{\sqrt{\left(1 + \frac{4ab}{I}\right)} + \sqrt{\left(1 - \frac{4ab}{I}\right)}\right\},$$

en $$x = \tfrac{1}{2}b\left\{\sqrt{\left(1+\frac{4ab}{\mathrm{I}}\right)}-\sqrt{\left(1-\frac{4ab}{\mathrm{I}}\right)}\right\},$$

waardoor het vraagſtuk is opgelost.

Zal de oplosſing mogelijk wezen, dan moet $\frac{4ab}{\mathrm{I}}$, kleiner dan 1 eñ bijgevolg I grooter $4ab$, dat is, grooter dan den regthoek zijn, die om de ellips beſchreven kan worden, waaruit volgt, dat de regthoek der asſen, of, dat hetzelfde is, het parallelogram der toegevoegde middellijnen, kleiner is dan eenig ander parallelogram, hetwelk op de voorſchrevene wijze om de ellips kan worden beſchreven.

CLXVIII. VOORSTEL.

Door J. VAN DER STOK.

In een' gegeven' bol een' kegel te beſchrijven, zoodanig, dat de bol, in dezen kegel beſchreven, tot den gegeven' bol in gegevene reden zij?

OPGELOST *door* W. TOP Wz., J. VAN DER STOK en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* W. TOP Wz.

Zij de gegevene reden van den bol DEF, *Fig.* 98, beſchreven in den kegel ABC, tot den bol ABC als a tot b; ſtellende dan den ſtraal van den gegeven' bol r, de ſchuinſche zijde van den kegel AC $=$ BC $= x$, den ſtraal van den bazis des kegels AF $=$ BF $= y$ en den ſtraal van den ingeſchreven' bol DEF gelijk z, dan hebben wij vooreerst, omdat de inhouden der bollen tot elkander in reden zijn als de derde magten der ſtralen

$$\textit{bol}\ \mathrm{DEF} : \textit{bol}\ \mathrm{ABC} = a : b = z^3 : r^3,$$

zoodat $$bz^3 = ar^3 \quad \text{of} \quad z^3 = \frac{a}{b}r^3,$$

waaruit $$z = r\sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

Daar wij alzoo z gevonden hebben, kunnen wij dezelve in den verderen loop van de oplosſing als eene gegevene grootheid beſchouwen.

De

De ſtralen van den in- en omgeſchrevenen bol des kegels ABC zijn niet anders dan de ſtralen van den in- en omgeſchreven' cirkel des gelijkbeenigen driehoeks ABC.

Nu is het bekend, dat de ſtraal van den omgeſchreven' cirkel eens driehoeks gelijk is aan het product der zijden van dezen driehoek, gedeeld door viermaal deszelfs inhoud, en dit geeft ons de vergelijking

$$r = \frac{x^2 \cdot 2y}{4 \triangle ABC} = \frac{2x^2y}{4y\sqrt{(x^2 - y^2)}} = \frac{x^2}{2\sqrt{(x^2 - y^2)}},$$

waaruit $\qquad 2r\sqrt{(x^2 - y^2)} = x^2 \quad . \; . \; . \; . \quad (A).$

Even bekend is het, dat de ſtraal van den ingeſchreven' cirkel eens driehoeks gelijk is aan den dubbelen inhoud van dezen driehoek, gedeeld door zijnen omtrek, en dit geeft ons tot tweede vergelijking

$$z = \frac{2 \triangle ABC}{2(x + y)} = \frac{y\sqrt{(x^2 - y^2)}}{x + y},$$

waaruit $\qquad y\sqrt{(x^2 - y^2)} = z(x + y) \quad . \; . \; . \quad (B)$

en daar nu z reeds bekend is, zijn deze twee vergelijkingen genoegzaam, om er x en y uit te kunnen oploſſen.

De tweede vergelijking in het vierkant brengende, komt er

$$y^2(x^2 - y^2) = z^2(x + y)^2,$$

of door $x + y$ deelende

$$y^2(x - y) = z^2(x + y),$$

en loſſen wij hieruit x op, dan verkrijgen wij

$$x = y \cdot \frac{y^2 + z^2}{y^2 - z^2}.$$

Brengen wij deze waarde van x in de vergelijking (A) over, dan verandert dezelve in

$$2r\sqrt{\left\{y^2 \cdot \frac{(y^2 + z^2)^2}{(y^2 - z^2)^2} - y^2\right\}} = y \cdot \frac{(y^2 + z^2)^2}{(y^2 - z^2)^2},$$

of, aan beide zijden door y deelende in

$$2r\sqrt{\left\{\frac{(y^2 + z^2)^2}{(y^2 - z^2)^2} - 1\right\}} = y \cdot \frac{(y^2 + z^2)^2}{(y^2 - z^2)^2},$$

dat is $\qquad 2r \cdot \sqrt{\frac{4y^2z^2}{(y^2 - z^2)^2}} = y \cdot \frac{(y^2 + z^2)^2}{(y^2 - z^2)^2},$

of $\qquad \frac{4ryz}{y^2 - z^2} = y \cdot \frac{(y^2 + z^2)^2}{(y^2 - z^2)^2},$

welke, aan beide zijden door y gedeeld en met $(y^2 - z^2)^2$ vermenigvuldigd, geeft

$$4rz(y^2 - z^2) = (y^2 + z^2)^2,$$

en wanneer wij deze vergelijking ontwikkelen en ten opzigte van y rangschikken, komt er

$$y^4 - 2z(2r - z)y^2 + z^3(4r + z) = 0.$$

Deze vergelijking als eene vierkantsvergelijking oplossende, verkrijgen wij

$$y^2 = z(2r - z) \pm \sqrt{\{z^2(2r - z)^2 - z^3(4r + z)\}}$$

of $y^2 = z(2r - z) \pm \sqrt{(4r^2z^2 - 8rz^3)}$,

dat is $y^2 = z(2r - z) \pm 2z\sqrt{r(r - 2z)}$,

zoodat $y = \sqrt{\{z(2r - z) \pm 2z\sqrt{r(r - 2z)}\}}$.

Hierdoor is nu alles gevonden; want wij hebben, om z, y en x te vinden, achtervolgens de vergelijkingen

$$z = r\sqrt[3]{\frac{a}{b}} \ldots\ldots\ldots (1).$$

$$y = \sqrt{\{z(2r - z) \pm 2z\sqrt{r(r - 2z)}\}} \ldots (2)$$

$$x = y \cdot \frac{y^2 + z^2}{y^2 - z^2} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

AANMERKING *door* I. R. SCHMIDT.

Zal het vraagstuk mogelijk wezen, dan moet vooreerst r grooter dan $2z$ zijn, want anders zou $\sqrt{r(r - 2z)}$ onbestaanbaar worden. Daar nu $z = r\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ is, zoo geeft $2z < r$ aanleiding tot $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{1}{2}$, dat is $a < \frac{1}{8}b$. Zoodra dus a grooter dan $\frac{1}{8}b$ is, zal het vraagstuk onmogelijk worden, en hierdoor is dan ook het vraagstuk opgelost, *om in eenen gegeven' bol eenen kegel te beschrijven, waarvan de ingeschrevene bol een maximum is.* Voor dit vraagstuk moet namelijk $a = \frac{1}{8}b$ zijn en dit geeft $z = \frac{1}{2}r$, $y = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$ en $x = r\sqrt{3}$. De driehoek ABC, welke de doorsnede van den kegel voorstelt, zal dus in dit geval gelijkzijdig zijn.

Deze voorwaarde is de éénige, welke er tot de mogelijkheid van het

het vraagstuk gevorderd wordt; want wanneer aan dezelve voldaan is, zal de uitdrukking

$$y = \sqrt{\{z(2r - z) \pm 2z\sqrt{r(r - 2z)}\}}$$

nooit onbestaanbaar kunnen worden. Het bovenste teeken gebruikende, behoeft zulks geen betoog; doch om te bewijzen, dat dit ook voor het benedenste teeken waarheid is, schrijven wij de tweede waarde van y onder den vorm

$$y = \sqrt{z\{2r - z - 2\sqrt{((r - z)^2 - z^2)}\}},$$

en dan is het klaar, dat $\sqrt{((r - z)^2 - z^2)} < r - z$ zijnde,

$$2\sqrt{((r - z)^2 - z^2)} < 2r - 2z,$$

en dus zoo veel te meer

$$2\sqrt{((r - z)^2 - z^2)} < 2r - z,$$

is, waaruit dan blijkt, dat wanneer er aan de eerste voorwaarde voldaan is, de formule voor y niet onbestaanbaar kan worden.

Uit dit alles blijkt dan, 1°. dat zoodra a grooter dan $\frac{1}{8}b$ is, het vraagstuk onmogelijk wordt. 2°. Dat $a = \frac{1}{8}b$ slechts een antwoord geeft, hetwelk den driehoek ABC gelijkzijdig maakt en aan den bol DFE den grootst mogelijken inhoud geeft. 3°. Dat a kleiner dan $\frac{1}{8}b$ zijnde, er twee verschillende kegels in den bol beschreven kunnen worden, welke aan de vraag voldoen, omdat er alsdan in den cirkel ABC twee gelijkbeenige driehoeken beschreven kunnen worden, die denzelfden ingeschreven' cirkel hebben.

CLXIX. VOORSTEL.

Door J. VAN DER STOK.

In een' gegeven' bol eenen kegel te beschrijven, zoodanig, dat de cubus, in dezen kegel beschreven, tot den inhoud van den gegeven' bol in gegevene reden zij?

OPGELOST *door* J. VAN DER STOK en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* J. VAN DER STOK.

Laat *Fig.* 99 den bol met den ingeschreven' kegel en daarin geconstrueerden cubus voorstellen, zoodanig, dat wij hebben

Inh. bol. ABC : *Inh. cubus* FL $= p : 1$,

dan

dan hebben wij, den ſtraal van den bol r en de zijde van den cubus z ſtellende

$$\tfrac{4}{3} r^3 \pi : z^3 = p : 1,$$

of
$$z^3 = \tfrac{4}{3} \cdot \frac{r^3}{p} \pi,$$

waaruit
$$z = r \sqrt[3]{\tfrac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{p}},$$

en hierdoor is de zijde van den cubus bekend, zoodat wij in de overige berekeningen z als eene gegevene grootheid kunnen aanzien.

Stellen wij nu de ſchuinſche zijde van den kegel AC $= x$ en den ſtraal van het grondvlak AE $= y$, dan is EC $= \sqrt{(x^2 - y^2)}$, en daar de ſtraal van den omgeſchreven' bol des kegels niets anders is dan de ſtraal des omgeſchreven' cirkels van driehoek ABC, hebben wij door de bekende formule voor dezen ſtraal

$$r = \frac{x^2 \cdot 2y}{4 \triangle ABC} = \frac{x^2}{2\sqrt{(x^2 - y^2)}},$$

of
$$2r\sqrt{(x^2 - y^2)} = x^2 \quad \ldots \ldots \quad (1).$$

Daar verder DE gelijk de zijde z van den cubus is, zoo is CD $= \sqrt{(x^2 - y^2)} - z$; maar FH is de diagonaal van het vierkant, dat z tot zijde heeft, en dus is FD $= \tfrac{1}{2}$ FH $= \tfrac{1}{2} z \sqrt{2}$, zoodat wij, omdat

$$CD : DF = CE : EA,$$

is, deze evenredigheid hebben

$$\sqrt{(x^2 - y^2)} - z : \tfrac{1}{2} z \sqrt{2} = \sqrt{(x^2 - y^2)} : y,$$

en hieruit volgt de vergelijking

$$y\sqrt{(x^2 - y^2)} - zy = \tfrac{1}{2} z\sqrt{2} \times \sqrt{(x^2 - y^2)},$$

of
$$(y - \tfrac{1}{2} z\sqrt{2})\sqrt{(x^2 - y^2)} = zy,$$

dus
$$\sqrt{(x^2 - y^2)} = \frac{2zy}{2y - z\sqrt{2}},$$

waaruit
$$x^2 = y^2 \cdot \left\{ \frac{4z^2}{(2y - z\sqrt{2})^2} + 1 \right\}.$$

Brengen wij nu deze waarden van $\sqrt{(x^2 - y^2)}$ en x^2 over in de vergelijking (1), dan verkrijgen wij

$$\frac{4rzy}{(2y - z\sqrt{2})} = y^2 \left\{ \frac{4z^2}{(2y - z\sqrt{2})^2} + 1 \right\},$$

of door y deelende en met $(2y - z\sqrt{2})^2$ vermenigvuldigende,

$$4rz\,(2y - z\sqrt{2}) = y\,\{4z^2 + (2y - z\sqrt{2})^2\},$$

wel-

welke vergelijking ontwikkeld en na de afdalende magten van y gerangschikt, geeft

$$y^3 - zy^2 \sqrt{2} + (\tfrac{3}{2} z^2 - 2rz)\, y + rz^2 \sqrt{2} = 0.$$

Stellen wij vervolgens voor z derzelver waarde $r \sqrt[3]{\frac{4\pi}{3p}}$, dan komt er, indien wij kortheidshalve $\sqrt[3]{\frac{4\pi}{3p}} = q$ stellen,

$$y^3 - rqy^2 \sqrt{2} + r^2 (\tfrac{3}{2} q^2 - 2q)\, y + r^3 q^2 \sqrt{2} = 0;$$

en hieruit wordt nu r weggemaakt, door de stelling van $y = vr$; want dan komt er

$$v^3 - qv^2 \sqrt{2} + (\tfrac{3}{2} q^2 - 2q)\, v + q^2 \sqrt{2} = 0.$$

Eindelijk kunnen wij ook de irrationale factoren uit deze vergelijking verdrijven, door de stelling van $v = \frac{1}{2} u \sqrt{2}$, hetgeen ons geeft

$$u^3 - 2qu^2 + (3q^2 - 4q)\, u + 4q^2 = 0,$$

en daar nu p een gegeven getal is, is ook q een bekend getal, zoodat wij eene getallen-vergelijking hebben, die, door derzelver wortels bij benadering te zoeken, de waarden van u en dus ook die van v, y en x zal doen kennen.

CLXX. VOORSTEL.

Door J. VAN DER STOK.

In een' gegeven' bol een' kegel zoodanig te construeren, dat het gebogen oppervlak van den grootsten cilinder, welke in dezen kegel beschreven kan worden, tot het oppervlak van den bol in gegevene reden zij?

OPGELOST *door* J. VAN DER STOK, R. VAN WIJK JZ., en W. TOP WZ.

OPLOSSING *van* J. VAN DER STOK.

Om dit vraagstuk op te lossen, dienen wij eerst aan te wijzen, hoe de grootste cilinder bepaald wordt, welke in eenen gegevenen kegel kan worden beschreven.

Stellen wij hiertoe, *Fig.* 199, de hoogte van den kegel h en den straal van het grondvlak m, en onderstellen wij de hoogte BE

van

van dezen cilinder u, dan is $NE = \frac{m}{h}(h - u)$ en bij gevolg de inhoud van den cilinder $\frac{m^2}{h^2}(h - u)^2 \pi \times u$; en daar dit een maximum moet zijn, hebben wij $u(h - u)^2$ of $u^3 - 2hu^2 + h^2 u$ tot een maximum te maken, zoodat wij deze uitdrukking gelijk U ftellende, zullen hebben $\frac{\partial U}{\partial u} = 3u^2 - 4hu + h^2 = 0$, waaruit $u = h$, of $u = \frac{1}{3}h$. De eerfte waarde behoort klaarblijkelijk niet tot het bedoelde maximum, en wij hebben dus $u = \frac{1}{3}h$, waaruit volgt, dat $BE = \frac{1}{3}BC$ zal moeten genomen worden, om den grootften ingefchreven' cilinder te verkrijgen.

Of nu de hoogte en de ftraal van het grondvlak des kegels al dan niet bekend zijn, kan dit geene verandering in ons gevonden befluit maken; en wij moeten dus, in den gegeven' bol, den kegel zoodanig befchrijven, dat de ingefchrevene cilinder, waarvan het bovenvlak de as des kegels op een derde van de hoogte doorfnijdt, een gebogen oppervlak heeft, dat tot het oppervlak van den bol in gegevene reden ftaat.

Stellen wij hiertoe $MB = x$ en $AM = r$, dan is $AB = \sqrt{(r^2 - x^2)}$, $BC = r + x$ en $BE = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3}(r + x)$, en wij hebben verder, omdat $CE = \frac{2}{3}CB$ is, ook $NE = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}\sqrt{(r^2 - x^2)}$. Nu is de omtrek van den cirkel, die NE tot ftraal heeft, $2\,NE.\pi = \frac{4}{3}\pi\sqrt{(r^2 - x^2)}$, en bij gevolg het ronde oppervlak van den cilinder $\frac{4}{3}\pi . \frac{1}{3}(r + x)\sqrt{(r^2 - x^2)}$. Stellen wij alzoo, dat het oppervlak $4r^2\pi$ van den bol gelijk moet zijn aan p maal het ronde oppervlak van den cilinder, dan verkrijgen wij de vergelijking

$$\frac{4}{9}\pi p(r + x)\sqrt{(r^2 - x^2)} = 4r^2\pi,$$

dus
$$(r + x)^{\frac{3}{2}}(r - x)^{\frac{1}{2}} = 9\frac{r^2}{p},$$

of $r + x = y$ ftellende, waardoor $r - x = 2r - y$ wordt,

$$y^{\frac{3}{2}}(2r - y)^{\frac{1}{2}} = \frac{9r^2}{p},$$

dat is
$$y^3(2r - y) = \frac{81r^4}{p^2},$$

zoo-

zoodat $$y^4 - 2ry^3 + \frac{81r^4}{p^2} = 0,$$

en stellende, ten einde r weg te maken, $y = rz$,

$$z^4 - 2z^3 + \frac{81}{p^2} = 0,$$

welke vergelijking, waaruit nu z bij benadering gevonden kan worden, zoodra p in getallen gegeven is, altijd twee onbestaanbare wortels zal hebben, omdat er twee achtervolgende termen in dezelve ontbreken, en dus aanwijst, dat het vraagstuk in geen geval voor meer dan twee antwoorden vatbaar zal zijn.

Neemt men, tot voorbeeld, $p = 9$, dat is, moet het oppervlak van den bol 9 maal zoó groot zijn, als het ronde oppervlak van den cilinder, dan wordt onze vergelijking

$$z^4 - 2z^3 + 1 = 0,$$

en dezelve geeft terstond $z = 1$ of $y = r$, waaruit $x = 0$, en dit toont aan, dat het grondvlak door het middelpunt van den bol moet gaan.

Om den tweeden kegel te bepalen, die tot dit geval behoort, deelen wij het eerste lid door $z - 1$, en wij verkrijgen

$$z^3 - z^2 - z - 1 = 0,$$

welke klaarblijkelijk een' wortel tusschen $1\frac{1}{2}$ en 2 heeft. Eene verdere benadering zal dezen wortel als tusschen 1,83 en 1,84 doen kennen, van welke grenzen de laatste het eerste lid reeds minder dan 0,004 maakt. Nemende dus $z = 1,84$ dan is $y = 1,84 \times r$, en bij gevolg $x = 0,84 \times r$, zoodat wij $MB = 0,84 \times MF$ zullen moeten nemen, om den tweeden kegel te vinden, die aan de vraag voldoet.

CLXXI. VOORSTEL.

Door H. Foekes Bakker.

Hoeveel en welke op elkander volgende termen moet men nemen uit de reeks der natuurlijke getallen, opdat de som een quadraat zij, waarvan de wortel gelijk is aan het aantal termen, dat men genomen heeft? (33)

Op-

(33) Bangma, *Algebra voor de Scholen*, 1e druk, bl. 278. N°. 19.

Opgelost *door* H. Foekes Bakker, W. Top Wz., C. F. Julius, M. B. Jung, R. van Wijk Jz. en P. de Vries.

Oplossing *van* H. Foekes Bakker.

Stel den eersten term y en het getal der termen x, dan is de reeks

y, $y+1$, $y+2$, $y+3$, *enz.* . . . . tot $y+x-1$,

en de som der termen zal worden uitgedrukt door

$$\tfrac{1}{2}x\,(2y+x-1).$$

Deze uitdrukking moet nu gelijk zijn aan x^2, en dit geeft ons de vergelijking

$$xy+\tfrac{1}{2}x^2-\tfrac{1}{2}x=x^2,$$

of $$y+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}=x,$$

waaruit $$x=2y-1.$$

Hieruit volgt, dat men voor den eersten term y elk geheel getal kan aannemen, hetwelk men goedvindt, en dat hierdoor het aantal termen, hetwelk men nemen moet, bepaald is. Zie hier eenige voorbeelden.

Neemt men $y=1$, dan is ook $x=1$, en men vindt het enkele getal 1.

Neemt men $y=2$, dan is $x=3$, en men heeft de getallen 2, 3 en 4, waarvan de som 9 of 3^2 is.

Neemt men $y=3$, dan is $x=5$; en men heeft de getallen 3, 4, 5, 6, 7, waarvan de som 25 of 5^2 is.

CLXXII. Voorstel.

Door H. Foekes Bakker.

Hoeveel en welke op elkander volgende termen moet men nemen uit de reeks der natuurlijke getallen, opdat de som een cubus zij, waarvan de wortel gelijk is aan het aantal termen, dat men genomen heeft? (34)

Opgelost *door* H. Foekes Bakker, W. Top Wz., C. F. Julius, M. B. Jung, R. van Wijk Jz. en P. de Vries.

Oplossing *van* H. Foekes Bakker.

Stel den eersten term y en het getal der termen x, dan is de laatste

(34) *Idem*, N°. 31.

ſte term $y+x-1$ en de ſom der termen $(2y+x-1)\times\frac{1}{2}x$, en daar deze ſom gelijk x^3 moet zijn, hebben wij

$$\tfrac{1}{2}x(2y+x-1)=x^3,$$

of

$$2y+x-1=2x^2,$$

waaruit

$$y=\frac{2x^2-x+1}{2}=x^2-\frac{x-1}{2}.$$

Zal y alzoo een geheel getal wezen, dan moet $x-1$ door 2 deelbaar zijn, en bij gevolg moet voor x een oneven getal genomen worden, hetwelk alsdan y bepaalt.

Neemt men $x=3$, dan is $y=8$, en de getallen zijn 8, 9 en 10, waarvan de ſom 27 of 3^3.

Neemt men $x=5$, dan is $y=23$, en de getallen zijn 23, 24, 25, 26, 27, waarvan de ſom 125 of 5^3.

CLXXIII. VOORSTEL.

Door H. Foekes Bakker.

Hoeveel en welke op elkander volgende termen moet men nemen van de reeks der onevene getallen, opdat de ſom een quadraat zij, waarvan de wortel gelijk is aan het aantal termen, dat men genomen heeft? (35)

Opgelost *door* W. Top Wz., H. Foekes Bakker, M. B. Jung, C. F. Julius, R. van Wijk Jz. en P. de Vries.

Oplossing *van* W. Top Wz.

Stel den eerſten term y en het aantal termen x, dan is de reeks

$$y,\ y+2,\ y+4, \text{ enz. } \ldots \text{ tot } y+(x-1)2,$$

en bij gevolg, omdat de ſom der termen gelijk x^2 moet zijn,

$$(2y+2x-2)\times\tfrac{1}{2}x=x^2,$$

of

$$y+x-1=x,$$

waaruit onmiddellijk volgt $y-1=0$ of $y=1$.

Daar verder x geheel uit onze vergelijking verdwenen is, en dus volſtrekt onbepaald blijft, zoo volgt hieruit, dat wij, van 1 af te beginnen, zoo veel achtervolgende termen van de reeks der onevene getallen kunnen nemen als wij goedvinden, en dat dezelve altijd aan de vraag zullen beantwoorden.

Het

(35) *Idem*, N°. 32.

Het is op deze eigenschap der getallen, dat de constructie der quadraattafels berust.

CLXXIV. Voorstel.

Door H. Foekes Bakker.

Hoeveel en welke achtervolgende termen van de reeks der onevene getallen moet men nemen, opdat de som een cubus zij, waarvan de wortel gelijk is aan het aantal termen, dat men genomen heeft? (36)

Opgelost *door* M. B. Jung, H. Foekes Bakker, W. Top Wz., C. F. Julius, R. van Wijk Jz. en P. de Vries.

Oplossing *van* M. B. Jung.

Stel den eersten term y en het aantal termen x, dan is de laatste term $y+(x-1)\times 2$ en de som der termen $(2y+2(x-1))\times\frac{1}{2}x$ of $x(y+x-1)$. Deze som moet gelijk x^3 zijn, en wij hebben, alzoo door x deelende,

$$y+x-1=x^2,$$

of

$$y=x^2-x+1.$$

Nemende dus voor x een getal naar welgevallen aan, zal hetzelve de overeenkomstige waarde van y doen kennen.

Daar wij alleen eene reeks hebben aangenomen, die met twee opklimt, kan dezelve zoowel die der evene als die der onevene getallen voorstellen. Wij zullen ondertusschen door onze oplossing altijd onevene getallen voor y vinden; want nemen wij voor x een even getal $2n$, dan wordt $y=4n^2-2n+1$, en dus oneven, en stellen wij voor x het oneven getal $2n+1$, dan wordt $y=4n^2+2n+1$, en dus mede oneven. Het voorgestelde vraagstuk zou dus bij de reeks der evene getallen onmogelijk zijn.

Stellen wij, tot voorbeeld, x achtervolgens 2, 3, 4, *enz.* dan vinden wij voor y achtervolgens 3, 7, 13, *enz.* en dit geeft ons voor de reeksen

$$3+5=8=2^3$$
$$7+9+11=27=3^3$$
$$13+15+17+19=64=4^3$$
$$21+23+25+27+29=125=5^3$$

en zoo vervolgens.

CLXXV.

(36) *Idem*, N°. 33.

CLXXV. VOORSTEL.

Door W. TOP Wz.

Van twee bollen A *en* B, *wier ſtralen tot elkander in reden ſtaan als a tot b, is de ſom der inhouden gelijk aan die van twee andere bollen* C *en* D, *waarvan de oppervlakken in reden zijn als c en d. Men vraagt in welke reden de inhouden der bollen* A *en* C *tot elkander ſtaan?*

OPGELOST *door* W. TOP Wz. en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* W. TOP Wz.

Stel de ſtralen der bollen A en B gelijk x en y, dan is vooreerst

$$x:y=a:b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Stellen wij verder de ſtralen der bollen C en D gelijk u en v, dan zijn derzelver oppervlakken $4u^2\pi$ en $4v^2\pi$, en wij hebben dus

$$u^2:v^2=c:d \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Uit deze ſtelling volgt voor den inhoud der bollen $A=\frac{4}{3}x^3\pi$, $B=\frac{4}{3}y^3\pi$, $C=\frac{4}{3}u^3\pi$ en $D=\frac{4}{3}v^3\pi$, en daar de ſom der twee eerſte gelijk de ſom der twee laatſte moet zijn, geeft dit tot derde vergelijking

$$x^3+y^3=u^3+v^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Uit de eerſte vergelijking is $y=\frac{b}{a}x$, en uit de tweede $v=u\sqrt{\frac{d}{c}}$; brengende dus deze waarde in de derde over, komt er

$$x^3+\frac{b^3}{a^3}x^3=u^3+u^3\frac{d}{c}\sqrt{\frac{d}{c}}$$

of $$\left(1+\frac{b^3}{a^3}\right)x^3=\left(1+\frac{d}{c}\sqrt{\frac{d}{c}}\right)u^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

zoodat de gevraagde reden der bollen A en C zal wezen

$$A:C=x^3:u^3=1+\frac{d\sqrt{d}}{c\sqrt{c}}:1+\frac{b^3}{a^3}.$$

Was daarentegen de reden der inhouden van de bollen B en D gevraagd, dan vinden wij, door in (4) $x=\frac{a}{b}y$ en $u=v\sqrt{\frac{c}{d}}$ over te brengen,

$$\left(1+\frac{a^3}{b^3}\right)y^3=\left(1+\frac{c}{d}\sqrt{\frac{c}{d}}\right)v^3.$$

 en

en bij gevolg zal de gevraagde reden zijn

$$B : D = y^3 : v^3 = 1 + \frac{c\sqrt{c}}{d\sqrt{d}} : 1 + \frac{a^3}{b^3}.$$

CLXXVI. VOORSTEL.

Door W. TOP Wz.

Een holle bol, waarvan de straal r is, wordt tot op eene hoogte a met eene vloeistof gevuld, waarvan de soortelijke zwaarte g is. Vervolgens wordt hierin eenig ligchaam, soortelijk ligter dan de vloeistof zijnde, gedompeld, dat V cubieke eenheden bevat. Wanneer nu de vloeistof hierdoor in den hollen bol eene haeveelheid b rijst, dan vraagt men door deze gegevens de soortelijke zwaarte en het volstrekt gewigt van het drijvend ligchaam te bepalen?

OPGELOST *door* W. TOP Wz. en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* W. TOP Wz.

Stellen wij het gewigt van het ligchaam P en deszelfs soortelijke zwaarte G, dan is, wanneer γ het gewigt van eene cubieke eenheid water beteekent, $P = V \times G \times \gamma$.

Stellen wij verder den inhoud van het ingedompelde deel V', dan is het gewigt van de vloeistof, door dit ingedompelde deel ingenomen, $P' = V' g \times \gamma$.

Deze gewigten moeten, volgens den bekenden hydrostatischen regel, aan elkander gelijk zijn, en dit geeft ons de vergelijking $V \times G = V' g$, waaruit $G = g \times \frac{V'}{V}$, en alles zal dus bekend wezen, wanneer wij den inhoud V' van het ingedompelde deel kunnen bepalen.

Hiertoe merken wij op, dat de menigte vloeistof, begrepen in het bolvormig vat, een bolvormig segment is, dat a tot hoogte heeft. Deze zelfde menigte vocht maakt, met het ingedompelde deel te zamen genomen, een ander bolvormig segment uit, waarvan $a + b$ de hoogte is. Stellende dus deze bolvormige segmenten voor door B en B', dan is $B + V' = B'$, waaruit $V' = B' - B$, en *het ingedompelde deel heeft dus denzelfden inhoud als de bolvormige schijf, begrepen tusschen de twee waterspiegels.*

Daar

Daar nu de straal van den bol r is, en onze bolvormige segmenten a en $a+b$ tot hoogte hebben, zoo zal de inhoud van deze bolvormige schijf worden uitgedrukt door

$$V' = B' - B = \tfrac{1}{3}(a+b)^2 \pi \{3r - (a+b)\} - \tfrac{1}{3}a^2 \pi (3r - a),$$

welke uitdrukking ook aldus kan worden geschreven

$$V' = \pi b \{(2a+b)r - (a^2 + ab + \tfrac{1}{3}b^2)\},$$

en hierdoor is dan de inhoud van het ingedompeld deel bepaald.

Voor de soortelijke zwaarte van het ligchaam vinden wij alzoo

$$G = g \times \frac{V'}{V} = g \times \frac{\pi b \{(2a+b)r - (a^2 + ab + \tfrac{1}{3}b^2)\}}{V}$$

terwijl het volstrekte gewigt van dit ligchaam wordt uitgedrukt door

$$P = V G \gamma = \pi \gamma g b \{(2a+b)r - (a^2 + ab + \tfrac{1}{3}b^2)\}$$

CLXXVII. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Van een trapezium, de vier zijden gegeven zijnde, vraagt men den afstand der evenwijdige zijden en den inhoud te berekenen?

OPGELOST *door* S. KLIJNSMA, W. TOP WZ. en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* S. KLIJNSMA.

Stellen wij *Fig.* 101. de evenwijdige zijden $DC = b$ en $AB = d$, de opstaande zijden $AD = a$ en $BC = c$, en de hoogte of den afstand der evenwijdige zijden $DE = FC = x$, dan is $AE = \surd(a^2 - x^2)$ en $BF = \surd(c^2 - x^2)$, en dit geeft ons, omdat $EF = DC = b$ is, de vergelijking

$$b + \surd(a^2 - x^2) + \surd(c^2 - x^2) = d$$

of $$\surd(a^2 - x^2) + \surd(c^2 - x^2) = d - b.$$

Deze vergelijking quadraterende, komt er

$$a^2 + c^2 - 2x^2 + 2\surd(a^2 - x^2)(c^2 - x^2) = (d-b)^2$$

of $$2\surd\{a^2c^2 - (a^2 + c^2)x^2 + x^4\} = (d-b)^2 - (a^2 + c^2) + 2x^2,$$

en deze vergelijking andermaal quadraterende, verkrijgen wij, na de gelijke termen tegen elkander te hebben weggelaten,

$$4a^2c^2 = \{(d-b)^2 - (a^2 + c^2)\}^2 + 4(d-b)^2 x^2.$$

waaruit $$x^2 = \frac{4a^2c^2 - \{(d-b)^2 - a^2 + c^2)\}^2}{4(d-b)^2}$$

of

of $x^2 = \dfrac{\{2ac+(d-b)^2-(a^2+c^2)\}\times\{2ac-(d-b)^2+(a^2+c^2)\}}{4(d-b)^2}$

dat is $x^2 = \dfrac{\{(d-b)^2-(a-c)^2\}\times\{(a+c)^2-(d-b)^2\}}{4(d-b)^2}$

of $x^2 = \dfrac{(d-b+a-c)(d-b-a+c)(a+c+d-b)(a+c-d+b)}{4(d-b)^2}$

dus $x = \dfrac{\sqrt{(d-b+a-c)(d-b-a+c)(a+c+d-b)(a+c-d+b)}}{2(d-b)}$

en daar de inhoud gelijk is aan $x \times \frac{1}{2}(d+b)$ zoo vinden wij voor dezelve

$$\tfrac{1}{4}\times\frac{d+b}{d-b}\times\sqrt{(d-b+a-c)(d-b-a+c)(a+c+d-b)(a+c-d+b)}.$$

CLXXVIII. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Men vraagt onder alle driehoeken, welke in denzelfden cirkel op eene zelfde koorde als bazis beschreven kunnen worden, dien te bepalen, wanneer de inhoud een maximum of minimum is.

OPGELOST *door* S. KLIJNSMA, R. VAN WIJK Jz., W. TOP Wz. en M. B. JUNG.

OPLOSSING *van* S. KLIJNSMA.

Zij AB Fig. 108. de koorde, welke tot bazis van den driehoek moet verstrekken, en onderstellen wij, dat APB de gevraagde driehoek is, dan is deszelfs inhoud $\frac{1}{2}$AB$\times$PQ. Daar nu AB eene standvastige grootheid is, zal de driehoek de grootste waarde hebben, wanneer de hoogte PQ de grootste waarde heeft, en dit zal klaarblijkelijk plaats hebben, wanneer de top in C valt; want de straal CM grooter dan de halve koorde PN zijnde, moet ook CD grooter dan PQ wezen. Hieruit volgt dus, dat de gelijkbeenige driehoek, onder al de driehoeken, die op AB kunnen beschreven worden, den grootsten inhoud zal hebben.

De driehoek ABC′ is op dezelfde wijze de grootste onder al de driehoeken, die op AB in het segment AC′B beschreven kunnen worden. Doch de inhoud van dezen driehoek moet ten opzigte van driehoek ACB als negatief worden beschouwd; want la-

ten

ten wij P den omtrek doorloopen, dan wordt de hoogte PQ kleiner naar mate P digter bij B komt; in B gekomen zijnde, is deze hoogte o, en het punt P verder voort bewegende, wordt de hoogte PQ negatief, waardoor dan ook de inhoud negatief wordt. De driehoek ABC′ moet bij gevolg als het gevraagde minimum of als de grootste negatieve driehoek worden aangezien.

CLXXIX. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

De integraal te vinden van de formule $e^{Tang.\phi}.\frac{\partial\phi}{Cos.^{n}\phi}$, *in de onderstelling, dat n een geheel even getal is?*

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, G. A. VAN KERKWIJK en R. LOBATTO.

EERSTE OPLOSSING. *Door* I. R. SCHMIDT en G. A. VAN KERKWIJK.

Omdat de differentiaal van $e^{Tang.\phi}$ gelijk $\frac{e^{Tang.\phi}\partial\phi}{Cos^2.\phi}$ is, kunnen wij de gevraagde integraal schrijven onder den vorm

$$y=\int\frac{e^{Tang.\phi}\partial\phi}{Cos^2.\phi}\times\frac{1}{Cos.^{n-2}\phi}=\int\frac{1}{Cos.^{n-2}\phi}\times\partial.e^{Tang.\phi}.$$

Daar verder $\int X\partial Y=XY-\int Y\partial X$ is, gaat y hierdoor over in

$$y=\frac{e^{Tang.\phi}}{Cos.^{n-2}\phi}-\int e^{Tang\,\phi}\times\partial.\frac{1}{Cos.^{n-2}\phi}$$

$$=\frac{e^{Tang.\phi}}{Cos.^{n-2}\phi}-(n-2)\int e^{Tang.\phi}.\frac{Sin.\phi\partial\phi}{Cos.^{n-1}\phi}\quad .\ .\ (A)$$

Stellende deze laatste integraal voor door y', dan kunnen wij wederom voor $e^{Tang.\phi}\frac{\partial\phi}{Cos^2.\phi}$ schrijven $\partial.e^{Tang.\phi}$, en dit geeft

$$y'=\int e^{Tang.\phi}\frac{Sin.\phi\partial\phi}{Cos.^{n-1}\phi}=\int\frac{Sin.\phi}{Cos.^{n-3}\phi}\times\partial.e^{Tang.\phi}$$

welke door de formule $\int X\partial Y=XY-\int Y\partial X$ overgaat in

$$y' = \frac{e^{Tang.\,\phi}\,Sin.\,\phi}{Cos.^{\,n-3}\,\phi} - \int e^{Tang.\,\phi} \times \partial.\frac{Sin.\,\phi}{Cos.^{\,n-3}\,\phi}$$

$$= \frac{e^{Tang.\,\phi}\,Sin.\,\phi}{Cos.^{\,n-3}\,\phi} - \int e^{Tang.\,\phi} \times \frac{Cos.^{\,n-2}\,\phi + (n-3)\,Cos.^{\,n-4}\,\phi\,Sin.^2\,\phi}{Cos.^{\,2n-6}\,\phi}.\,\partial\phi$$

$$= \frac{e^{Tang.\,\phi}\,Sin.\,\phi}{Cos.^{\,n-3}\,\phi} - \int e^{Tang.\,\phi} \times \frac{(n-3)\,Cos.^{\,n-4}\,\phi - (n-4)\,Cos.^{\,n-2}\,\phi}{Cos.^{\,2n-6}\,\phi}.\,\partial\phi.$$

$$= \frac{e^{Tang.\,\phi}\,Sin.\,\phi}{Cos.^{\,n-3}\,\phi} - \int e^{Tang.\,\phi} \left\{ \frac{(n-3)\,\partial\phi}{Cos.^{\,n-2}\,\phi} - \frac{(n-4)\,\partial\phi}{Cos.^{\,n-4}\,\phi} \right\}$$

$$= \frac{e^{Tang.\,\phi}\,Sin.\,\phi}{Cos.^{\,n-3}\,\phi} - (n-3)\int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,\partial\phi}{Cos.^{\,n-2}\,\phi} + (n-4)\int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,\partial\phi}{Cos.^{\,n-4}\,\phi} \quad \ldots \quad (B)$$

Brengende dus deze waarde van y' of $\int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,Sin.\,\phi\,\partial\phi}{Cos.^{\,n-1}\,\phi}$ in de vergelijking (A) over, dan verkrijgen wij de herleidings-formule

$$\int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,\partial\phi}{Cos.^{\,n}\,\phi} = \frac{e^{Tang\,\phi}}{Cos.^{\,n-2}\,\phi} - (n-2)\frac{e^{Tang.\,\phi}\,Sin\,\phi}{Cos.^{\,n-3}\,\phi} + (n-2)(n-3)\int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,\partial\phi}{Cos.^{\,n-2}\,\phi} - (n-2)(n-4)\int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,\partial\phi}{Cos.^{\,n-4}\,\phi} \ldots (C)$$

Doer

Door deze formule worden de exponenten van *Cos.* ϕ onophoudelijk met 2 verminderd, en wij moeten bij gevolg, indien *n* even is, eindelijk nederkomen op eene der twee volgende formulen:

$$\int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,\delta\phi}{Cos^2\,\phi.} \quad \text{en} \quad \int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,\delta\phi}{Cos^4.\,\phi}$$

Deze twee integralen worden nu gemakkelijk door onze formule (C) gevonden; want stellende in dezelve $n = 2$, dan verdwijnen de drie laatste termen en wij verkrijgen

$$\int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,\delta\phi}{Cos^2.\,\phi} = e^{Tang.\,\phi}$$

hetgeen ook bovendien bekend was, omdat wij eigenlijk door het omgekeerde van deze formule tot onze oplossing zijn geraakt.

Stellen wij verder in de vergelijking (C), $n = 4$, dan komt er,

$$\int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,\delta\phi}{Cos^4.\,\phi} = \frac{e^{Tang.\,\phi}}{Cos^2.\,\phi} - \frac{2\,e^{Tang.\,\phi}\,Sin.\,\phi}{Cos.\,\phi} + 2\int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,\delta\phi}{Cos^2\,\phi}$$

en daar wij zoo even de laatste integraal hebben opgegeven,

$$\int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,\delta\phi}{Cos^4.\,\phi} = e^{Tang.\,\phi}\left\{\frac{1}{Cos^2.\,\phi} - 2\,Tang.\,\phi + 2\right\}$$

$$= e^{Tang.\,\phi}\left\{Tang^2.\,\phi - 2\,Tang.\,\phi + 3\right\}$$

$$= e^{Tang.\,\phi}\left\{(Tang.\,\phi - 1)^2 + 2\right\}$$

Daar wij alzoo gevonden hebben

$$\int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,\delta\phi}{Cos^2.\,\phi} = e^{Tang.\,\phi} \text{ en } \int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,\delta\phi}{Cos^4\,\phi} = e^{Tang.\,\phi}\left\{(Tang.\,\phi - 1)^2 + 2\right\}$$

zoo zal de formule (C) de integraal voor elke evene geheele waarde van *n* doen kennen. Men zal, bij voorbeeld, vinden

$$\int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,\delta\phi}{Cos^6.\,\phi} = e^{Tang.\,\phi}\left\{Tang^4.\,\phi - 4\,Tang^3.\,\phi + 14\,Tang^2.\,\phi - 28\,Tang.\,\phi + 29\right\}$$

Aanmerking. Uit onze oplossing volgt ook, dat door de formule (B) voor alle geheele en evene waarden van den exponent *n* de integraal

$$y' = \int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,Sin\,\phi\,\delta\phi}{Cos.^{n-1}\,\phi}$$

zal kunnen worden gevonden.

Twee-

Tweede Oplossing *door* G. A. van Kerkwijk.

Stellen wij *Tang.* $\phi = z$, dan is $Cos. \phi = \frac{1}{\sqrt{(1+z^2)}}$ en $\delta\phi = \frac{\delta z}{1+z^2}$ en hierdoor verandert de opgegevene formule in

$$\delta y = e^{Tang. \phi} \frac{\delta\phi}{Cos.^n \phi} = e^z \delta z (1+z^2)^{\frac{n}{2}-1}.$$

Omdat nu n een even geheel is, zoo zal de exponent $\frac{n}{2}-1$ een geheel getal zijn, en de ontwikkeling van $(1+z^2)^{\frac{n}{2}-1}$ zal bij gevolg uit een eindig getal, en wel uit $\frac{1}{2} n$ termen bestaan. Wij verkrijgen alzoo door deze ontwikkeling

$$\delta y = e^z \delta z \left\{1 + \frac{n-2}{2} z^2 + \frac{(n-2)}{2} . \frac{(n-4)}{4} z^4 + enz. \, .. + z^{n-2}\right\}$$

en deze vergelijking term voor term integrerende,

$$y = \int e^z \delta z + \frac{n-2}{2} \int e^z z^2 \delta z + \frac{n-2}{2} . \frac{n-4}{4} \int e^z z^4 \delta z + \dots\dots$$
$$+ \frac{n-2}{2} . \frac{n-4}{4} . \frac{n-6}{6} \int e^z z^6 \delta z + enz. + \int e^z z^{n-2} \delta z \quad (1)$$

Nu is in het algemeen $\int e^z z^m \delta z = \int z^m \times \delta . e^z$ en bij gevolg door de algemeene herleidings-formule $\int X \delta Y = XY - \int Y \delta X$

$$\int e^z z^m \delta z = z^m e^z - m \int e^z z^{m-1} \delta z.$$

Stellende dus in deze formule achtervolgens m gelijk aan 0, 1, 2, 3, 4, *enz.* en substitueerende de uitkomsten in elkander, dan vinden wij

$$\int e^z \delta z = e^z$$
$$\int e^z z^2 \delta z = e^z (z^2 - 2z + 2)$$
$$\int e^z z^4 \delta z = e^z (z^4 - 4z^3 + 3.4z^2 - 2.3.4z + 2.3.4)$$
$$\int e^z z^6 \delta z = e^z (z^6 - 6z^5 + 5.6z^4 - 4.5.6z^3 + 3.4.5.6z^2 - 2.3.4.5.6z + 2.3.4.5.6)$$

enz. *enz.*

waarin de wet van voortgang zeer duidelijk is, en de laatste integraal zal dus worden

$$\int e^z z^{n-2} \delta z = e^z \{z^{n-2} - (n-2) z^{n-3} + (n-3)(n-2) z^{n-4} + enz. \; \dots 1.2.3 \dots (n-2) z + 1.2.3 \dots (n-2)\}$$

Sub-

Subftitnerende nu deze waarden in de vergelijking (1), zoo verkrijgen wij

$$y=\left\{\begin{aligned}&e^{z}\\&+\frac{n-2}{2}e^{z}(z^{2}-2z+2)\\&+\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-4}{4}e^{z}(z^{4}-4z^{3}+3.4z^{2}-2.3.4z+2.3.4)\\&+\frac{n-2}{2}\cdot\frac{n-4}{4}\cdot\frac{n-6}{6}e^{z}(z^{6}-6z^{5}+5.6.z^{4}-4.5.6z^{3}+3.4.5.6z^{2}-2.3.4.5.6z+2.3.4.5.6)\\&+\text{enz.}\\&+e^{z}\{z^{n-2}-(n-2)z^{n-3}+(n-3)(n-2)z^{n-4}-\text{enz.}\ldots+1.2.3\ldots(n-2)\}\end{aligned}\right\}$$

Welke formule gemakkelijk herleid wordt tot

$$y=\left\{\begin{aligned}&e^{z}\{1+(n-2)+3(n-2)(n-4)+3.5.(n-2)(n-4)(n-6)+\text{enz.}+1.2.3\ldots(n-2)\}\\&-ze^{z}\{(n-2)+3(n-2)(n-4)+3.5(n-2)(n-4)(n-6)+\text{enz.}+2.3.4\ldots(n-2)\}\\&+z^{2}e^{z}\{\tfrac{1}{2}(n-2)+\tfrac{1}{2}.3(n-2)(n-4)+\tfrac{1}{2}.3.5(n-2)(n-4)(n-6)+\text{enz.}+3.4.5\ldots(n-2)\}\\&-z^{3}e^{z}\{\tfrac{1}{2}(n-2)(n-4)+\tfrac{1}{2}.5(n-2)(n-4)(n-6)+\text{enz.}+4.5.6\ldots(n-2)\}\\&+\text{enz.}+C\end{aligned}\right\}$$

en

en voor z derzelver waarde, schrijvende

$$\int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,\partial\phi}{Cos.^{n}\,\phi} = \left\{ \begin{array}{l} e^{Tang.\,\phi}\{1+(n-2)+3(n-2)(n-4)+3.5(n-2)(n-4)(n-6)+enz.+1.2.3\ldots(n-2)\} \\ -Tang.\,\phi\, e^{Tang.\,\phi}\{(n-2)+3(n-2)(n-4)+3.5(n-2)(n-4)(n-6)+enz.+2.3.4\ldots(n-2)\} \\ +Tang^{2}.\,\phi\, e^{Tang.\,\phi}\{\tfrac{1}{2}(n-2)+\tfrac{1}{2}.3(n-2)(n-4)+\tfrac{1}{2}.3.5(n-2)(n-4)(n-6)+enz.+3.4.5\ldots(n-2)\} \\ -Tang^{3}.\,\phi\, e^{Tang.\,\phi}\{\tfrac{1}{2}(n-2)(n-4)+\tfrac{1}{2}.5(n-2)(n-4)(n-6)+\tfrac{1}{2}.5.7(n-2)(n-4)(n-6)(n-8)+enz.+ \\ \qquad 4.5\ldots(n-2)\} \\ +\ enz. \\ \pm Tang.^{n-2}\,\phi\, e^{Tang.\,\phi} + C \end{array} \right.$$

Nemen wij tot voorbeeld $n=4$, dan verkrijgen wij

$$\int \frac{e^{Tang.\,\phi}\,\partial\phi}{Cos^{4}.\,\phi} = e^{Tang.\,\phi}\left\{1+2\right\} - Tang.\,\phi\, e^{Tang.\,\phi}\left\{2\right\} + Tang^{2}.\,\phi\, e^{Tang.\,\phi}\left\{1\right\}$$

$$= e^{Tang.\,\phi}\left\{3-2\,Tang.\,\phi+Tang^{2}.\,\phi\right\}$$

even als boven.

Der

DERDE OPLOSSING. *Door* R. LOBATTO.

Men stelle *Tang.* $\phi = x$, dus $\frac{\partial\phi}{Cos^2.\phi} = \partial x$ en $\partial\phi = \partial x\, Cos^2.\phi$, waardoor de differentiaal-uitdrukking verandert in $\frac{e^x \partial\phi}{Cos.^{n-2}\phi}$, of aangezien $\frac{1}{Cos^2.\phi} = 1+x^2$ is, in $e^x\partial x(1+x^2)^{\frac{1}{2}(n-2)}$.

Daar nu n een geheel even getal is, zoo zal ook $\frac{n-2}{2}$ of $\frac{n}{2}-1$, een geheel getal zijn. Men stelle hetzelve gelijk m, dan komt het er op aan, om de formule $e^x(1+x^2)^m$ te integreren.

Men stelle te dien einde $(1+x^2)^m = y$, $\frac{\partial y}{\partial x} = y'$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y'}{\partial x} = y''$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\partial^2 y'}{\partial x^2} = \frac{\partial y''}{\partial x} = y'''$, *enz.* dan hebben wij, volgens de bekende formule voor de herleiding der integralen,

$$\int e^x y\, \partial x = e^x y - \int e^x dy$$

$$\int e^x \partial y = \int e^x y'\, \partial x = e^x y' - \int e^x \partial y'$$

$$\int e^x \partial y' = \int e^x y''\, \partial x = e^x y'' - \int e^x \partial y''$$

$$\int e^x \partial y'' = \int e^x y'''\, \partial x = e^x y''' - \int e^x \partial y'''$$

enz. *enz.* *enz.*

Hieruit volgt dus, door de gevondene integralen in elkander te substitueren,

$$\int e^x y\, \partial x = e^x(y - y' + y'' - y''' + enz)$$

of voor y, y', y'', *enz.* derzelver waarden stellende,

$$\int e^x(1+x^2)^m \partial x = e^x\left(y - \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + enz.\right) \quad . \; . \; . \quad (A)$$

Nu volgt uit $y = (1+x^2)^m$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 2m(1+x^2)^{m-1}x$, $\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = 2m(1+x^2)^{m-1} + 2m(2m-2)(1+x^2)^{m-2}x^2$, *enz.* Stellende dus voor x wederom *Tang.* ϕ en voor m wederom $\frac{n}{2}-1$, dan zal de gevraagde integraal geheel bekend worden,

en

en omdat $y = (1 + x^2)^m$ eene geheele rationale functie is, zal de reeks van quotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, *enz.* uit een eindig aantal termen bestaan.

Nemende, bij voorbeeld, $n = 6$, dan is $m = \frac{n}{2} - 1 = 2$, dus $y = (1 + x^2)^2$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 4(1 + x^2)x$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 4(1 + x^2) + 4.2x^2 = 4 + 12x^2$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 24x$ en $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 24$ en brengende dit in (A) over, komt er

$$\int e^x (1 + x^2)^2 \partial x = e^x (x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 28x + 29)$$

of voor x derzelver waarde *Tang.* ϕ stellende,

$$\int e^{Tang.\phi} \frac{\partial \phi}{Cos^6.\phi} = e^{Tang.\phi} (Tang^4.\phi - 4Tang^3.\phi + 14Tang^2.\phi - 28Tang\,\phi + 29).$$

CLXXX. VOORSTEL.

Door I. P. DELPRAT.

Wanneer eene regte lijn om eene andere regte lijn, die met de eerste niet in hetzelfde vlak gelegen is, als as omwentelt, zoo beschrijft deze lijn, gedurende derzelver beweging, het oppervlak van een omwentelings-ligchaam. Men vraagt naar de vergelijking der kromme lijn, welke ontstaat, wanneer dit oppervlak gesneden wordt door eenig plat vlak, dat door de as gaat?

OPLOSSING. *Door* I. P. DELPRAT.

Zij PQ, Fig. 103, de gegevene lijn, draaijende om de as AB, die wij gemakshalve als verticaal aannemen, dan kan men de stelling van de lijn PQ ten opzigte van de as AB als gegeven aanmerken, wanneer de kortste afstand GG′ van de lijn PQ tot de as AB, benevens de hoek QPM′ van de lijn PQ met derzelver projectie PM′ op een waterpas vlak, bekend is.

Zij verder het vlak BAC, door de as gaande, het snijdende vlak, dan zal men, ingevolge ons voorstel, de vergelijking van de meetkundige plaats der snijpunten van lijn PQ, gedurende der-

derzelver beweging met het vlak BAC voortgebragt, moeten bepalen.

Hiertoe nemen wij in het vlak BAC eene lijn $G'X$, loodregt op AB, en door den voet G' van den kortsten afstand gaande, als as der abscissen aan, terwijl wij de as AB voor as der ordinaten aannemen, en wij stellen $GG' = a$ en $\angle\, QPM'' = \alpha$. Daar nu de kortste afstand GG' loodregt op AB en PQ is, zoo is de lijn GG' ook loodregt op het projecterende vlak MPM'' van de lijn PQ; want de lijn GG' is loodregt op de lijn PQ en op de lijn GG'' evenwijdig aan AB, en dus op twee lijnen in dit vlak getrokken. Trekt men nu de lijn AG'', dan is deze lijn ook loodregt op AB en derhalve evenwijdig aan GG', en dus loodregt op het vlak MPM''; waaruit volgt, dat hoek $AG''M''$ regt, en $AG'' = GG' = a$ is.

Wanneer men nu, uit eenig willekeurig punt M, van de lijn PQ, eene loodlijn MM' op AB trekt, dan is deze lijn mede evenwijdig aan derzelver projectie AM'', omdat MM'' gelijk en evenwijdig met $M'A$ is; doch dan is de hoek $AM''P$ niet meer regt.

Dit nu aangenomen zijnde, zoo onderstellen wij, dat het punt M, door de beweging der lijn PQ om de as AB, een cirkelboog Mm beschreven hebbende, het snijdende vlak BAC in m heeft ontmoet; en dat alzoo m een punt der gezochte kromme is. Indien men dan de lijn mm'' loodregt op $G'X$ trekt, dan zal, volgens den aangenomen oorsprong der coördinaten van de kromme smr, $mn = y$ en $nG' = x$ zijn. Maar nu is $G'n = x = M'm = M'M = AM'' = \sqrt{\{AG''^2 + G''M''^2\}} = \sqrt{(a^2 + G''M''^2)}$ dus $G''M''^2 = x^2 - a^2$. Trekt men nu uit G de lijn Gp loodregt op MM'', dan is $y = mn = mm'' - nm'' = MM'' - GG'' = Mp$; maar nu is hoek $MGp =$ hoek $MPM'' = \alpha$, derhalve $Mp = y = Gp \times Tang.\,\alpha = G''M''.\,Tang.\,\alpha$, zoodat $G''M'' = y\,Cot.\,\alpha$ en $G''M''^2 = y^2\,Cot^2.\,\alpha$. Stellende alzoo de twee gevondene waarden van $G''M''$ aan elkander gelijk, dan verkrijgen wij de vergelijking:

$$y^2\,Cot^2.\,\alpha = x^2 - a^2,$$

of

$$y^2 = Tang^2.\,\alpha.\,(x^2 - a^2) \quad \ldots \quad (1)$$

voor de vergelijking der gezochte kromme.

Deze vergelijking is klaarblijkelijk de middelpunts-vergelijking van eene hyperbool, die a tot halve eerste as heeft, en waarvan de halve tweede as gemakkelijk gevonden wordt; want deze Verge-

lijking in het algemeen $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ zijnde, is $\frac{b^2}{a^2} = Tang^2.\alpha$ en dus $b = a\,Tang.\,\alpha$. De halve eerste as $G'u = G'u'$ is dus gelijk de kortste afstand der twee gegeven lijnen, terwijl de halve tweede as b gevonden wordt door $Pt = a$ te nemen en tv loodregt op Pt te trekken; want dan zal $tv = Pt\,Tang.\,\alpha = b$ zijn.

1°. Aanmerking. De asymptoten der hyperbool gaan klaarblijkelijk door het punt G', en maken met de as der abscissen een' hoek gelijk α; omdat namelijk de tangens van dezen hoek gelijk $\frac{b}{a} = \frac{a\,Tang\,\alpha}{a} = Tang.\,\alpha$ is. De asymptoten van deze hyperbool maken alzoo met $G'X$ denzelfden hoek, als die, welke de bewegende lijn met het horizontale vlak maakt. Wanneer derhalve, gedurende de draaijende beweging van PQ, de kortste afstand GG' loodregt op het vlak B C komt te staan, dan zal in dezen stand de bewegende lijn evenwijdig met de asymptoot wezen en dezelve projectie hebben.

2°. Aanmerking. Omdat in de gevondene vergelijking van de hyperbool de tangens van α alleen in de tweede magt voorkomt, zoo is het klaar, dat wanneer hoek α negatief genomen wordt, de doorsnijding van het vlak BAC met het omwentelingsvlak, door de lijn in dezen nieuwen stand voortgebragt, dezelfde hyperbool zal zijn, welke wij hierboven gevonden hebben. Daar nu, a onveranderd blijvende, het negatief stellen van α, de lijn $P'Q'$ verschaft, waarbij $G'P' = G'P$ is, zoo volgt hieruit, dat de lijnen PQ en $P'Q'$, om de as AB draaijende, volmaakt hetzelfde omwentelingsvlak zullen voortbrengen. Dit gebogen oppervlak is nu hetzelfde als het oppervlak, dat door de omwenteling van de hyperbool sur om de tweede as ontstaat, en dit oppervlak heeft alzoo de merkwaardige eigenschap, dat door elk punt van den cirkel, door den top u beschreven, twee regte lijnen kunnen getrokken worden, welke geheel op het omwentelingsvlak liggen; deze lijnen zullen loodregt op den straal van dit punt staan, en zullen met de raaklijn, aan dit punt van den cirkel, door u voortgebragt, getrokken, hoeken maken, gelijk aan die, welke de asymptoten van de hyperbool met de eerste as maken.

3°. Aanmerking. Wanneer de bewegende lijn door de as gaat en dus $a = 0$ is, dan gaat de vergelijking (1) over in $x = \pm y\,Cot.\,\alpha$; en

en stelt alzoo een stelsel van twee regte lijnen voor, welke ter wederzijde met de as AB eenen hoek $90^\circ - a$ maken; en het voorgestelde omwentelingsvlak gaat bij gevolg voor dit geval in het regte kegelvlak over. — Is de bewegende lijn evenwijdig met de as AB, dan is $a = 90^\circ$; en de vergelijking (1) wordt $x = \pm a$. Dezelve stelt alzoo een stelsel van twee lijnen voor, die evenwijdig met de as loopen, en ter wederzijde op eenen afstand a van dezelve verwijderd zijn, zoodat het omwentelingsvlak alsdan het oppervlak van eenen regten cilinder wordt. — Is eindelijk de rigting van de bewegende lijn loodregt op die van de as, en dus $a = 0$, dan verandert de vergelijking (1) in $y = 0$, dat is in de vergelijking van de regte lijn G'X; gaande het oppervlak alsdan over in een plat vlak, loodregt op AB.

CLXXXI. VOORSTEL.

Door C. F. JULIUS.

Wanneer men de letters van het alphabeth uitdrukt door de getallen 1, 2, 3 enz. tot 26, dan hebben de getallen, welke de achtervolgende vijf letters voorstellen van eenen geslachtnaam, die in de vaderlandsche geschiedenis beroemd is, de volgende eigenschappen: de helft van het tweede is een quadraat, het vijfde is mede een quadraat, en de som van het eerste en vijfde, van het eerste, vierde en vijfde, en van het eerste, derde, vierde en vijfde, zijn eveneens quadraten. Stellen wij deze quadraten voor door a^2, b^2, c^2, d^2 en e^2, dan is $b + c + d + e$ al wederom een quadraat; en stellen wij eindelijk den wortel van dit laatste quadraat gelijk f, dan klimmen de getallen a, b, f, c, d en e met de eenheid op. Men vraagt hierdoor den bedoelden geslachtnaam te vinden?

OPGELOST door C. F. JULIUS, A. VAN DER SWAN, R. VAN WIJK Jz. en W. TOP Wz.

OPLOSSING van C. F. JULIUS.

Omdat a^2, b^2, f^2, c^2, d^2 en e^2 achtervolgende quadraten zijn, kunnen wij derzelver wortels voorstellen door a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$ en $a+5$; en omdat $b+c+d+e = f^2$ moet wezen, geeft dit de vergelijking:

$$(a+1)+(a+3)+(a+4)+(a+5)=(a+2)^2$$

of

$$4a+13=a^2+4a+4$$

 dat

dat is $a^2 = 9$ en $a = 3$.
en hieruit volgt dus, dat wij hebben:

$$a^2 = 9, b^2 = 16, f^2 = 25, c^2 = 36, d^2 = 49, e^2 = 64.$$

Daar a^2 de helft van de tweede letter is, zoo is de tweede letter 18 of R.

Daar verder b^2 de vijfde letter voorstelt, zoo is deze vijfde letter 16 of P.

Voorts is c^2 of 36 de som van de eerste en vijfde letter, en daar wij voor de vijfde vonden 16, zoo is de eerste letter 20 of T.

Vervolgens is d^2 of 49 de som van de eerste, vierde en vijfde letter; maar de som van de eerste en vijfde is 36: dus is de vierde letter 13 of M.

Eindelijk is e^2 of 64 de som van de eerste, derde, vierde en vijfde letter; maar de som van de eerste, vierde en vijfde letter is 49: dus is de derde letter 15 of O.

Uit dit alles volgt dan, dat TROMP de gevraagde geslachtnaam is.

CLXXXII. VOORSTEL.

Door C. F. JULIUS.

Van een zeker regthoekig stuk lands, waarvan de breedte tot de lengte in reden is als 8 tot 9, wordt een regthoekig gedeelte met boomen beplant, en het overige deel met zoden belegd. De lengte van het met boomen beplante deel, hetwelk een twaalfde gedeelte van het geheele stuk gronds uitmaakt, is 24 voeten, en om het overige deel te beleggen heeft men een quadraat getal zoden noodig, waarvan de wortel twee cijferletters heeft. Deelt men den inhoud van het met boomen beplante deel door 64, dan is het quotient gelijk aan het aantal tientallen van dezen wortel; trekt men verder het aantal zoden af van den inhoud des geheelen stuks gronds, en deelt men dit verschil door gezegden wortel, dan is het quotient gelijk aan tweemaal het aantal eenheden van dezen wortel. Eindelijk geeft het product der beide cijfers van dezen wortel, gedeeld in den inhoud van het met boomen beplante deel, 16 tot quotient. Hoe lang en breed was dit stuk land, hoeveel zoden heeft men gebruikt, en welke was de oppervlakte van elke zode?

Op-

Opgelost door C. F. Julius, A. van der Swan, W. Top Wz. en R. van Wijk Jz.

Oplossing van C. F. Julius.

Stel de breedte van het ſtuk land $8x$, dan is de lengte $9x$ en dus de inhoud $72x$. Stel verder de breedte van het met boomen beplante deel y, dan is, omdat de lengte gelijk 24 voet gegeven is, de inhoud van dit deel $24y$. Stel eindelijk den wortel van het aantal zoden $10z+u$, dan is dit aantal zoden $(10z+u)^2$, en de voorwaarden van het vraagſtuk worden woordelijk uitgedrukt door de volgende vergelijkingen:

$$24y=\frac{1}{12}\times72x^2 \ldots (1), \quad \frac{24y}{64}=z \ldots (2),$$

$$\frac{72x^2-(10z+u)^2}{10z+u}=2u \ldots (3), \quad \frac{24y}{zu}=16 \ldots (4).$$

De tweede geeft $z=\frac{3}{8}y$, en brengende deze waarde in de vierde over, dan vinden wij terſtond $u=4$, en daar uit de eerſte volgt $x^2=4y$, zoo verkrijgen wij, door deze waarden van z, u en x^2 in de derde over te brengen

$$72.4y-(\tfrac{15}{4}y+4)^2=8(\tfrac{15}{4}y+4),$$

of

$$225y^2-3648y+768=0,$$

waaruit $y=16$ of $y=\frac{16}{75}$. De laatſte waarde zou echter voor z een gebroken getal geven, en daar dit niet ſtrookt met den aard van het vraagſtuk, nemen wij $y=16$, waardoor $z=\frac{3}{8}y=6$, en $x^2=4y=64$ dus $x=8$; daar nu $u=4$ gevonden is, zoo is het aantal zoden $(10z+u)^2=64\times64=4096$.

De lengte en breedte van het ſtuk land zijn verder $8x=64$ en $9x=72$ voeten, zoodat de inhoud 4608 vierkante voeten is.

De inhoud van het met boomen beplante deel is $24y=24\times16$ $=384$ vierkante voeten, en er blijft dus $4608-384$ of 4224 vierkante voeten voor het met zoden belegde deel. Deze inhoud door het aantal zoden, dat is door 4096 deelende, komt er $\frac{33}{32}$ of $1\frac{1}{32}$ vierkante voet voor het oppervlak van elke zode.

CLXXXIII. Voorstel.

Door C. F. Julius.

Twee rationale quadraten te vinden, zoodanig, dat $\frac{11}{12}$ van het klein-

kleinste opgeteld met $\frac{1}{4}$ van het grootste, wederom een quadraat zij, waarvan de wortel rekenkundig middenevenredig is tusschen de wortels van de gevraagde quadraten?

Opgelost *door* C. F. Julius, G. Brandsteder, W. Tor Wz., A. van der Swan en R. van Wijk Jz.

Oplossing *van* C. F. Julius.

Stellen wij de wortels der drie quadraten, waarvan in de opgaaf gesproken wordt,

$$x,\quad x+y \text{ en } x+2y,$$

dan is hierdoor aan de laatste voorwaarde voldaan, en de eerste zal worden uitgedrukt door de vergelijking:

$$\tfrac{11}{12}x^2+\tfrac{1}{4}(x+2y)^2=(x+y)^2,$$

of

$$11x^2+3(x+2y)^2=12(x+y)^2.$$

Deze vergelijking ontwikkelende en herleidende, komt er, na door 2 gedeeld te hebben,

$$x^2=6xy,\text{ of } x=6y,$$

waaruit volgt, dat de wortels der gevraagde quadraten zullen zijn:

$$x=6y \text{ en } x+2y=8y,$$

zoodat de gevraagde quadraten zullen worden voorgesteld door $36y^2$ en $64y^2$, waarin men nu voor y een getal naar welgevallen kan aannemen.

Wil men voor deze quadraten geheele getallen hebben, dan stelle men $y=\frac{1}{2}z$, en men verkrijgt voor de wortels $x=3z$ en $x+2y=4z$, en nu zal men al de mogelijke antwoorden in geheele getallen bekomen, door voor z alle mogelijke geheele getallen aan te nemen.

Zoo geeft $z=1$, $x=3$ en $x+2y=4$, en de quadraten worden dan 9 en 16, zijnde werkelijk $\frac{11}{12}\times 9+\frac{1}{4}\times 16=\frac{49}{4}=\left(\frac{4+3}{2}\right)^2$.

Neemt men $z=2$, dan is $x=6$ en $x+2y=8$, en de quadraten zijn 36 en 64, zijnde werkelijk $\frac{11}{12}\times 36+\frac{1}{4}\times 64=49$ $=\left(\frac{6+8}{2}\right)^2$, enz.

Verkiest men eindelijk, dat ook het derde quadraat een geheel getal zij, dan merke men op, dat door de stelling van $x=6y$ de wortel van dit derde quadraat overgaat in $x+y=7y$, en dat

de

de drie wortels alsdan worden voorgesteld door: $x=6y$, $x+y=7y$ en $x+2y=8y$, en nu moet men voor y een geheel getal naar welgevallen aannemen. Het kleinste antwoord ontstaat dan uit $y=1$, en geeft voor de quadraten 36, 49 en 64.

CLXXXIV. VOORSTEL.

Door G. J. SARLET.

Een zeshoekig getal bestaat uit drie cijferletters. De zijde of wortel van hetzelve is gelijk aan de som der cijferletters; verder is de vierkantswortel uit die som gelijk de laatste cijferletter; eindelijk is de laatste cijferletter gelijk aan den vierkantswortel uit 9 maal de eerste cijferletter. Men vraagt dit zeshoekig getal te vinden.

OPGELOST door G. J. SARLET, M. B. JUNG, R. VAN WIJK JZ., C. F. JULIUS en A. VAN DER SWAN.

OPLOSSING van G. J. SARLET.

Stellen wij het zeshoekig getal door $100x+10y+z$ voor, dan is de som der cijferletters $x+y+z$, en daar deze som de zijde of wortel van het zeshoekig getal moet zijn, geeft dit de vergelijking:

$$2(x+y+z)^2-(x+y+z)=100x+10y+z \quad \ldots (1)$$

terwijl de overige voorwaarden van het vraagstuk worden uitgedrukt door

$$x+y+z=z^2 \quad \ldots (2) \quad \text{en} \quad 9x=z^2 \quad \ldots (3).$$

De twee waarden van z^2 aan elkander gelijk stellende, verkrijgen wij

$$y+z=8x \quad \ldots (4)$$

en brengende deze waarde van $y+z$ over in (1), dan komt er

$$2.81x^2-9x=108x+9y,$$

waaruit

$$y=18x^2-13x,$$

en daaruit (4) $z=8x-y$ is, zoo is

$$z=21x-18x^2.$$

Brengende deze waarde van z in (3) over, dan verkrijgen wij

$$9x=(21x-18x^2)^2,$$

of

$$9x=9x^2(7-6x)^2,$$

dus

$$1=x(49-84x+36x^2),$$

dat is

$$36x^3-84x^2+49x-1=0.$$

De

De wortels dezer vergelijking zijn $x = 1$, $x = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{15}$ en $x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{15}$. Daar echter x het aantal honderdtallen van het zeshoekig getal voorstelt, kan hetzelve geen onmeetbaar getal wezen, en wij bepalen ons alzoo tot $x = 1$.

Nemende dan $x = 1$, is $y = 18x^2 - 13x = 5$ en $z = 21x - 18x^2 = 3$, zoodat 153 het begeerde getal is.

CLXXXV. VOORSTEL.

Door G. J. SARLET.

Vier getallen te vinden, welke de volgende eigenschappen hebben. Het product van het eerste en derde is gelijk de som van het eerste en tweede. Het product van het eerste en tweede is gelijk de som van het derde en vierde. De som van het eerste en vierde is gelijk de som van het tweede en derde. Eindelijk is het product van het tweede en derde gelijk aan dat van het derde en vierde verminderd met de som van het eerste en tweede?

OPGELOST *door* W. TOP WZ., M. B. JUNG, C. F. JULIUS, G. J. SARLET, A. VAN DER SWAN, R. VAN WIJK JZ. en B. BEKKING.

OPLOSSING *van* W. TOP WZ.

Stellen wij de getallen v, x, y en z, dan worden de voorwaarden van het vraagstuk door de volgende vergelijkingen uitgedrukt:

$$vy = v + x \quad \ldots \quad (1) \qquad v + z = x + y \quad \ldots \quad (3)$$
$$vx = y + z \quad \ldots \quad (2) \qquad xy = yz - (v + x) \quad \ldots \quad (4)$$

De eerste vergelijking bij de vierde tellende en de som door y deelende, komt er

$$v + x = z \quad \ldots \quad (5)$$

deze vergelijking bij de derde tellende, verkrijgen wij

$$y = 2v \quad \ldots \quad (6)$$

welke waarde van y, in de eerste overgebragt, geeft

$$x = 2v^2 - v \quad \ldots \quad (7)$$

terwijl de vijfde hierdoor verandert in

$$z = 2v^2 \quad \ldots \quad (8)$$

Brengende nu de waarden van y, x en z, in (6), (7) en (8) gevonden, over in (2), dan verkrijgen wij tot eindvergelijking

$2v^3 -$

$$2y^3 - y^2 = 2y + 2y^2,$$

of door y deelende en herleidende,

$$2y^2 - 3y - 2 = 0,$$

uit welke vierkantsvergelijking gevonden wordt $v = 2$ of $v = -\frac{1}{2}$.

Nemende $v = 2$, dan is $y = 2v = 4$, $x = 2v^2 - v = 6$ en $z = 2v^2 = 8$, en de gevraagde getallen zijn derhalve 2, 6, 4 en 8.

Nemende daarentegen $v = -\frac{1}{2}$, dan is $y = 2v = -1$, $x = 2v^2 - v = 1$ en $z = 2v^2 = \frac{1}{2}$, en wij verkrijgen dus tot tweede antwoord de getallen $-\frac{1}{2}$, 1, -1, en $\frac{1}{2}$.

CLXXXVI. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Drie getallen te vinden, zoodanig, dat het vierkant van hunne som, opgeteld met elk van dezelve, de drie sommen rationale quadraten zijn? (37)

OPGELOST *door* H. G. WITLAGE JR., M. B. JUNG, R. VAN WIJK JZ., C. F. JULIUS, G. BRANDSTEDER, W. TOP WZ. en P. DE VRIES.

Stel de getallen x, y en z, en derzelver som $x + y + z = s$; dan moeten $s^2 + x$, $s^2 + y$ en $s^2 + z$ rationale quadraten zijn. Wij stellen alzoo

$$s^2 + x = a^2 s^2, \quad s^2 + y = b^2 s^2 \text{ en } s^2 + z = c^2 s^2,$$

en dan geeft de som dezer vergelijkingen

$$3s^2 + s = (a^2 + b^2 + c^2) s^2,$$

en deze vergelijking door s deelende, komt er

$$3s + 1 = (a^2 + b^2 + c^2) s,$$

waaruit

$$s = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 - 3}.$$

Nu is uit de drie aangenomene vergelijkingen

$$x = (a^2 - 1) s^2, \quad y = (b^2 - 1) s^2, \quad z = (c^2 - 1) s^2,$$

en brengende hierin de gevondene waarde van s, dan komt er

$$x = \frac{a^2 - 1}{(a^2 + b^2 + c^2 - 3)^2}$$

$y =$

(37) O. S. BANGMA, *Algebra*, bl. 267. N°. 89.

$$y=\frac{b^2-1}{(a^2+b^2+c^2-3)^2}$$

$$z=\frac{c^2-1}{(a^2+b^2+c^2-3)^2}$$

welke waarden aan het vraagſtuk voldoen, omdat dezelve geven

$$s^2+x=\left(\frac{a}{a^2+b^2+c^2-3}\right)^2$$

$$s^2+y=\left(\frac{b}{a^2+b^2+c^2-3}\right)^2$$

$$s^2+z=\left(\frac{c}{a^2+b^2+c^2-3}\right)^2$$

In deze formulen voor x, y en z kunnen nu a, b en c naar welgevallen genomen worden. Nemen wij, bij voorbeeld, $a=2$, $b=3$ en $c=4$, dan is $x=\frac{3}{676}$, $y=\frac{8}{676}$ en $z=\frac{15}{676}$.

CLXXXVII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Drie getallen te vinden, zoodanig, dat het vierkant van hunne ſom met elk der getallen verminderd, de drie resten rationale quadraten zijn? (38)

OPGELOST *door* H. G. WITLAGE JR., M. B. JUNG, C. F. JULIUS, R. VAN WIJK JZ., G. BRANDSTEDER, W. TOP WZ. en P. DE VRIES.

OPLOSSING *van* H. G. WITLAGE JR.

Stel de getallen x, y en z en derzelver ſom $x+y+z=s$, dan moeten s^2-x, s^2-y en s^2-z rationale quadraten zijn; wij ſtellen alzoo

$$s^2-x=a^2s^2,\ s-y=b^2s^2 \text{ en } s^2-z=c^2z^2,$$

en dan is de ſom dezer vergelijkingen

$$3s^2-s=(a^2+b^2+c^2)s^2,$$

of door s deelende, en s afzonderende,

$$s=\frac{1}{3-(a^2+b^2+c^2)}$$

waaruit wij voor de drie getallen vinden

$x=$

(38) *Idem*; N°. [illegible]

$$x = (1 - a^2)s^2 = \frac{1 - a^2}{(3 - (a^2 + b^2 + c^2))^2}$$

$$y = (1 - b^2)s^2 = \frac{1 - b^2}{(3 - (a^2 + b^2 + c^2))^2}$$

$$z = (1 - c^2)s^2 = \frac{1 - c^2}{(3 - (a^2 + b^2 + c^2))^2}$$

welke waarden aan het vraagstuk voldoen, omdat zij geven,

$$s^2 - x = \left(\frac{a}{3 - (a^2 + b^2 + c^2)}\right)^2$$

$$s^2 - y = \left(\frac{b}{3 - (a^2 + b^2 + c^2)}\right)^2$$

$$s^2 - z = \left(\frac{c}{3 - (a^2 + b^2 + c^2)}\right)^2$$

In de formulen voor x, y en z kan men a, b en c naar welgevallen aannemen; doch om voor x, y en z positieve getallen te vinden, zal men a, b en c kleiner dan de eenheid moeten nemen. Nemen wij tot voorbeeld $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{3}$ en $c = \frac{1}{4}$, dan verkrijgen wij voor de getallen $x = \frac{3}{4} \times (\frac{144}{371})^2$, $y = \frac{8}{9} \times (\frac{144}{371})^2$ en $z = \frac{15}{16} \times (\frac{144}{371})^2$.

CLXXXVIII. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Een' gegeven' driehoek in twee gelijke deelen te verdeelen, door eene regte lijn, welke evenwijdig loopt met eene gegevene lijn? (39)

OPGELOST *door* W. TOP WZ., H. G. WITLAGE JR. en R. VAN WIJK JR.

OPLOSSING *van* W. TOP WZ.

Laat ABC, Fig. 104, de gegeven driehoek en PQ de gegevene lijn zijn, waaraan de gevraagde lijn evenwijdig moet loopen. Indien dan de lijn AF, evenwijdig met PQ getrokken, de zijde BC in twee gelijke deelde, is het klaar, dat dezelve de begeerde deellijn zou wezen. Deelt daarentegen deze lijn AF de zijde BC in ongelijke deelen, dan is het klaar, dat de deelen ABF en ACF mede ongelijk zullen zijn; want deze driehoeken gelijke hoogte heb-

(39) J. DE GELDER, *Handl. tot de Besch. en Werkd. Meetk. bl.* 171. N.52.

hebbende, ſtaan tot elkander in reden als de deelen BF en FC van BC. Hieruit volgt dan ten duidelijkſte, dat de gevraagde deellijn DE zoodanig zal moeten getrokken worden, dat zij niet het kleinſte ſtuk FC, maar het grootſte ſtuk BF doorſnijdt.

Daar verder driehoek ABC en PQ bekend zijn, is ook BF eene bekende lijn, en wij kunnen alzoo $AB = a$, $BC = b$ en $BF = c$ ſtellen. Stellende dan $BE = x$, hebben wij vooreerst

$$AB : BD = FB : EB,$$

of $$a : BD = c : x,$$

waaruit $$BD = \frac{a}{c}x,$$

Omdat eindelijk de driehoeken ABC en DBE den hoek B gemeen hebben, zijn derzelver inhouden en reden als $AB \times BC$ tot $DB \times BE$; maar volgens het vraagſtuk moeten deze driehoeken tot elkander in reden zijn als 2 tot 1, en hieruit volgt

$$AB \times BC : DB \times BE = 2 : 1,$$

of $$ab : \frac{a}{c}x \times x = 2 : 1,$$

dus $$\frac{2ax^2}{c} = ab \quad \text{of} \quad x^2 = \tfrac{1}{2}bc.$$

Daar alzoo $BE^2 = \frac{1}{2} BC \times BF$ moet wezen, hebben wij alleen BE middenevenredig tuſſchen $\frac{1}{2}$BC en BF te nemen, en vervolgens ED evenwijdig AF te trekken, en dan zal DE de begeerde deellijn zijn.

CLXXXIX. VOORSTEL.

Door H. G. WITLAGE JR.

Men vraagt een punt binnen eenen gegeven' driehoek te vinden, zoodanig, dat trekkende uit hetzelve loodlijnen op de drie zijden, de driehoek hierdoor in drie vierhoeken verdeeld is, waarvan de inhouden tot elkander in gegevene reden ſtaan? (40)

OPLOSSING *door* I. R. SCHMIDT.

In het 123ſte Voorſtel van het eerſte deel onzer *Wiskunſtige Oefeningen* is door toenmalige Beſtuurders aangetoond, hoe het ge-

(40) *Idem*, No. 54.

gevraagde punt door de onderlinge snijding van twee gelijkzijdige hyperbolen kan gevonden worden, en dat, aangezien twee hyperbolen elkander in vier punten kunnen doorsnijden, het vraagstuk in het algemeen voor vier verschillende antwoorden vatbaar is. Het is hieruit reeds meer dan waarschijnlijk, dat ons vraagstuk, door berekening opgelost, tot eene vergelijking van den vierden graad zal moeten voeren, en wij stellen ons dus voor, deze stelkunstige oplossing te ontwikkelen.

Zij alzoo ABC, Fig. 105, de gegeven driehoek, en stellen wij, dat P het gevraagde punt is. Indien dan de vierhoeken BFPE, CDPE en AFPD tot elkander in reden moeten wezen als p, q en r, dan zullen deze vierhoeken tot den gegeven driehoek in reden zijn als de getallen p, q en r tot $p+q+r$, zoodanig, dat wij zullen hebben:

$$\text{BFPE} = \frac{p}{p+q+r} . \triangle \text{ABC}; \quad \text{CDPE} = \frac{q}{p+q+r} . \triangle \text{ABC};$$

$$\text{AFPD} = \frac{r}{p+q+r} . \triangle \text{ABC}.$$

Stellen wij alzoo $\frac{p}{p+q+r} = m$ en $\frac{q}{p+q+r} = n$, dan zullen wij het punt P zoodanig moeten bepalen, dat

$$\text{BFPE} = m . \triangle \text{ABC} \quad \text{en} \quad \text{CDPE} = n . \triangle \text{ABC}$$

is, en hierdoor zal dan van zelf aan de derde voorwaarde voldaan zijn.

Om hiertoe te geraken, stellen wij AB $= c$, AC $= b$, BC $= a$, BE $= x'$, EC $= x$, BF $= y'$, CD $= y$, FP $= u'$ en DP $= u$. Trekkende alsdan DH loodlegt op BC en PG loodregt op DH, dan is DH $= y$ *Sin.* C en, omdat $\angle$PDC regt zijnde $\angle$PDG $=$ C is, DG $= u$ *Cos.* C; waaruit, aangezien PE $=$ DH $-$ DG is, volgt

$$z = y \, Sin.\, C - u \, Cos.\, C.$$

Verder is HC $= y$ *Cos.* C en PG $= u$ *Sin.* C, en daar EC $=$ PG $+$ HC is, geeft ons dit

$$x = y \, Cos.\, C + u \, Sin.\, C.$$

Losfen wij uit deze vergelijkingen de waarde y en u op, dan vinden wij gemakkelijk

$$u = x \, Sin.\, C - z Cos.\, C \quad \text{en} \quad y = z \, Sin.\, C + x \, Cos.\, C.$$

Nu wordt de inhoud van vierhoek CDPE, als uit de som van twee regthoekige driehoeken bestaande, klaarblijkelijk uitgedrukt door

door $\frac{1}{2}(xz+uy)$, en daar deze inhoud gelijk moet zijn aan n △ ABC of $\frac{n}{2}ab\,Sin.\,C$, zoo verkrijgen wij de vergelijking

$$xz+uy=nab\,Sin.\,C\,,$$

en brengende hierin de gevondene waarden van u en y over, dan komt er

$$xz+(x\,Sin.\,C-z\,Cos.\,C)(z\,Sin.\,C+x\,Cos.\,C)=nab\,Sin.\,C\,,$$

welke vergelijking ontwikkeld en herleid zijnde, overgaat in

$$(x^2-z^2)\,Cos.\,C+2xz\,Sin.\,C=nab \quad . \quad . \quad (I)$$

Daar de vierhoek BFPE met den voorgaanden alleen in de accenten verschilt, welke bij de letters staan, is het klaar, dat wij eveneens zullen moeten vinden

$$(x'^2-z^2)\,Cos.\,B+2x'z\,Sin.\,B=mac \quad . \quad . \quad (II)$$

en voegen wij hierbij de vergelijking

$$x+x'=a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (III)$$

dan hebben wij drie vergelijkingen met de drie onbekenden x, x' en z, en het zal er dus alleen op aankomen, om twee dezer onbekenden te elimineren.

De laatste vergelijking geeft ons onmiddellijk aanleiding, om tot twee vergelijkingen met twee onbekenden te geraken. Want stellende $x=\frac{1}{2}a+v$, dan is $x'=\frac{1}{2}a-v$, en dan is v de afstand van het punt E tot het midden M van BC. Deze stelling doet de vergelijkingen (I) en (II) overgaan in

$$\left\{(\tfrac{1}{2}a+v)^2-z^2\right\}Cos.\,C+2(\tfrac{1}{2}a+v)z\,Sin.\,C=nab \quad . \quad (1)$$

en $$\left\{(\tfrac{1}{2}a-v)^2-z^2\right\}Cos.\,B+2(\tfrac{1}{2}a-v)z\,Sin.\,B=mac \quad . \quad . \quad (2)$$

Deelende de eerste door $Cos.\,C$ en de tweede door $Cos.\,B$, dan verkrijgen wij

$$(\tfrac{1}{2}a+v)^2-z^2+(a+2v)z\,Tang.\,C=nab\,Sec.\,C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

en $$(\tfrac{1}{2}a-v)^2-z^2+(a-2v)z\,Tang.\,B=mac\,Sec.\,B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

waarvan het verschil is

$$2av+z\left\{a(Ta.\,C-Ta.\,B)+2v(Ta.\,C+Ta.\,B)\right\}=a(nb\,Sec.\,C-mc\,Sec.\,B)\,;$$

en zonderende hieruit z af, dan vinden wij

$$z=\frac{a(nb\,Sec.\,C-mc\,Sec.\,B)-2av}{a(Tang.\,C-Tang.\,B)+2v(Tang.\,C+Tang.\,B)}$$

$$\text{of } z=a\times\frac{nb\,Cos.\,B-mc\,Cos.\,C-2v\,Cos.\,B\,Cos.\,C}{a\,Sin.\,(C-B)+2v\,Sin.\,(C+B)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Schrijven wij de vergelijkingen (3) en (4) onder den vorm:

$z^2=$

$$z^2 = 2\left(\tfrac{1}{2}a+v\right) z\, Tang.\, C + \left(\tfrac{1}{2}a+v\right)^2 - n\,a\,b\, Sec.\, C$$

$$\text{en } z^2 = 2\left(\tfrac{1}{2}a-v\right) z\, Tang.\, B + \left(\tfrac{1}{2}a-v\right)^2 - m\,a\,c\, Sec.\, B,$$

vermenigvuldigen wij de eerste met $\left(\frac{1}{2}a - v\right)^2 - m\,a\,c\, Sec.\, B$ en de tweede met $\left(\frac{1}{2}a+v\right)^2 - n\,a\,b\, Sec.\, C$, en nemen wij het verschil der uitkomsten, dan zal dit verschil door z deelbaar zijn, en wij zullen dus eene tweede waarde van z verkrijgen, namelijk

$$z = 2 \times \frac{\left(\tfrac{1}{2}a+v\right)\left\{\left(\tfrac{1}{2}a-v\right)^2 Cos.\, B - m\,a\,c\right\} Sin.\, C - \left(\tfrac{1}{2}a-v\right)\left\{\left(\tfrac{1}{2}a+v\right)^2 Cos.\, C - n\,a\,b\right\} Sin.\, B}{a\left\{n\,b\, Cos.\, B - m\,c\, Cos.\, C - 2\,v\, Cos.\, B\, Cos.\, C\right\}}$$

Stellende dus deze waarden van z aan elkander gelijk, dan verkrijgen wij eene vergelijking in v; namelijk

$$\frac{a\left\{n\,b\, Cos.\, B - m\,c\, Cos.\, C - 2\,v\, Cos.\, B\, Cos.\, C\right\}}{a\, Sin.\,(C-B) + 2\,v\, Sin.\,(C+B)} = \ldots\ldots$$

$$2 \times \frac{\left(\tfrac{1}{2}a+v\right)\left\{\left(\tfrac{1}{2}a-v\right)^2 Cos.\, B - m\,a\,c\right\} Sin.\, C - \left(\tfrac{1}{2}a-v\right)\left\{\left(\tfrac{1}{2}a+v\right)^2 Cos.\, C - n\,a\,b\right\} Sin.\, B}{a\left\{n\,b\, Cos.\, B - m\,c\, Cos.\, C - 2\,v\, Cos.\, B\, Cos.\, C\right\}},$$

of wanneer wij alles met het product der noemers vermenigvuldigen,

$$a^2\left\{n\,b\, Cos.\, B - m\,c\, Cos.\, C - 2\,v\, Cos.\, B\, Cos.\, C\right\}^2 = 2\left\{a\, Sin.\,(C-B) + 2\,v\, Sin.\,(C+B)\right\} \ldots$$

$$\times \left\{\left(\tfrac{1}{2}a+v\right)\left\{\left(\tfrac{1}{2}a-v\right)^2 Cos.\, B - m\,a\,c\right\} Sin.\, C - \left(\tfrac{1}{2}a-v\right)\left\{\left(\tfrac{1}{2}a+v\right)^2 Cos.\, C - n\,a\,b\right\} Sin.\, B\right\}$$

Ontwikkelt men nu de leden dezer vergelijking, dan zal men, na behoorlijke herleiding der termen en in aanmerking nemende, dat $b = \frac{a\, Sin\, B}{Sin.\,(B+C)}$ en $c = a\,\frac{Sin.\, C}{Sin.\,(B+C)}$ is, eindelijk nederkomen op eene vergelijking van den vorm

$$Pv^4 + Qv^2 + Rv + S = 0$$

waarin P, Q, R en S de volgende formulen voorstellen:

$$P = 4\, Sin^2.(B+C)$$

$$Q = -2a^2 \{Cos^2.C + Cos^2.B + 2m\, Sin^2.C + 2n\, Sin^2.B\}$$

$$R = 4a^3 \times \frac{n\, Sin.B\, Cos.C - m\, Sin.C\, Cos.B}{Sin.(B+C)}$$

$$S = a^4 \Big\{ \tfrac{1}{4} Sin^2.(C-B) - (m\, Sin^2.C - n\, Sin^2.B) \frac{Sin.(C-B)}{Sin.(B+C)}$$

$$\ldots\ldots - \frac{(m\, Sin.C\, Cos.C - n\, Sin.B\, Cos.B)^2}{Sin^2.(B+C)} \Big\}$$

en uit deze vierde magtsvergelijking zal nu v gevonden kunnen worden, zoodra de bekenden in getallen gegeven zijn.

1°. Aanmerking. Zijn de hoeken B en C even groot, dan wordt de vergelijking veel eenvoudiger; want dan verkrijgen wij

$$P = 4\, Sin^2.2B;\ Q = -4a^2 \{Cos^2.B + (m+n)\, Sin^2.B\}$$

$$R = 2(n-m)a^3,\ S = -\tfrac{1}{4}a^4 (m-n)^2\, Tang^2.B.$$

2°. Aanmerking. Is de driehoek gelijkzijdig, dan moeten wij in de formulen van de 1°. Aanmerking $B = 60^\circ$ stellen, en dit geeft

$$P = 3,\ Q = -a^2(3m+3n+1),\ R = 2(n-m)a^3,\ S = -\tfrac{3}{4}a^4(m-n)^2$$

en de vergelijking is alsdan

$$v^4 - a^2(m+n+\tfrac{1}{3})v^2 + \tfrac{2}{3}a^3(n-m)v - \tfrac{1}{4}a^4(n-m)^2 = 0.$$

3°. Aanmerking. Moeten de drie vierhoeken even groot zijn, dan moeten wij in de algemeene vergelijking $m = n = \frac{1}{3}$ stellen, en dit geeft ons

$$P = 4\, Sin^2.(B+C),\ Q = -2a^2(2 - \tfrac{1}{3}(Sin^2.C + Sin^2.B)),$$

$$R = \tfrac{4}{3}a^3 . \frac{Sin.(B-C)}{Sin.(B+C)},\ S = -\tfrac{1}{36}a^4 \frac{Sin.^2(C-B)}{Sin^2.(C+B)}(3 + Cos^2.(C+B)).$$

4°. Aanmerking. Stelt men $v = at$, dat is, deelt men Q, R en S achtervolgens door a^2, a^3 en a^4, dan verkrijgt men eene vergelijking in t, welke alleen van de bekende hoeken B en C benevens de getallen m en n afhangt.

5°. Aanmerking. Slechts een der vier wortels van de vergelijking lost het vraagstuk in den volstrekten zin op, en de andere geven tot oneigenlijke oplossingen aanleiding. Een enkel voorbeeld zal dit duidelijk doen inzien. Stellen wij den driehoek gelijkzijdig en onderstellen wij, dat de drie vierhoeken even groot moe-

moeten zijn, dan is het klaar, dat het gevraagde punt in het middelpunt des ingeschrevenen cirkels, dat is, in het doorsnijdingspunt der loodlijnen, moet vallen. Voor dit geval moeten wij nu, in de formulen van de tweede aanmerking, $m = n = \frac{1}{3}$ stellen, en dit geeft de vergelijking $y^4 - a^2 y^2 = 0$, waaruit $y = 0$ en $y = \pm a$. De eerste waarde van y maakt, in onze onderstelling, $z = \frac{1}{6} a \sqrt{3}$, terwijl de twee laatste beide $z = -\frac{1}{6} a \sqrt{3}$ maken, en wij hebben dus in ons geval drie oplossingen, namelijk:

$$y = 0, \qquad y = +a, \qquad y = -a$$
$$z = \frac{1}{6} a \sqrt{3}, \quad z = -\frac{1}{6} a \sqrt{3}, \quad z = -\frac{1}{6} a \sqrt{3}.$$

De eerste waarde van y doet E, *Fig.* 106, in het midden M van BC vallen, en geeft EP $= \frac{1}{3}$ AM, omdat AM $= \frac{1}{2} a \sqrt{3}$ is. Deze oplossing beantwoordt dus regtstreeks aan de vraag, en geeft juist het doorsnijdingspunt der loodlijnen.

Voor de tweede oplossing moeten wij ME$'' = a =$ BC en dus BE$'' =$ BE maken, en vervolgens E$''$ P$''$, beneden BC en gelijk EP nemen. Het is klaar, dat alsdan de vierhoek BE$''$P$''$F$''$ gelijk vierhoek BEPF en dus gelijk een derde van driehoek ABC wordt, en deze inhoud zal nu zoo wel als de inhoud van vierhoek BEPF als positief moeten worden aangezien, omdat, BE$''$, BF$''$, P$''$E$''$ en P$''$F$''$ alle tegengestelde teekens als BE, BF, PE en PF hebbende, de driehoeken BE$''$P$''$ en BF$''$P$''$; en dus ook derzelver som, positief worden. — Het punt P in P$''$ vallende, gaat vierhoek PECD, welke gelijk aan het verschil der driehoeken BDC en BPE is, over in P$''$E$''$CD$''$, dat is in het verschil der driehoeken BD$''$C en BE$''$P$''$. Dit verschil, dat klaarblijkelijk gelijk vierhoek PDEC en dus een derde van driehoek ABC is, moet dus hier als de tweede vierhoek worden aangemerkt. — Op dezelfde wijze is hier de derde vierhoek het verschil tusschen de driehoeken BD$''$A en BP$''$F$''$, en het is klaar, dat dit verschil gelijk vierhoek FPDA is.

Voor de derde oplossing moet EE$' = a =$ BC, en E$'$P$' =$ EP gemaakt worden, en de verklaring is dan dezelfde als die van de voorgaande oplossing. Meer zamengestelde voorbeelden worden op eene gelijksoortige wijze verklaard.

CXC. Voorstel.

Door B. Bekking.

Een zeker jaartal bestaat uit vier getalmerken. De som der cijfers, welke de duizendtallen en eenheden uitdrukken, is gelijk aan het cijfer der honderdtallen. De som der cijfers, welke de honderdtallen en tientallen uitdrukken, is een quadraat, waarvan de wortel de helft is van het cijfer der eenheden; verder is de som van het eerste en tweede cijfer gelijk aan de som van het derde en vierde. Eindelijk is de som van de cijfers der duizendtallen en tientallen de helft van het cijfer der eenheden. Men vraagt dit jaartal te vinden?

Opgelost *door* B. Bekking, R. van Wijk Jz., C. F. Julius, M. B. Jung, A. van der Swan en W. Top Wz.

Oplossing *van* B. Bekking.

Stellen wij het gevraagde getal door $1000v + 100x + 10y + z$ voor, dan hebben wij de volgende vergelijkingen:

$$v + z = x, \quad x + y = \tfrac{1}{4}z^2, \quad v + x = y + z, \quad v + y = \tfrac{1}{2}z.$$

Brengende de waarde van x uit de eerste in de overige, dan hebben wij de drie vergelijkingen

$$v + z + y = \tfrac{1}{4}z^2, \quad 2v + z = y + z, \quad v + y = \tfrac{1}{2}z.$$

Uit de tweede dezer vergelijkingen is $y = 2v$, en brengende dit in de twee overige, dan komt er

$$3v + z = \tfrac{1}{4}z^2, \quad 3v = \tfrac{1}{2}z.$$

De laatste dezer vergelijkingen geeft $z = 6v$, en dit in de eerste gebragt, verkrijgen wij

$$9v = 9v^2,$$

of $v = 1$, dus $z = 6v = 6$, $y = 2v = 2$ en $x = v + z = 7$; zoodat het gevraagde jaartal 1726 is.

CXCI. Voorstel.

Door B. Bekking.

De naam van eenen wiskunstenaar, die in de geschiedenis beroemd is, bestaat uit zes verschillende letters, welke, wanneer men de letters van het alphabet door de getallen 1 *tot* 26 *aanduidt, de vol-*

gende eigenschappen hebben: 1°. De som der tweede en derde letter is een quadraat, waarvan de wortel gelijk is aan de derde letter. 2°. Het verschil van de vijfde en derde letter is gelijk een vijfde van de tweede letter. 3°. De som van de derde en vijfde letter is gelijk aan de laatste letter. 4°. De som van de derde en vierde letter is gelijk aan driemaal de vijfde letter. 5°. Het verschil van de eerste en derde letter is gelijk aan de laatste letter. 6°. De som van de eerste en derde letter is gelijk aan de vierde letter plus twee. Men vraagt naar den naam van dezen wiskunstenaar?

OPGELOST *door* L. I. ULMAN, B. BEKKING, W. TOP WZ., R. VAN WIJK JZ., A. VAN DER SWAN, G. BRANDSTEDER en J. BASSAN.

OPLOSSING *van* L. I. ULMAN.

Stel de derde letter gelijk x, en de tweede y, dan volgt, uit de eerste voorwaarde, $x+y=x^2$. De tweede letter is dus $y=x^2-x$.

Stel de vijfde letter z, dan is, door de tweede voorwaarde, $z-x=\frac{1}{5}y$; de vijfde letter is dus $z=x+\frac{1}{5}y=\frac{x^2+4x}{5}$.

Stel de zesde of laatste letter u; dan volgt, uit de derde voorwaarde, $x+z=u$, en dus is de laatste letter $u=x+\frac{x^2+4x}{5}=\frac{x^2+9x}{5}$.

Stel de vierde letter v, dan geeft de vierde voorwaarde $x+v=3z$, waaruit voor de vierde letter volgt $v=3z-x=\frac{3x^2+12x}{5}-x=\frac{3x^2+7x}{5}$.

Stel eindelijk de eerste letter gelijk w, dan vinden wij, uit de vijfde voorwaarde, $w-x=u$, waaruit voor de eerste letter volgt $w=u+x=\frac{x^2+9x}{5}+x=\frac{x^2+14x}{5}$.

Nu geeft de laatste voorwaarde ons de vergelijking $w+x=v+2$, of wanneer wij hierin de waarden van w en v overbrengen

$$\frac{x^2+14x}{5}+x=\frac{3x^2+7x}{5}+2,$$

of met 5 vermenigvuldigende

$$x^2 + 19x = 3x^2 + 7x + 10,$$

dus $$2x^2 - 12x + 10 = 0,$$

of $$x^2 - 6x + 5 = 0,$$

waaruit $$x = 3 \pm \sqrt{(9 - 5)},$$

dat is $x = 5$ of $x = 1$. Daar echter $x = 1$ zou geven $y = x^2 - x = 0$, en dus met geene der letters van het alphabeth zou overeenstemmen, verwerpen wij dit antwoord, als niet betrekkelijk zijnde met den letterlijken zin van dit vraagstuk, en wij bepalen ons alzoo tot $x = 5$.

Hierdoor vinden wij dan, voor de achtervolgende letters van den gevraagden naam,

1e. *letter* . . . $w = \frac{x^2 + 14x}{5} = 19$ . . . . *dus* S

2e. *letter* . . . $y = x^2 - x = 20$ . . . . . . T

3e. *letter* . . . $x = 5$ . . . . E

4e. *letter* . . . $v = \frac{3x^2 + 7x}{5} = 22$ V

5e. *letter* . . . $z = \frac{x^2 + 4x}{5} = 9$ I

6e. *letter* . . . $u = \frac{x^2 + 9x}{5} = 14$ . . . . . N

en de gevraagde naam is bij gevolg STEVIN.

CXCII. VOORSTEL.

Door A. Volkersè.

Volgens besluit van den Griekschen Patriarch te Konstantinopel, den Aartsbisschop en de geestelijkheid te Mytilene, dienende tot matiging van eene vroegere wet, waarbij de oudste dochter, met uitsluiting van alle andere kinderen, de geheele nalatenschap erfde, erven thans de gezamenlijke dochters als volgt: de oudste ontvangt een derde van de nalatenschap; de volgende een derde van de rest, en zoo vervolgens tot de laatste, die hetgeen hare oudere zuster overlaat ontvangt (*).

Om

(*) *Zie* Olivier, *Reizen door het Turksche Rijk, Deel* 2. *bl.* 212.

Onderstellen wij nu, dat de nalatenschap een geheel getal guldens van de vierde magt, het deel van de jongste eene geheele tweede magt, en het deel van de oudste eene geheele derde magt is, dan vraagt men deze nalatenschap in de kleinste getallen, benevens het aantal der dochters te bepalen?

OPGELOST *door* L. I. ULMAN, J. BASSAN, W. TOP WZ., G. BRANDSTEDER, A. VAN DER SWAN, A. VOLKERSE, H. FOKKES BAKKER en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* L. I. ULMAN.

Stel de nalatenschap x^4 guldens, en het aantal der dochters $m+1$, dan ontvangt

$$\left.\begin{array}{llll} \textit{de oudste dochter} & \frac{1}{3}x^4 & \textit{en er rest} & \frac{2}{3}x^4, \\ \textit{de tweede dochter} & \frac{2}{9}x^4 & \textit{en er rest} & \frac{4}{9}x^4, \\ \textit{de derde dochter} & \frac{4}{27}x^4 & \textit{en er rest} & \frac{8}{27}x^4, \\ \quad \textit{enz.} & & \textit{enz.} & \\ \textit{de } m^e.\textit{ dochter} & \frac{2^{m-1}}{3^m}x^4 & \textit{en er rest} & \frac{2^m}{3^m}x^4, \\ \textit{de jongste dochter} & \frac{2^m}{3^m}x^4. & & \end{array}\right\} \text{(I)}$$

Wij hebben, door onze aangenomene stelling, de geheele nalatenschap reeds tot eene vierde magt gemaakt, en het is nu blijkbaar, dat wij, om het deel der jongste dochter tot een vierkant te maken, zullen moeten stellen $m=2n$, waardoor het aantal der dochters wordt $2n+1$.

Het deel van de jongste dochter moet niet alleen een vierkant, maar daarenboven een geheel getal zijn, en wij zullen dus $\frac{2^{2n}}{3^{2n}}x^4$ tot een geheel getal moeten maken. Daar nu de magten van 2 nimmer door die van 3 kunnen deelbaar zijn, moet x door drie deelbaar wezen. Wij stellen dus $x=3y$ en dit geeft ons

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{voor de nalatenschap} \ldots & 81y^4, \\ \textit{voor de oudste dochter} \ldots & 27y^4, \\ \textit{voor de jongste dochter} \ldots & \frac{2^{2n}}{3^{2n-4}}y^4. \end{array}\right\} \text{(II)}$$

Zal nu het deel van de oudste dochter een cubus zijn, dan zal, omdat 27 een cubus is, ook y^4 en dus ook y een cubus moeten wezen. Wij stellen alzoo $y = z^3$, en dit geeft ons

$$\left.\begin{array}{ll} \textit{voor de nalatenschap} \;\ldots\ldots\ldots & 81\,z^{12}, \\ \textit{voor de oudste dochter} \;\ldots\ldots\ldots & 27\,z^{12}, \\ \textit{voor de jongste dochter} \;\ldots\ldots\ldots & \dfrac{2^{2n}}{3^{2n-4}}\,z^{12}. \end{array}\right\}\text{(III)}$$

Om dus het deel van de jongste in de kleinst mogelijke geheele getallen te verkrijgen, zullen wij moeten stellen $z^{12} = 3^{2n-4}$ of $z^6 = 3^{n-2}$, waaraan klaarblijkelijk in de kleinste getallen voldaan wordt, door $n = 2$ te nemen, omdat dit $z = 1$ maakt. Dit geeft ons alzoo voor de nalatenschap 81 gulden, voor het deel van de oudste dochter 27 gulden, voor het deel van de jongste dochter 16 gulden, en voor het aantal dochters $2n + 1 = 5$.

1°. Aanmerking. Wil men niet alleen de nalatenschap, maar ook het aantal dochters in de kleinst mogelijke geheele getallen verkrijgen, dan neme men, in de uitdrukking (III), $z = 1$ en $n = 1$. Hierdoor vindt men voor de nalatenschap 81, voor de oudste dochter 27, voor de jongste dochter 36 en voor het aantal dochters 3.

2°. Aanmerking. Stelt men $n = 0$, dan is er slechts eene dochter, en dan geeft de formule voor het deel van de jongste dochter werkelijk $81\,z^{12}$, dat is, de geheele nalatenschap.

CXCIII. Voorstel.

Door W. Top Wz.

Twee getallen te vinden, waarvan de verschillen der eerste, tweede en derde magten tot elkander in reden zijn als p, q en r? (41)

Opgelost *door* W. Top Wz., L. I. Ulman, J. Bassan, H. Foekes Bakker en R. van Wijk Jz.

Oplossing *van* W. Top Wz.

Stellen wij de gevraagde getallen x en y, dan geeft het vraagstuk aanleiding tot de twee volgende evenredigheden:

$x - y$

(41) J. de Gelder, *Beginselen der Stelkunst*, bl. 259. No. 116.

$$x-y:x^2-y^2=p:q,$$

en $$x-y:x^3-y^3=p:r,$$

of wanneer wij de termen van de eerste reden door $x-y$ deelen

$$1:x+y=p:q,$$

en $$1:x^2+xy+y^2=p:r,$$

zoodat wij deze twee vergelijkingen hebben

$$x+y=\frac{q}{p}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

en $$x^2+xy+y^2=\frac{r}{p}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Brengende de eerste dezer vergelijkingen in het vierkant, en trekkende er de tweede af, dan blijft er

$$xy=\frac{q^2}{p^2}-\frac{r}{p}=\frac{q^2-pr}{p^2}$$

en trekkende het drievoud dezer vergelijking van de tweede af, dan blijft er

$$x^2-2xy+y^2=\frac{4pr-3q^2}{p^2},$$

waaruit de wortel is

$$x-y=\pm\frac{1}{p}\sqrt{(4pr-3q^2)}.$$

Deze vergelijking eindelijk opgeteld bij, en afgetrokken van de vergelijking (1), komt er, na de som en het verschil door 2 gedeeld te hebben,

$$x=\frac{1}{2p}\{q\pm\sqrt{(4pr-3q^2)}\}$$

en $$y=\frac{1}{2p}\{q\mp\sqrt{(4pr-3q^2)}\}$$

Voorbeeld. Laat gegeven zijn $p=1$, $q=6$ en $r=28$, dan is $x=4$ en $y=2$ of $x=2$ en $y=4$, welke beide antwoorden even goed aan de vraag voldoen.

Het is klaar, dat het vraagstuk onmogelijk wordt, wanneer $3q^2>4pr$ of $q>2\sqrt{\frac{1}{3}pr}$ is. Voor $q=2\sqrt{\frac{1}{3}pr}$ worden de getallen aan elkander gelijk; de verschillen der magten worden dan alle gelijk 0, doch deze nullen staan alsdan tot elkander in de gegevene reden.

CXCIV. VOORSTEL.

Door W. TOP Wz.

Twee getallen te vinden, waarvan de sommen der eerste, tweede en derde magten tot elkander in reden zijn als p, q en r? (42)

OPGELOST *door* W. TOP Wz., J. BASSAN, L. I. ULMAN, H. FORGES BAKKER en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* W. TOP Wz.

Stel de getallen x en y, dan hebben wij door het vraagstuk de evenredigheden

$$x+y : x^2+y^2 = p : q$$

en

$$x+y : x^3+y^3 = p : r,$$

of, wanneer wij, in de tweede evenredigheid, de termen der eerste reden door $x+y$ deelen,

$$x+y : x^2+y^2 = p : q,$$

en

$$1 : x^2-xy+y^2 = p : r,$$

zoodat wij deze twee vergelijkingen hebben

$$x^2+y^2 = \frac{q}{p}(x+y) \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

en

$$x^2+y^2 = \frac{r}{p}+xy. \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

Deze twee waarden van x^2+y^2 aan elkander gelijk stellende, komt er

$$xy = \frac{q}{p}(x+y) - \frac{r}{p} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

en tellende het dubbel van (3) bij (1) op, dan verkrijgen wij

$$(x+y)^2 = \frac{3q}{p}(x+y) - \frac{2r}{p},$$

of

$$(x+y)^2 - \frac{3q}{p}(x+y) + \frac{2r}{p} = 0,$$

uit welke vierkantsvergelijking gevonden wordt

$$x+y = \frac{3q}{2p} \pm \sqrt{\left\{\frac{9q^2}{4p^2} - \frac{2r}{p}\right\}}$$

dat is

$$x+y = \frac{1}{2p}\left\{3q \pm \sqrt{(3q^2-8pr)}\right\}. \quad \ldots \quad (4)$$

Trek-

(42) J. DE GELDER, *Beg. der Stelkunst*, *bl.* 259. N°. 115.

Trekken wij verder het dubbel van (3) af van (1), dan blijft er

$$(x-y)^2 = -\frac{q}{p}(x+y)+\frac{2r}{p},$$

en brengende hierin de gevondene waarde van $x+y$ over, zoo zullen wij vinden

$$(x-y)^2 = -\frac{3q^2}{2p^2}+\frac{2r}{p}\mp\frac{q}{2p^2}\sqrt{(9q^2-8pr)},$$

zoodat $x-y=\pm\frac{1}{2p}\sqrt{\{8pr-6q^2\mp 2q\sqrt{(9q^2-8pr)}\}}$ (5)

Eindelijk vinden wij, door de halve som en het halve verschil der vergelijkingen (4) en (5) te nemen,

$x=\frac{1}{4}p\left[\{3q\pm\sqrt{(9q^2-8pr)}\}\pm\sqrt{\{8pr-6q^2\mp 2q\sqrt{(9q^2-8pr)}\}}\right]$,

$y=\frac{1}{4}p\left[\{3q\pm\sqrt{(9q^2-8pr)}\}\mp\sqrt{\{8pr-6q^2\mp 2q\sqrt{(9q^2-8pr)}\}}\right]$,

waardoor de gevraagde getallen bepaald zijn.

Aanmerking. Is $8pr=9q^2$ of $q=\frac{2}{3}\sqrt{pr}$, dan worden de gevraagde getallen

$$x=\tfrac{1}{4}p\{3q\pm\sqrt{3q^2}\},$$

en

$$y=\tfrac{1}{4}p\{3q\mp\sqrt{3q^2}\},$$

of, dat hetzelfde is,

$$x=\tfrac{1}{4}pq\{3\pm\sqrt{3}\},$$

en

$$y=\tfrac{1}{4}pq\{3\mp\sqrt{3}\}.$$

CXCV. Voorstel.

Door G. A. van Kerkwijk.

Hoe veel graden, minuten en seconden bedraagt een boog, welke, bij deszelfs sinus opgeteld, gelijk is aan den straal?

Opgelost door I. R. Schmidt, L. I. Ulman, J. Bassan, W. Top Wz. en R. van Wijk Jz.

Oplossing van I. R. Schmidt.

Stellen wij den gevraagden boog gelijk ϕ, dan wordt de voorwaarde van het vraagstuk uitgedrukt door de vergelijking

$$\phi + Sin.\phi = 1.$$

De-

Deze vergelijking transcendentaal zijnde, kan niet dan bij benadering worden opgelost. Stellen wij alzoo, dat $\phi = a$ eene benaderde waarde is, die men bij toetsing gevonden heeft, en welke ten naasten bij aan de vraag voldoet; indien dan x de kleine boog is, welke men nog bij a zou moeten voegen, om de wezenlijke waarde van ϕ te verkrijgen, dan is $\phi' = a + x$, en bij gevolg

$$a + x + Sin.(a + x) = 1,$$

of $$a + x + Sin.\, a\, Cos.\, x + Cos.\, a\, Sin\, x = 1.$$

Daar echter x ondersteld wordt een zeer kleine boog te zijn, kunnen wij veilig $Cos.\, x = 1$ en $Sin.\, x = x$ stellen, en hierdoor gaat onze vergelijking over in

$$a + x + Sin\, a + x\, Cos.\, a = 1,$$

waaruit $$x = \frac{1 - a - Sin.\, a}{1 + Cos.\, a},$$

en deze waarde berekend hebbende, zal

$$\phi' = a + x = a + \frac{1 - a - Sin.\, a}{1 + Cos\, a}$$

eene nadere waarde van ϕ zijn.

Stellen wij deze gevondene waarde van ϕ' in plaats van a, dan zullen wij eene waarde ϕ'' verkrijgen, die wederom nader aan de waarheid komt, en hiermede kunnen wij voortgaan zoo ver wij goedvinden.

Is dus $\phi = a$ eene benaderde waarde van ϕ, dan blijkt uit het boven gezegde, dat de verdere benaderde waarden zullen worden voorgesteld door

$$\phi' = a - \frac{a + Sin.\, a - 1}{1 + Cos.\, a},$$

$$\phi'' = \phi' - \frac{\phi' + Sin.\, \phi' - 1}{1 + Cos.\, \phi'},$$

$$\phi''' = \phi'' - \frac{\phi'' + Sin.\, \phi'' - 1}{1 + Cos.\, \phi''},$$

en zoo vervolgens, zijnde het klaar, dat wij bij deze berekeningen de waarde van ϕ', ϕ'', ϕ''', *enz.* in deelen van den straal zullen vinden uitgedrukt, welke dan door middel van de tafels, die men hiervoor bij *Callet* vindt, gemakkelijk in graden, minuten en seconden worden overgebragt.

Gaan wij nu tot de benadering over, dan is het klaar, dat wij tot eene eerste benadering $a = 30°$ zullen kunnen stellen; want

daar

daar $Sin. 30° = 0,5$ en $Boog\ 30° = \frac{1}{6}\pi = 0,52359$ is, zoo maakt deze stelling het eerste lid reeds gelijk aan 1,02359. Vangen wij dus bij $a = 30°$ aan, dan zullen wij vinden

$$a = 0,5235988 = 30°,$$
$$\phi' = 0,5109523 = 29° 16' 31'',50,$$
$$\phi'' = 0,5109735 = 29° 16' 35'',84,$$

welke laatste waarde reeds zeer nabij aan de waarheid is.

CXCVI. VOORSTEL.

Door G. A. VAN KERKWIJK.

De vergelijking $\phi + Tang.\phi = 1$ bij benadering op te losfen?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT, L. I. ULMAN, J. BASSAN en W. TOP WZ.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

Stellen wij, even als in het voorgaande vraagstuk, dat $\phi = a$ eene benaderde waarde en $\phi' = a + x$ de wezenlijke waarde van de onbekende is, zoodat x een zeer kleine boog beteekent, dan is

$$a + x + Tang.(a + x) = 1,$$

dat is
$$a + x + \frac{Tang.\,a + Tang.\,x}{1 - Tang.\,a\,Tang.\,x} = 1,$$

of, omdat x zeer klein zijnde, $Tang.\,x$ gelijk x kan worden gesteld

$$a + x + \frac{Tang\ a + x}{1 - x\,Tang.\,a} = 1,$$

welke vergelijking met $1 - x\,Tang.\,a$ vermenigvuldigd, geeft

$$(a + x)(1 - x\,Tang.\,a) + Tang.\,a + x = 1 - x\,Tang.\,a.$$

Rangschikken wij nu alles naar de magten van x, dan komt er

$$x^2\,Tang.\,a - x(2 - (a - 1)\,Tang.\,a) + (1 - a - Tang.\,a) = 0,$$

maar x zeer klein zijnde, zullen wij ook x^2 kunnen verwaarloozen, en dit geeft ons

$$x(2 - (a - 1)\,Tang.\,a) = 1 - a - Tang.\,a,$$

zoodat
$$x = \frac{a + Tang.\,a - 1}{(a - 1)\,Tang.\,a - 2},$$

waaruit voor de nadere waarde van ϕ volgt

$\phi' =$

$$\phi' = a + x = a + \frac{a + Tang\, a - 1}{(a - 1)\, Tang.\, a - 2},$$

zoodat wij voor de verdere benaderde waarden zullen hebben

$$\phi'' = \phi' + \frac{\phi' + Tang\, \phi' - 1}{(\phi' - 1)\, Tang.\, \phi' - 2},$$

$$\phi''' = \phi'' + \frac{\phi'' + Tang.\, \phi'' - 1}{(\phi'' - 1)\, Tang.\, \phi'' - 2},$$

en zoo vervolgens.

Wij kunnen hier wederom voor eene eerste benadering $a = 30^\circ$ nemen, omdat deze stelling het eerste lid ten naasten bij 1,09 maakt, hetgeen reeds niet veel van de waarheid afwijkt. De benadering volgens onze formulen voortzettende, zal men vinden $\phi = 27^\circ\, 29'\, 12''$ ten naaste bij.

CXCVII. VOORSTEL.

Door G. A. van Kerkwijk.

De waarde van ϕ *te vinden uit de vergelijking* $Sin.\, \phi \times Sin.\, 2\phi \times Sin.\, 3\phi = \frac{1}{2}$?

Opgelost *door* W. Top Wz., L. I. Ulman en J. Bassan.

Oplossing *van* W. Top Wz.

Wanneer wij, in de opgegevene vergelijking, in plaats van $Sin.\, 2\phi$ en $Sin.\, 3\phi$ derzelver waarden schrijven, namelijk $Sin.\, 2\phi = 2\, Sin.\, \phi\, Cos.\, \phi$ en $Sin.\, 3\phi = Sin.\, \phi\, Cos.\, 2\phi + Cos.\, \phi\, Sin.\, 2\phi = Sin.\, \phi\, (1 - 2\, Sin^2.\, \phi) + 2\, Sin.\, \phi\, Cos^2.\, \phi = Sin.\, \phi\, (1 - 2\, Sin^2.\, \phi) + 2\, Sin.\, \phi\, (1 - Sin^2.\, \phi) = 3\, Sin.\, \phi - 4\, Sin^3.\, \phi$, dan komt er

$$Sin.\, \phi \times 2\, Sin.\, \phi\, Cos.\, \phi \times (3\, Sin.\, \phi - 4\, Sin^3.\, \phi) = \tfrac{1}{2},$$

of
$$2\, Sin^3.\, \phi\, Cos.\, \phi\, (3 - 4\, Sin^2.\, \phi) = \tfrac{1}{2} \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

deze vergelijking in het vierkant brengende, verkrijgen wij

$$4\, Sin^6.\, \phi\, Cos^2.\, \phi\, (3 - 4\, Sin.\, \phi)^2 = \tfrac{1}{4},$$

of
$$16\, Sin^6.\, \phi\, (1 - Sin^2.\, \phi)\, (3 - 4\, Sin^2.\, \phi)^2 = 1.$$

Stellen wij nu $Sin^2.\, \phi = x$, dan gaat deze vergelijking over in

$$16 x^3 (1 - x)(3 - 4x)^2 = 1,$$

welke ontwikkeld en volgens de magten van x gerangschikt, geeft

$$x^6 - \tfrac{5}{2} x^5 + \tfrac{33}{16} x^4 - \tfrac{9}{16} x^3 + \tfrac{1}{256} = 0.$$

Stel-

Stellen wij om de gebrokene coëfficenten te verdrijven $x = \frac{1}{4}y$, dan gaat deze vergelijking over in

$$y^6 - 10y^5 + 33y^4 - 36y^3 + 16 = 0 \quad \ldots \quad (A)$$

Uit deze vergelijking vinden wij terstond $y = 2$ en bij gevolg $x = \frac{1}{4}y = \frac{1}{2}$, zoodat $Sin^2\,\phi = \frac{1}{2}$, waaruit $Sin.\,\phi = \pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}$, en dit geeft $\phi = 45^\circ$, welke waarde aan de vraag voldoet; want nemende $\phi = 45^\circ$, dan is $2\phi = 90^\circ$ en $3\phi = 135^\circ$, dus $Sin.\,\phi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $Sin.\,2\phi = 1$ en $Sin.\,3\phi = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, zoodat $Sin.\,\phi\ Sin.\,2\phi.\,Sin.\,3\phi = \frac{1}{2}\sqrt{2} \times 1 \times \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}$.

Aanmerkingen *door* I. R. Schmidt.

1°. Het hier boven gevondene antwoord is het éénigste niet, dat aan de vraag voldoet; deelen wij namelijk het eerste lid der vergelijking (A) door $y - 2$, dan verkrijgen wij, ter bepaling van de overige wortels, de vergelijking

$$y^5 - 8y^4 + 17y^3 - 2y^2 - 4y - 8 = 0 \quad \ldots \quad (B)$$

daar nu $y = 4x = 4\,Sin^2.\,\phi$ is, kunnen alleen de positieve wortels, die niet grooter dan 4 zijn, eene bestaanbare waarde voor $Sin.\,\phi$ opleveren, en dit in aanmerking nemende, blijkt het gemakkelijk, dat de vergelijking (B) slechts een' wortel bevat, die hieraan beantwoordt, en welke tusschen 1 en 2 gelegen is, omdat $y = 1$ het voorste lid gelijk -4 en $y = 2$ het voorste lid gelijk $+16$ maakt. Namen wij $y = 1$, dan zouden wij vinden $Sin^2.\,\phi = \frac{1}{4}$ en $Sin.\,\phi = \frac{1}{2}$ dus $\phi = 30^\circ$, en dit toont aan, dat wij den gevraagden hoek niet ver van 30° moeten zoeken.

2°. De vergelijking (B) tot den vijfden graad opklimmende, wordt het benaderen van den wortel tusschen 1 en 2 zeer lastig. Zie hier dus eenen anderen weg, om met minder moeite tot de gevraagde waarde van ϕ te geraken.

Daar $Sin.\,\phi \times Sin.\,2\phi \times Sin.\,3\phi = \frac{1}{2}$ moet zijn, zoo hebben wij, de logarithmen nemende,

$$Log.\,Sin.\,\phi + Log.\,Sin.\,2\,\phi + Log.\,Sin.\,3\,\phi = 9{,}6989700 - 10,$$

en nu is het gemakkelijk, om, door middel van de sinustafels, tot de waarde van ϕ te geraken. Wij vinden namelijk

$$Log.\,Sin.\,30^\circ + Log.\,Sin.\,60^\circ + Log\,Sin\,90^\circ = 9{,}6365006 - 10,$$
$$Log\,Sin.\,31^\circ + Log.\,Sin.\,62^\circ + Log.\,Sin.\,93^\circ = 9{,}6571786 - 10,$$
$$Log\,Sin.\,32^\circ + Log.\,Sin.\,64^\circ + Log.\,Sin.\,96^\circ = 9{,}6754842 - 10,$$

Log.

$Log.Sin. 33^\circ + Log.Sin. 66^\circ + Log.Sin. 99^\circ = 9{,}6914589 - 10;$
$Log.Sin. 34^\circ + Log.Sin. 68^\circ + Log.Sin. 102^\circ = 9{,}7041320 - 10,$

en hieruit volgt, dat de gevraagde hoek tusschen 33° en 34° gelegen is.

Daar 33° en 34° bijna even veel te veel als te weinig geven, beginnen wij tot een verder onderzoek bij 33°25' en vinden

$Log.Sin\ 33^\circ 25' + Log\ Sin. 66^\circ 50' + Log.Sin. 100^\circ 15' = 9{,}6974345 - 10;$
$Log.Sin. 33^\circ 30' + Log.Sin. 67^\circ 0' + Log.Sin. 100^\circ 30' = 9{,}6985827 - 10;$
$Log.Sin. 33^\circ 31' + Log.Sin. 67^\circ 2' + Log.Sin\ 100^\circ 33' = 9{,}6988192 - 10;$
$Log.Sin. 33^\circ 32' + Log.Sin. 67^\circ 4' + Log.Sin. 100^\circ 36' = 9{,}6990362 - 10;$

en de gevraagde hoek is dus begrepen tusschen 33°31' en 33°32'.

Men kan op dezelfde wijze de seconden berekenen, waar tusschen de gevraagde hoek invalt. Wij laten dit aan den lezer over; en merken alleen op, dat het groote voordeel van deze handelwijze hierin gelegen is, dat de benadering, hoe ver men dezelve voortzet, even gemakkelijk blijft, indien men slechts geene grootere naauwkeurigheid verlangt dan die, welke de logarithmentafels gedoogen, daar integendeel bij het gebruik van de vergelijking (B) de benadering lastiger en lastiger wordt, naar mate dezelve meer naauwkeurigheid geeft.

3°. Behalve de hoeken van 45° en 33°31' voldoen ook nog al de bogen, welke wij verkrijgen, door bij de twee gevondene bogen 360° of eenig veelvoud van 360 op te tellen of af te trekken, omdat alsdan de sinussen van ϕ, 2ϕ en 3ϕ onveranderd blijven; er bestaan dus een oneindig aantal bogen, die aan de vraag voldoen, en welke begrepen zijn in de uitdrukkingen $45^\circ \pm n \times 360^\circ$ en $33^\circ 31' \pm n \times 360^\circ$, waarin n een geheel getal is, en 33°31' de benaderde waarde voorstelt.

4°. Berekent men ϕ door de vergelijkingen (A) en (B), dan geeft elke waarde van y eene waarde voor $Sin^2.\phi$, namelijk $Sin^2.\phi = \frac{1}{4}y$, waaruit $Sin.\phi = \pm \frac{1}{2}\sqrt{y}$. Men moet echter niet denken, dat men, ter oplossing van ons vraagstuk, ook het benedenste teeken zou mogen gebruiken, en dat men alzoo nog twee reeksen van bogen zou vinden, welke aan de vraag voldoen; want omdat wij de vergelijking (a) hebben moeten quadrateren, zoo bevat de vergelijking (A) eigenlijk de oplossing van de vergelijking

$$Sin.\phi \times Sin. 2\phi \times Sin. 3\phi = \pm \tfrac{1}{2}x$$

en

en het is tot dit benedenste teeken, dat de negatieve waarden van *Sin.* ϕ behooren.

CXCVIII. VOORSTEL.

Door I. P. DELPRAT.

Uit een der hoekpunten van eenen driehoek zijn twee lijnen getrokken, die de overstaande zijde in drie stukken verdeelen, waarvan de twee uiterste gegeven zijn. Bovendien zijn de drie hoeken gegeven, waarin de twee deellijnen den hoek van den driehoek verdeelen. Men vraagt het middelste deel, en dus de geheele overstaande zijde, zoowel door constructie als door berekening te vinden?

OPGELOST *door* I. P. DELPRAT, W. TOP WZ. en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* I. P. DELPRAT.

Wij stellen de gegevene hoeken, *Fig.* 107, AEB $= \alpha$, BEC $= \beta$ en CED $= \gamma$, verder stellen wij AB $= a$ en CD $= b$; wij zullen alsdan BC $= x$ in deze gegevens moeten uitdrukken.

Maken wij nu EG $=$ AB $= a$ en trekken wij GB′ evenwijdig met EA, en, door het punt B′, de lijn D′A′ evenwijdig met DA, zoo heeft men, C′F evenwijdig met EA trekkende,

$$A'B' : B'C' : C'D' = AB : BC : CD = a : x : b,$$

maar
$$A'B' : B'C' : C'D' = EG : GF : FD',$$

dus
$$EG : GF : FD' = a : x : b,$$

maar wij hebben EG $= a$ genomen, en bij gevolg is ook GF $= x$ en FD′ $= b$.

Daar GH en GB′ bekende lijnen zijn, stellen wij kortheidshalve GH $= c$ en GB′ $= c'$; stellen wij verder FC′ $= y$, dan hebben wij de evenredigheden

$$D'F : FC' = D'G : GB',$$

en
$$FC' : GH = EF : EG,$$

of wanneer wij hierin de gestelde en gevondene waarden overbrengen

$$b : y = b + x : c',$$

en
$$y : c = a + x : a,$$

de overeenkomstige termen dezer evenredigheden te zamen vermenigvuldigende, verkrijgen wij

$$b : c = (a + x)(b + x) : ac',$$

en dit geeft ons de vergelijking

$$(a + x)(b + x) = \frac{c'}{c} ab,$$

of $$x^2 + (a + b)x = \frac{c' - c}{c} . ab,$$

uit welke vierkantsvergelijking volgt

$$x = -\tfrac{1}{2}(a + b) \pm \sqrt{\left\{\frac{c' - c}{c} . ab + \tfrac{1}{4}(a + b)^2\right\}},$$

of, dat op hetzelfde nederkomt,

$$x = -\tfrac{1}{2}(a + b) \pm \sqrt{\left\{\frac{c'}{c} ab + \tfrac{1}{4}(a - b^2)\right\}},$$

en uit deze formule leiden wij de volgende constructie af:

1°. Maak $EG = a$, *Fig.* 108, en trek GB′ evenwijdig met EA, dan is $GH = c$ en $GB' = c'$.

2°. Trek B′K evenwijdig met EC′, dan is $GK = \frac{c'}{c} a$.

3°. Maak $GM = b$, beschrijf op MK eenen halven cirkel en stel GL loodregt op KM, dan is $GL^2 = \frac{c'}{c} . ab$.

4°. Deel EM midden door in O, dan is $EO = \tfrac{1}{2}(a + b)$ en $GO = \tfrac{1}{2}(a - b)$, trekkende dus LO, dan is $LO = \sqrt{\left\{\frac{c'}{c} ab + \tfrac{1}{4}(a - b)^2\right\}}$.

5°. Maak $GP = EO$ en beschrijf uit P met OL als straal eenen halven cirkel, snijdende ED′ in F en f, dan zijn GF en Gf de waarden van x, want dan hebben wij klaarblijkelijk

$$GF = -\tfrac{1}{2}(a + b) + \sqrt{\left\{\frac{c'}{c} ab + \tfrac{1}{4}(a - b)^2\right\}},$$

en $$Gf = -\tfrac{1}{2}(a + b) - \sqrt{\left\{\frac{c'}{c} ab + \tfrac{1}{4}(a - b)^2\right\}}.$$

6°. Makende dus $FD' = b$ en trekkende D′B′A′ dan is dezelve de lijn D′B′A′ van *Fig.* 107.

7°. Nemende eindelijk $A'Q = EG = a$, trekkende QB evenwijdig met EA′ en trekkende, door het punt B, AD evenwijdig met A′D′, dan is AD de begeerde lijn.

8°. Voeren wij ten opzigte van het punt f dezelfde constructie uit, welke wij voor F hebben verrigt, dan verkrijgen wij eene tweede lijn $badc$, die aan het vraagstuk beantwoordt.

Het

Het vraagstuk alzoo door constructie opgelost hebbende, blijft er alleen over, om aan te wijzen, hoe x kan worden berekend. Hiertoe hebben wij reeds gevonden

$$x = -\tfrac{1}{2}(a+b) \pm \sqrt{\left\{\frac{c'}{c}ab + \tfrac{1}{4}(a-b)^2\right\}},$$

zoodat wij nog alleen moeten aanwijzen, hoe c en c' in de oorspronkelijke gegevens worden uitgedrukt.

Nu is in *Fig.* 107, EG : GB′ = $Sin.\ \alpha : Sin.\ (\beta+\gamma)$ en EG : GH = $Sin.\ (\alpha+\beta) : Sin.\ \gamma$, dat is

$a : c' = Sin.\ \alpha : Sin\ (\beta+\gamma)$ en $a : c = Sin\ (\alpha+\beta) : Sin.\ \gamma$,

dus $c' = a \times \dfrac{Sin.\ (\beta+\gamma)}{Sin.\ \alpha}$ en $c = a \times \dfrac{Sin.\ \gamma}{Sin\ (\alpha+\beta)}$,

zoodat $$\frac{c'}{c} = \frac{Sin.\ (\alpha+\beta)\ Sin.\ (\beta+\gamma)}{Sin.\ \alpha\ Sin.\ \gamma},$$

waardoor de waarde van x overgaat in

$$x = -\tfrac{1}{2}(a+b) \pm \sqrt{\left\{\frac{Sin.\ (\alpha+\beta)\ Sin.\ (\beta+\gamma)}{Sin.\ \alpha\ .\ Sin.\ \gamma}ab + \tfrac{1}{4}(a-b)^2\right\}},$$

en daar in deze formule nu niet anders dan de oorspronkelijke gegevens voorkomen, kan dezelve dienen om x te berekenen.

CXCIX. VOORSTEL.

Door I. R. Schmidt.

Wanneer men uit een gegeven punt, dat met eenen cirkel in een zelfde plat vlak ligt, loodlijnen op al de raaklijnen van dezen cirkel trekt, dan vraagt men de meetkunstige plaats der voetpunten van al deze loodlijnen te vinden?

Opgelost *door* I. R. Schmidt, en W. Top Wz.

Oplossing *van* I. R. Schmidt.

Het gegeven punt kan binnen, in en buiten den omtrek van den cirkel gelegen zijn, en het is in elk dezer gevallen zoo gemakkelijk, de kromme, ingevolge de opgaaf van het vraagstuk, te construeren, dat er ten opzigte van den vorm geen twijfel kan overblijven. Ligt het punt P, *Fig.* 109, waaruit de loodlijnen op de raaklijnen van den cirkel getrokken worden, die M tot middelpunt en MA tot straal heeft, binnen dezen cirkel, dan

heeft de kromme twee buigpunten Z en Z'; deze twee buigpunten vereenigen zich, *Fig.* 110, in het keerpunt A, wanneer het gegeven punt P in den omtrek van den cirkel ligt; maar ligt dit punt P, *Fig.* 111, buiten den omtrek, dan heeft de kromme een' knoop, en de takken snijden elkander in het punt P. Bovendien is het klaar, dat de kromme in elk geval de punten A en B met den gegeven' cirkel gemeen heeft.

Het is zeer gemakkelijk, de polaire vergelijking van onze kromme te vinden; want laat, *Fig.* 109, NQ eene raaklijn en PQ de loodlijn zijn, welke uit P op deze raaklijn valt, dan loopt PQ evenwijdig met den straal MN van het raakpunt N. Trekkende dus PR loodregt op MN, dan zal de driehoek PMR regthoekig zijn in R. Stellende nu de pool in P, dan is, $\angle APQ = \phi$, $PQ = z$, $MP = a$ en $MN = r$ stellende,

$$MR = MP \times Cos. PMR,$$

of $$r - z = a \times Cos. \phi$$

zoodat $$z = r - a Cos. \phi \quad \ldots\ldots \quad (I)$$

en dit is nu in het algemeen de polaire vergelijking, welke alzoo tot de figuren 109, 110 of 111 zal behooren, naarmate a kleiner, gelijk of grooter dan r is.

Voor het eerste en laatste geval kan onze vergelijking niet eenvoudiger geschreven worden; doch voor het geval van *Fig.* 110, waarbij het punt P in den omtrek ligt, $a = r$ zijnde, wordt onze vergelijking

$$z = r(1 - Cos. \phi) = 2r Sin^2. \tfrac{1}{2}\phi \quad \ldots \quad (II).$$

Om uit de polaire vergelijking die der regtstandige coördinaten af te leiden, hebben wij alleen $PU = x$ en $QU = y$ te stellen; wij hebben alsdan $z = \surd(x^2 + y^2)$ en $Cos. \phi = \frac{x}{z} = \frac{x}{\surd(x^2+y^2)}$, waardoor de algemeene vergelijking (I) overgaat in

$$\surd(x^2+y^2) = r - a . \frac{x}{\surd(x^2+y^2)},$$

of $$(x^2+y^2) = r\surd(x^2+y^2) - ax,$$

dus $$x^2+y^2+ax = r\surd(x^2+y^2),$$

of wanneer wij beide leden in het vierkant verheffen

$$(x^2+y^2)^2 + 2ax(x^2+y^2) + a^2x^2 = r^2(x^2+y^2).$$

Ontwikkelen wij nu de verschillende termen en rangschikken wij dezelve naar de magten van y, dan komt er

y^4. .

$$\left.\begin{array}{l} y^4+2x^2y^2+\quad x^4 \\ \quad +2axy^2+a^2x^2 \\ \quad -r^2\quad y^2+2ax^3 \\ \qquad\qquad -r^2x^2 \end{array}\right\} = 0,$$

en losſen wij hieruit de waarde van y op, dan verkrijgen wij, na behoorlijke herleiding, voor de vergelijking op de regtſtandige coördinaten, den oorſprong in het gegeven punt P nemende,

$$y = \pm\sqrt{\{-(x^2+ax-\tfrac{1}{2}r^2)\pm r\sqrt{(-ax+\tfrac{1}{4}r^2)}\}}\ldots\text{(III)},$$

welke vergelijking nu wederom tot de figuren 109, 110 of 111 behoort, naarmate a kleiner, gelijk of grooter dan r is.

Stellen wij in deze vergelijking $y=0$, dan komen wij neder op de vergelijking

$$x^4+2ax^3+(a^2-r^2)x^2=0,$$

waaruit wij, voor de ſnijpunten van de kromme met AB, vinden

$$x=0,\quad x=-(a+r)\quad \text{en}\quad x=-a+r;$$

de tweede dezer waarden toont in elke der figuren het punt B aan, en de laatſte het punt A, terwijl de eerſte tot het punt P behoort, dat in *Fig.* 111 het punt is, waarin de takken elkander ſnijden; in *Fig.* 110 het keerpunt, en in *Fig.* 109, het afgezonderde of geïſoleerde punt P, dat, offchoon niet met de kromme lijn zamenhangende, ondertusſchen in de vergelijking begrepen is.

Wij zouden nu kunnen overgaan, om, hetzij door de vergelijking (I), of door de vergelijking (III), de verdere eigenſchappen onzer kromme lijn op te ſpeuren; dit zal echter onnoodig worden, wanneer wij kunnen aantoonen, dat dezelve niets anders is dan eene *epicycloide*, voortgebragt door eenig punt in het vlak van eenen cirkel, die over eenen anderen cirkel van gelijke grootte rolt; want de eigenſchappen van deze kromme lijn vrij algemeen bekend zijnde, houden wij het voor genoegzaam, de indenditeit van onze kromme met dezelve aan te wijzen.

Om het gezegde te betoogen, deelen wij, in ieder der drie figuren, MP midden door in S en AP midden door in T, en beſchrijven uit S met ST als ſtraal een' cirkel. Deze ſtraal is dan klaarblijkelijk gelijk $\frac{1}{2}$MA of gelijk $\frac{1}{2}r$. Trekken wij nu SD, evenwijdig met MN of PQ, en beſchrijven wij, na ED = SE gemaakt te hebben, uit D met DE als ſtraal een' cirkel, dan is SD = 2 SE = r en dus SD = MN, of, van beide zijden HG = RN aftrekkende, SH + GD = MR; maar omdat SP =

 $\frac{1}{2}$MP

$\frac{1}{2}$ MP is, zoo is ook SH $=\frac{1}{2}$ MR, waaruit volgt GD $=$ SH $=$ $\frac{1}{2}$ MR. Trekken wij dus DQ, dan is in de regthoekige driehoeken SHP en DGQ, SH $=$ DG en HP $=$ GQ; deze driehoeken zijn dus gelijk en gelijkvormig, en hieruit volgt DQ $=$ SP $=\frac{1}{2}a$, en $\angle$ EDF $=\angle$ EST, of, dat hetzelfde is, *Boog* EF $=$ *Boog* ET. Daar dit nu voor elk punt Q van de kromme lijn doorgaat, zoo is het klaar, dat onze kromme kan worden gehouden voortgebragt te zijn, door de beweging van het punt Q, hetwelk op den standvastigen afstand DQ $=\frac{1}{2}a$ van het middelpunt D staat, terwijl de cirkel DE over den cirkel SE heen rolt. Bij den aanvang dezer beweging ligt D in C, en dan valt Q in A, en na eene halve omwenteling ligt D in K, en dan valt Q in B.

Ligt het bewegende punt Q binnen den draaijenden cirkel, dan wordt, *Fig.* 109, de kromme eene *verkorte epicycloide*; ligt het punt Q in den omtrek, *Fig.* 110, dan valt T in A, en de kromme wordt eene *gewone epicycloide*; ligt eindelijk het bewegende punt Q buiten den omtrek van den rollenden cirkel, *Fig.* 111, dan is de kromme een verlengde *epicycloide*.

CC. VOORSTEL.

Door I. R. SCHMIDT.

Men vraagt de vergelijking te vinden van de kromme lijn, gevormd door de voetpunten der loodlijnen, die uit eenig punt, gelegen in de as van eene parabool, op de raaklijnen van deze parabool vallen?

OPGELOST *door* I. R. SCHMIDT en W. TOP WZ.

OPLOSSING *van* I. R. SCHMIDT.

§. 1. Zij, *Fig.* 112, AW de parabool, waarvan p de parameter is, en O het gegeven punt in de as. Indien dan aan eenig punt B eene raaklijn getrokken en op dezelve de loodlijn OM nedergelaten wordt, dan is, ingevolge de opgaaf, M een punt van de voorgestelde kromme lijn.

Om uit deze constructie tot de vergelijking van de kromme te geraken, verlenge men de raaklijn BM tot aan de as in D, en dan is, uit de bekende eigenschap van de parabool, AD $=$ AC.

Ste-

Stellen wij nu AD $=$ AC $= m$. CB $= n$, OM $= z$ en $\angle$MOD $= \phi$, dan is DO $= m + a$ en bij gevolg

$$z = (a + m)\ Cos.\phi \quad \ldots\ldots\ (I).$$

Ten einde uit deze vergelijking m te verdrijven, welke klaarblijkelijk van a en ϕ afhangt, hebben wij de vergelijkingen

$$n^2 = pm \quad \text{en} \quad 2m = n\ Tang.\phi,$$

zijnde de eerste de vergelijking van de parabool, en de andere een gevolg van de gelijkvormigheid der driehoeken DMO en DCB. Elimineren wij n uit deze twee vergelijkingen, dan verkrijgen wij

$$m = \tfrac{1}{4} p\ Tang^2.\phi;$$

en brengen wij dit over in de vergelijking (I), dan komt er, voor de polaire vergelijking van onze kromme,

$$z = (a + \tfrac{1}{4} p\ Tang^2.\phi)\ Cos.\phi \quad \ldots\ (II).$$

§. 2. De vergelijking op de regtstandige coördinaten wordt gemakkelijk uit de laatst gevondene afgeleid; want trekken wij MP loodregt op de as en stellen wij OP $= x$ en MP $= y$, dan is

$$z = \sqrt{(x^2 + y^2)},\ Tang.\phi = \frac{y}{x} \text{ en } Cos.\phi = \frac{x}{z} = \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}},$$

en deze waarden in (II) overbrengende, komt er

$$\sqrt{(x^2 + y^2)} = (a + \tfrac{1}{4} p . \frac{y^2}{x^2}) \times \frac{x}{\sqrt{(x^2 + y^2)}},$$

of, met $x\sqrt{(x^2 + y^2)}$ vermenigvuldigende,

$$x(x^2 + y^2) = ax^2 + \tfrac{1}{4} p y^2,$$

dat is, wanneer wij alles aan denzelfden kant brengen,

$$x^3 + xy^2 - ax^2 - \tfrac{1}{4} p y^2 = 0 \quad \ldots\ (III)$$

en onze kromme lijn is alzoo van den derden graad.

Omdat y in onze vergelijking niet anders dan in de tweede magt voorkomt, kunnen wij deze vergelijking gemakkelijk ten opzigte van y oplossen, en wij zullen vinden

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a - x}{x - \frac{1}{4} p}} \quad \ldots\ldots\ (IV)$$

hetgeen de eenvoudigste vorm is, waaronder wij de vergelijking kunnen brengen.

Deze vergelijking toont terstond aan, dat onze kromme, boven en beneden de as, dezelfde gedaante heeft; iets dat ook uit de constructie boven allen twijfel verheven is; bovendien volgt uit dezelve, dat voor elke waarde x, boven en beneden de as, niet meer dan één punt van de kromme kan bestaan.

§. 3. De kromme lijn neemt zeer verschillende vormen aan; naarmate van de verschillende punten O, waaruit de loodlijnen getrokken worden, dat is, naarmate van de verschillende waarden, die wij in de vergelijking aan a toekennen. Het trekken van raaklijnen aan de parabool is zoo gemakkelijk, dat men zonder veel moeite, voor verschillende gevallen, de kromme kan construeren, en zich alzoo deze verschillende vormen proefondervindelijk voor oogen kan stellen. Onze vergelijking bewijst ondertusschen bij dit onderzoek niet alleen uitmuntende diensten, maar zal ook omstandigheden aantoonen, waarvan men zich door bloote constructie zoo gemakkelijk niet zou overtuigen.

§. 4. Vooreerst merken wij op, dat in de oorspronkelijke figuur, het punt O in de as ondersteld zijnde, dit punt in de as, in den top, of op het verlengde van de as gelegen zal zijn, naarmate wij in onze vergelijkingen a positief, nul of negatief nemen. Daar verder in deze oorspronkelijke figuur de abscis OP ter linkerzijde van den oorsprong O valt, zoo zullen wij, bij ons geheele onderzoek, de positieve waarden van x op OX en de negatieve op OX′ moeten uitzetten.

§. 5. Welke waarde wij nu ook aan a toekennen, is het uit (IV) klaar, dat y oneindig wordt, wanneer $x - \frac{1}{4}p = o$ of $x = + \frac{1}{4}p$ is, en hiervan is alleen het geval uitgezonderd, waarin ook $a = \frac{1}{4}p$ is, omdat alsdan teller en noemer onder het wortelteeken gelijktijdig verdwijnen; doch over dit geval zullen wij nader spreken. Hieruit volgt, dat wanneer wij OE $= \frac{1}{4}p$, dat is gelijk den afstand van het brandpunt tot den top nemen, de lijn ZZ′, die door E evenwijdig aan YY′ of loodregt op XX′ getrokken wordt, eene asymptoot van de kromme zal zijn.

§. 6. Stellen wij $x = o$, dan wordt, voor elke waarde van a, ook $y = o$; het punt O is dus in alle gevallen een punt van de kromme. In sommige gevallen staat echter dit punt geheel op zich zelf, en is in geenen deele met de kromme verbonden. Wij zullen op deze omstandigheid terug komen, wanneer wij de verschillende vormen aanwijzen, die de kromme in de bijzondere gevallen verkrijgt.

§. 7. Stellen wij $x = a$, dan wordt y mede gelijk o, en de kromme moet dus in alle gevallen door den top van de parabool gaan, hetgeen ook uit de constructie ten duidelijkste is op te ma-

ken; omdat de raaklijn van den top, loodregt op de as staande, de loodlijn, welke uit eenig punt van de as op deze raaklijn valt, noodzakelijk in den top moet nederkomen.

§. 8. Differentieren wij de vergelijking (IV), dan vinden wij, voor de achtervolgende differentiaal quotienten,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp \frac{x^2 - (\frac{1}{2}a + \frac{3}{8}p)x + \frac{1}{4}ap}{(a-x)(x-\frac{1}{4}p)} \cdot V\frac{a-x}{x-\frac{1}{4}p} \quad . \quad (V)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mp \frac{1}{4}(a - \frac{1}{4}p) \cdot \frac{(a+\frac{3}{4}p)x - ap}{(a-x)^2(x-\frac{1}{4}p)^2} V\frac{a-x}{x-\frac{1}{4}p} \quad (VI)$$

enz. *enz.*

Wij zetten deze reeks niet verder voort, daar de twee gevondene quotienten genoegzaam zijn, om hetgeen wij ons over onze kromme voorstellen te zeggen, duidelijk te maken.

§. 9. Zal onze kromme buigpunten hebben, dan moet (VI) gelijk o zijn, en dit heeft alleen plaats, wanneer $(a+\frac{3}{4}p)x - ap = o$ is, waaruit volgt, dat voor de buigpunten

$$x = \frac{ap}{a+\frac{3}{4}p} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (VII)$$

zal moeten zijn. Deze waarde zou nu aan het derde differentiaal quotient getoetst moeten worden; doch wij zullen verder zien, dat wij, zonder dit hulpmiddel te behoeven, in elk der bijzondere gevallen, het al of niet bestaan van buigpunten gemakkelijk genoeg beoordeelen kunnen.

§. 10. Ten einde de verschillende vormen na te gaan, die de kromme in de bijzondere gevallen verkrijgt, beginnen wij met a positief, dat is, het punt O, in de as te onderstellen, en zelfs hier moeten wij wederom verscheidene gevallen onderscheiden; want a kan positief en grooter dan $\frac{1}{2}p$ zijn, a kan tusschen $\frac{1}{2}p$ en $\frac{1}{4}p$ invallen, en a kan tusschen $\frac{1}{4}p$ en o genomen worden.

Onderstellen wij dan a positief en grooter dan $\frac{1}{2}p$ *Fig.* 113, dan volgt uit de vergelijking (IV), dat is uit

$$y = \pm x V\frac{a-x}{x-\frac{1}{4}p},$$

dat x kleiner dan $\frac{1}{4}p$ en x grooter dan a, onbestaanbare waarden voor y geven, waaruit volgt, dat de kromme alsdan geheel tusschen de assymptoot ZZ' en de raaklijn van den top der parabool moet begrepen zijn. De kromme heeft in dit geval, behalve de

top,

top, nog een punt W met de parabool gemeen, dat met $x = \frac{1}{2}p$ overeenstemt, want nemende $OV = \frac{1}{2}p$, dan is OW de normaal van het punt W; dezelve staat bij gevolg loodregt op de raaklijn SS′ van dit punt, en het punt W is bij gevolg een punt van de gevraagde kromme. De vergelijking bevestigt dit volkomen; want stellende in dezelve $x = \frac{1}{2}p$, dan komt er $y = \sqrt{p(a - \frac{1}{2}p)}$, hetgeen juist de ordinaat van de parabool is, die met de abscis $AV = a - \frac{1}{2}p$ overeenstemt, en het is uit de constructie klaar, dat onze kromme met de parabool niet anders, dan het punt A en de punten W en W′ gemeen kan hebben.

Wij hebben in § 6. opgemerkt, dat $x = 0$ ook $y = 0$ makende, O een punt van de kromme is. Deze stelling maakt eigenlijk

$$y = 0\sqrt{\frac{a}{-\frac{1}{4}p}} = 0 . \sqrt{\frac{4a}{p}} . \sqrt{-1},$$

en dus y gelijk 0 maal eene onbestaanbare grootheid, en daar voor $x = \pm\alpha$, waarin α eene zeer kleine grootheid beteekent, y werkelijk onbestaanbaar wordt, toont dit aan, dat het punt O, offchoon werkelijk in de vergelijking begrepen zijnde, een afzonderlijk punt is, dat niets met het overige van de kromme gemeen heeft. Deze omstandigheid heeft in alle gevallen plaats, waarin a positief is.

Schrijven wij $\frac{\partial y}{\partial x}$ (§ 8), onder den vorm

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp \frac{x^2 - (\frac{1}{2}a + \frac{3}{8}p)x + \frac{1}{4}ap}{(a - x)^{\frac{1}{2}}(x - \frac{1}{4}p)^{\frac{3}{2}}},$$

dan is het klaar, dat dezelve niet oneindig kan worden als voor $x = a$ of $x = \frac{3}{4}p$; de raaklijn van onze kromme staat dus alleen bij A en bij E loodregt op de as.

Stellen wij $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, dan komt er,

$$x = \tfrac{1}{4}(a + \tfrac{3}{4}p) \pm \tfrac{1}{4}\sqrt{(a^2 - \tfrac{5}{2}ap + \tfrac{9}{16}p^2)} \quad . \quad (\text{VIII})$$

en hierdoor zijn de punten T en U bepaald, waarbij y een maximum of minimum is.

Het buigpunt R wordt (§. 9) gevonden, door $OQ = \frac{ap}{a + \frac{3}{4}p}$ te nemen. In onze figuur hebben wij $a = 3p$ genomen, en wij hebben alzoo voor deze figuur $OQ = \frac{4}{5}p$.

Wil

Wil men voor elk punt de fubtangens berekenen of conftrueren, dan heeft men hiertoe

$$\frac{y\,\partial x}{\partial y} = -\,\frac{x(a-x)\,(x-\frac{1}{4}p)}{x^2-(\frac{1}{2}a+\frac{3}{8}p)x+\frac{1}{4}ap} \;\ldots\; (\mathrm{IX})$$

en men kan hiertoe ook van de fubnormaal gebruik maken, waarvoor men vindt

$$\frac{y\,\partial y}{\partial x} = -\,\frac{x\,\{x^2-(\frac{1}{2}a+\frac{3}{8}p)x+\frac{1}{4}ap\}}{(x-\frac{1}{4}p)^2} \;\ldots\; (\mathrm{X})$$

§. 11. Naar mate a kleiner pofitief genomen wordt, nadert het punt W meer tot A, en dit punt W zal klaarblijkelijk in A vallen, wanneer $a = \frac{1}{2}p$ genomen wordt, omdat alsdan V in A valt. De vergelijking is alsdan

$$y = \pm\, x\sqrt{\frac{\frac{1}{2}p-x}{x-\frac{1}{4}p}},$$

en de kromme neemt de gedaante aan van *Fig.* 114. Er heeft alsdan geen maximum of minimum voor y plaats, omdat (VIII), voor $a = \frac{1}{2}p$, onbeftaanbare waarden voor x geeft. Het buigpunt blijft echter beftaan; want ftellende in (VII) $a = \frac{1}{2}p$, dan vinden wij $x = \frac{2}{5}p = \frac{4}{5}a$. Nemende dus OQ $= \frac{4}{5}$ OA, dan zal R het buigpunt zijn.

§. 12. Wordt a tusfchen $\frac{1}{2}p$ en $\frac{1}{4}p$ genomen, dan verandert de kromme niet zeer veel van gedaante; daar echter dezelve altijd tusfchen de afymptoot ZZ' en de raaklijn van den top begrepen blijft, en deze lijnen meer tot elkander naderen, naar mate a meer tot $\frac{1}{4}p$ nadert, zoo volgt hieruit, dat de kromme nader en nader tot de regte lijn zal komen, welke raaklijn aan den top van de parabool is, naar mate a digter bij $\frac{1}{4}p$ genomen wordt.

§. 13. Nemen wij werkelijk $a = \frac{1}{4}p$, of het punt O in het brandpunt, dan is het, uit het gezegde in de voorgaande §, reeds meer dan waarfchijnlijk, dat de kromme zal overgaan in de raaklijn van den top. Onze vergelijking is alsdan

$$y = \pm\, x\sqrt{\frac{\frac{1}{4}p-x}{x-\frac{1}{4}p}},$$

zoodra wij dus aan x eene willekeurige waarde a geven, verkrijgen wij

$$y = \pm\, a\sqrt{\frac{\frac{1}{4}p-a}{a-\frac{1}{4}p}} = \pm\, a\sqrt{-1},$$

en dan wordt y onbestaanbaar. Hiervan is echter het geval uitgezonderd, waarin $x = \frac{1}{4}p$ genomen wordt, want dan geeft de vergelijking

$$y = \pm \tfrac{1}{4}p \sqrt{\frac{0}{0}},$$

dat is, voor $x = \frac{1}{4}p$ is y geheel onbepaald, hetgeen ten duidelijkste de raaklijn van den top aantoont.

Nog duidelijker wordt dit uit de vergelijking (III), want stellende in dezelve $a = \frac{1}{4}p$, dan gaat dezelve over in

$$(x - \tfrac{1}{4}p)(x^2 + y^2) = 0,$$

waaraan voldaan wordt door te nemen

$$x = \tfrac{1}{4}p \qquad \text{of} \qquad y = \pm x\sqrt{-1},$$

waarvan de eerste de vergelijking is van de raaklijn aan den top, terwijl de tweede, alleen voor $x = 0$ doorgaande, het afgezonderde punt O aantoont. *Wanneer dus uit het brandpunt van eene parabool loodlijnen op al de raaklijnen getrokken worden, dan zullen de voetpunten dezer loodlijnen alle gelegen zijn in de raaklijn van den top der parabool.*

§ 14. Wordt a positief, maar kleiner dan $\frac{1}{4}p$ genomen, *Fig.* 115, dan valt de asymptoot ZZ' ter linkerhand van A, en de kromme kan alleen van $x = a$ tot $x = \frac{1}{4}p$ bestaan. De raaklijn van A en de asymptoot blijven dan nog de eenigste raaklijnen, die loodregt op de as staan; de kromme heeft geen maxima of minima voor y, doch de buigpunten blijven aanwezig; want omdat (VII) aldus kan geschreven worden:

$$x = \frac{p}{1 + \frac{3}{4}\frac{p}{a}},$$

en $a < \frac{1}{4}p$ is, zoo is $p > 4a$, dus $\frac{p}{a} > 4$, bij gevolg $\frac{3}{4}.\frac{p}{a} > 3$, en $1 + \frac{3}{4}.\frac{p}{a} > 4$, waaruit volgt $x < \frac{1}{4}p$, dat is, de waarde van x, welke de buigpunten moet aanwijzen, blijft tusschen de grenzen van x, die bestaanbare waarden voor y geven.

§. 15. Stellen wij $a = 0$, dat is, nemen wij het punt O in den top, *Fig.* 116, dan wordt de vergelijking

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x}{\frac{1}{4}p - x}},$$

en

en dit geval is bijzonder merkwaardig; want de laatstgevondene vergelijking is niets anders, dan die van deze *cissoide*, waarvan de voortbrengende cirkel $\frac{1}{8}p$ tot straal heeft, waaruit volgt, *dat wanneer uit den top van eene parabool loodlijnen op al de raaklijnen getrokken worden, de voetpunten dezer loodlijnen standvastig gelegen zullen zijn in eene cissoide, voortgebragt door den cirkel, welke den afstand van den top tot de rigtlijn tot middellijn heeft.* Wij achten de cissoide genoeg bekend, om hier niet over derzelver eigenschappen uit te weiden. Alleen merken wij op, dat dit het eenigste geval is, waarin onze kromme een keerpunt heeft, en waarin dus de raaklijn van den top der parabool niet tevens raaklijn van de kromme is. Onze formulen bevestigen dit volkomen.

§. 16. Nemen wij a negatief, of het punt O op het verlengde van de as, dan wordt onze vergelijking

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a + x}{\frac{3}{4}p - x}}.$$

Hierin kan nu x niet grooter positief dan $\frac{3}{4}p$ en niet grooter negatief dan $-a$ genomen worden, en de kromme is dus, *Fig.* 117, wederom begrepen tusschen de raaklijn van A en de asymptoot ZZ'. Voor $x = 0$ is nu werkelijk $y = 0$, en voor $x = -a$ is mede $y = 0$, zoodat de kromme de as in O en A doorsnijdt. Nemende x van 0 tot $-a$, dan blijven de waarden van y eindig en bestaanbaar, zoodat de kromme van O tot A een' knoop heeft. Nemende x van 0 tot $\frac{3}{4}p$, dan wordt y grooter en grooter, totdat $x = \frac{3}{4}p$, $y = \infty$ maakt; en er bestaan dus van O tot r twee oneindige takken, die ZZ' tot asymptoot hebben. Buigpunten kunnen hier niet bestaan, want stellende in (VII) a negatief, dan komt er

$$x = \frac{ap}{a - \frac{3}{4}p} = p + \frac{\frac{3}{4}p^2}{a - \frac{3}{4}p} = -\left\{\frac{4}{3}a + \frac{\frac{4}{3}a^2}{\frac{3}{4}p - a}\right\},$$

en nu is het gemakkelijk in te zien, dat voor elke waarde van a de waarde van x buiten de grenzen valt, binnen welke bestaanbare waarden voor y plaats hebben.

Om het maximum van y, dat is de grootste breedte van den knoop, te bepalen, moeten wij in (VIII) a negatief stellen. Dit geeft

$$x = \frac{1}{4}\left\{(-a + \frac{3}{4}p) \pm \sqrt{(a + \frac{5}{8}ap + \frac{9}{16}p^2)}\right\},$$

welke waarde nu altijd bestaanbaar is.

Wij kunnen hier echter het bovenste teeken niet gebruiken; want omdat $\sqrt{(a^2 + \frac{5}{2}ap + \frac{9}{16}p^2)}$ grooter dan $a + \frac{3}{4}p$ is, zou dit bovenste teeken x grooter dan $\frac{1}{4}(\frac{3}{2}p)$, dat is, grooter dan $\frac{3}{8}p$ geven, hetgeen y onmogelijk zou maken, omdat $\frac{1}{4}p$ de grootste positieve waarde is, die x bereiken kan. Dit in aanmerking nemende, zullen wij ter bepaling van het punt I hebben

$$x = \frac{1}{4}\left\{(-a + \frac{3}{4}p) - \sqrt{(a^2 + \frac{5}{2}ap + \frac{9}{16}p^2)}\right\},$$

zoodat de werkelijke waarde van OH zal zijn

$$OH = \frac{1}{4}\left\{a - \frac{3}{4}p + \sqrt{(a^2 + \frac{5}{2}ap + \frac{9}{16}p^2)}\right\}.$$

Wil men de hoeken bepalen, onder welke de beide takken in O door de as gaan, dan zullen wij in (V) $x = 0$ en a negatief moeten stellen, en dit zal voor de tangenten van de gevraagde hoeken geven

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp\sqrt{\frac{4a}{p}} = \mp\frac{\sqrt{\frac{1}{4}ap}}{\frac{1}{4}p};$$

beschrijven wij dus op EA een' cirkel, trekken wij GI en G′I′ evenwijdig met de as, en trekken wij de lijnen IO en I′O, dan zullen dit de raaklijnen aan het punt O van de kromme zijn.

§. 17. Onze kromme lijn heeft nog vele merkwaardige eigenschappen, welke wij echter, om niet te langwijlig te worden, met stilzwijgen moeten voorbijgaan. Alleen merken wij in het voorbijgaan aan, dat, even zoo als de kromme, die door de voetpunten der loodlijnen gevormd wordt, welke uit eenig punt op al de raaklijnen van eenen cirkel vallen, dezelfde kromme is, die voortgebragt wordt door een punt in eenig cirkelvlak, dat over een' cirkel van gelijke grootte rolt, ook onze kromme dezelfde is, welke voortgebragt zou worden, door eenig punt in de as van eene parabool, welke over eene andere parabool van gelijke parameter rolt, zoodanig, dat bij den aanvang der beweging de twee toppen op elkander liggen. Deze stelling is zelfs alleen een bijzonder geval van eene nog algemeenere, welke op alle kromme lijnen toepasselijk is. Zij namelijk AB, *Fig.* 118, eene willekeurige kromme lijn, van welke de vergelijking tusschen AC $= x$ en BC $= y$ bekend is, en trekken wij uit eenig punt O van de as loodlijnen OP op de raaklijnen, dan zullen wij, OP $= z$ en $\angle$ AOP $= \phi$ stellende, altijd de vergelijking tusschen z en ϕ op dezelfde wijze kunnen vinden,

als

als wij in §. 1. voor de parabool hebben aangewezen; want wij zullen hebben $CT = \frac{y \partial x}{\partial y}$ en $AT = x - \frac{y \partial x}{\partial y}$, zoodat $AO = a$ stellende

$$z = (a + x - \frac{y \partial x}{\partial y}) \, Cos.\phi,$$

of, omdat $\frac{\partial y}{\partial x} = Cot.\phi$ is,

$$z = (a + x - y \, Tang.\phi) \, Cos.\phi;$$

bovendien hebben wij de vergelijkingen $y = F(x)$ en $\frac{\partial y}{\partial x} = Cot.\phi$; uit deze twee laatste vergelijkingen kunnen wij dus x en y in ϕ en bekenden oplossen, en deze in de waarde van z overbrengende, zullen wij z in ϕ alleen vinden uitgedrukt. Zoodat wij zullen hebben $z = f(\phi)$.

Verbeelden wij ons nu, dat, voor elken stand van de raaklijn BT, de geheele figuur om deze raaklijn wordt omgevouwen, zoodat C in C′ valt, O in O′, *enz.*, dan is het duidelijk in te zien, dat de achtervolgende standen, die O′ hierdoor verkrijgt, dezelfde zijn, welke dit punt verkrijgen zou, wanneer de kromme A′B over de kromme AB van gelijke grootte zoodanig heenrolden, dat bij den aanvang A′ op A ligt; maar dan is het even duidelijk in te zien, dat overal OO′ loodregt door TB zal gaan, en dat overal $OO' = 2\,OP$ zal wezen. Is dus $OP = z = f(\phi)$ dan zal $OO' = z' = 2 f(\phi)$ zijn, en hieruit volgt, dat de meetkunstige plaats van het punt O′ dezelfde zal wezen als die van het punt P, alleen met dit onderscheid, dat zij op eene dubbele schaal geteekend is.

Niets is nu gemakkelijker, dan het gezegde op onze parabolen toe te passen. Om namelijk dezelfde kromme lijn te verkrijgen, die wij in onze oplossing omschreven hebben, zullen wij, eene parabool moeten construeren, waarvan de parameter de helft is van de opgegevene, en hierom eene andere van gelijke grootte moeten laten heen rollen, en wel zoodanig, dat bij den aanvang de toppen op elkander liggen. Op de as van de bewegende parabool zal men een punt moeten nemen, dat van den top op eenen afstand staat, gelijk den halven afstand, die het gegeven punt O van den top heeft, dat is gelijk $\frac{1}{2}a$, en dit punt zal dan ge-

durende de omwenteling onze verhandelde kromme lijn doorloopen — Men vergelijke hiermede hetgeen wij in het voorgaande vraagſtuk gezegd hebben, en leze bovendien na *Verzameling van Wiskundige Voorſtellen*, I *Deel*, Voorstel XC *tot* XCV *ingeſloten*, en men zal in de algemeene aanmerking, op het laatstgenoemde vraagſtuk, een gemakkelijk middel vinden opgegeven, ten einde om aan onze kromme lijn, en alle andere, die op ſoortgelijke wijze worden voortgebragt, raaklijnen te trekken.

CCI. Voorstel.

Door L. Rijsterborg.

In eene gegevene paraboloide den grootstmogelijken cilinder te beſchrijven?

Opgelost *door* L. Rijsterborg, L. I. Ulman, J. Bassan, I. W. Martini, A. E. Tromp, W. Top Wz., J. B. Volmer van Born, P. de Perez en R. van Wijk Jz.

Oplossing *van* L. Rijsterborg.

Zij AF $= a$, *Fig.* 119. de as der paraboloide en BF $= r$ de ſtraal van het grondvlak. Stellen wij nu AG $= x$, dan is GF $= a - x$, en daar AF : AG $=$ FB^2 : DG^2, of $a : x = r^2 : \text{DG}^2$ is, zoo is $\text{DG}^2 = \frac{r^2}{a} x$. De inhoud van den cilinder is dus

$\text{DG}^2 \pi \times \text{FG}$ of $\frac{r^2 \pi}{a} x (a - x)$, en daar deze inhoud een maximum moet zijn, zullen wij alleen de functie

$$y = x (a - x) = ax - x^2$$

tot een maximum moeten maken. Hiertoe moeten wij ſtellen

$$\frac{\delta y}{\delta x} = a - 2x = 0,$$

waaruit $$x = \tfrac{1}{2} a.$$

De tweede differentiaal coefficient $\frac{\delta^2 y}{\delta x^2} = -2$ negatief zijnde, toont een maximum aan, en wij zullen dus de as AF ſlechts in G midden door moeten deelen, om de hoogte van den cilinder, en dus den geheelen cilinder, te bepalen.

Aan-

Aanmerking. *Door* L. J. Ulman en J. Bassan.

Wilde men op het grondvlak van de paraboloïde een' scheefhoekigen cilinder zetten, waarvan de omtrek des bovenvlaks in het oppervlak van de paraboloïde gelegen is, dan zou het bovenvlak daarom nog door het midden van de as moeten gaan; want de scheeve en regte cilinder DI' en DI, die tusschen dezelfde vlakken DE en BC staan, zijn even groot, en op het oogenblik, dat de regte cilinder de grootste waarde verkrijgt, zal dus ook de scheeve cilinder de grootste waarde moeten verkrijgen.

CCII. Voorstel.

Door U. Huguenin.

Wanneer door eenen bol twee cilindervormige gaten geboord zijn, van welke de middellijnen gelijk zijn aan den straal des bols, en in dier voege, dat dezelve elkander aanraken volgens eene middellijn van den bol, dan vraagt men, indien deze bol gesneden wordt, door het vlak, dat de beide cilinders in de gemeenschappelijke middellijn van den bol aanraakt, het zwaartepunt van den halven aldus uitgeholden bol te bepalen?

Oplossing *van* U. Huguenin.

Laat, *Fig.* 120, EC $=$ AC $= r$ de radius van den halven bol en AP $=$ PC $= \frac{1}{2} r$ de straal van den uitgeholden cilinder zijn. Zij voorts EF eene willekeurige doorsnede, evenwijdig met de doorsnijdingsvlakte BD, welke den bol midden door deelt, en laat den veranderlijken hoek ECA, of, dat hetzelfde is, den boog, die voor den straal 1 tot dezen hoek behoort, door ϕ worden uitgedrukt, dan is EG $=$ EC $Sin.\phi = r\,Sin.\phi$, GC $= r\,Cos.\phi$ en AG $= r\,(1 - Cos.\phi)$. Zij nu, *Fig.* 121, een cirkel, welke met EG als straal beschreven is, en waarin G'H' $=$ G'h' gelijk is aan GH $=$ Gh van *Fig.* 120; laat voorts door de punten H' en h' de lijnen IL en MN loodregt op de middellijn E'F' getrokken worden, dan stelt *Fig.* 121 de ware gedaante voor van de doorsnede, welke bij EF, *Fig.* 120,

 door

door het uitgeholde ligchaam gaat, zijnde in deze figuur ILNMI de doorsnede van het uitgeholde gedeelte, terwijl de som der segmenten IE'L en MF'N de doorsnede van het massive gedeelte des uitgeholden ligchaams zal wezen.

Nu is, *Fig.* 120, $GH^2 = AG \times GC = r^2 \, Cos.\phi \, (1 - Cos.\phi)$ en dus

$$GH = r \sqrt{(Cos.\phi - Cos^2\phi)},$$

zoodat $EH = EG - HG = r \, Sin.\phi - r\sqrt{Cos.\phi \, (1 - Cos.\phi)}$

en $HF = FG + HG = r \, Sin.\phi + r\sqrt{Cos.\phi \, (1 - Cos.\phi)}$

en deze waarden te zamen vermenigvuldigende, komt er

$$EH \times HF = r^2 \, Sin^2\phi - r^2 \, Cos.\phi \, (1 - Cos.\phi)$$

of, omdat EH en HF van *Fig.* 120 gelijk E'H' en H'F' van *Fig.* 121 zijn,

$$E'H' \times H'F' = r^2 \, (1 - Cos.\phi),$$

dat is $H'I^2 = r^2 \, (1 - Cos.\phi),$

zoodat $H'I = H'L = h'M = h'N = r\sqrt{(1 - Cos.\phi)}.$

Voorts is $H'G' = IG' \, Cos. \, IG'H'$, en hieruit volgt

$$Cos. \, IG'H' = \frac{H'G'}{IG'} = \frac{r\sqrt{Cos.\phi \, (1 - Cos.\phi)}}{r \, Sin.\phi} = \sqrt{\frac{Cos.\phi}{1 + Cos.\phi}},$$

zoodat de boog, die voor den straal 1 tot dezen hoek behoort, wordt uitgedrukt door

$$Boog \, Cos. \sqrt{\frac{Cos.\phi}{1 + Cos.\phi}};$$

de boog IE' zal bijgevolg zijn

$$Boog. \, IE' = IG' \, Boog. \, Cos. \sqrt{\frac{Cos.\phi}{1 + Cos.\phi}},$$

of, omdat $IG' = EG = r \, Sin.\phi$ is,

$$Boog \, IE' = r \, Sin.\phi \times Boog \, Cos. \sqrt{\frac{Cos.\phi}{1 + Cos.\phi}};$$

maar wanneer de cosinus van een' boog is $\sqrt{\frac{Cos.\phi}{1 + Cos.\phi}}$, dan is de sinus van dezen boog $\sqrt{\left(1 - \frac{Cos.\phi}{1 + Cos.\phi}\right)}$ of $\sqrt{\frac{1}{1 + Cos.\phi}}$; en bijgevolg is alsdan de cotangens van dien boog gelijk $\sqrt{Cos.\phi}$; wij hebben bij gevolg

$$Boog \, IE' = r \, Sin.\phi \times Boog \, Cot. \sqrt{Cos.\phi}.$$

Vermenigvuldigt men nu dezen boog met den halven straal, dat is met $\frac{1}{2} IG' = \frac{1}{2} r \, Sin.\phi$, dan verkrijgt men

$$Sector\ IG'E' = \tfrac{1}{2}\, r^2\ Sin^2.\phi\, .\, Boog\ Cot.\sqrt{Cos\,\phi}.$$

Verder is de inhoud van den driehoek IH′G′,

$$drieh.\ IH'G' = \tfrac{1}{2}\, IH' \times H'G' = \tfrac{1}{2}\, r\sqrt{(1 - Cos.\phi)} \times r\sqrt{Cos.\phi}\,(1 - Cos.\phi)$$
$$= \tfrac{1}{2}\, r^2 (1 - Cos.\phi)\sqrt{Cos.\phi},$$

en als men deze uitdrukking van die voor den sector aftrekt, dan blijft er

$$Figuur\ IE'H' = \tfrac{1}{2}\, r^2\ Sin^2.\phi\ Boog\ Cot.\sqrt{Cos.\phi} - \tfrac{1}{2}\, r^2 (1 - Cos.\phi)\sqrt{Cos.\phi},$$

hetwelk met 4 vermenigvuldigd, voor de som der inhouden van de gelijke segmenten I′EL en MF′N geeft:

$$2.\, segt.\ IE'L = 2\, r^2 \{ Sin^2\, \phi\ Boog\, Cot.\sqrt{Cos.\phi} - (1 - Cos.\phi)\sqrt{Cos\,\phi} \}.$$

Om de differentiaal van den inhoud des uitgeholden ligchaams te vinden, moeten wij de laatstgevondene uitdrukking vermenigvuldigen met de differentiaal van AG, dat is met $\delta . r(1 - Cos.\phi) = r\ Sin.\phi\,\delta\phi$. Dit geeft ons

$$\delta I = 2r^3 \{ Sin^3\phi\, .\, Boog Cot.\sqrt{Cos.\phi} - (1 - Cos.\phi)\ Sin.\phi\sqrt{Cos.\phi} \}\delta\phi$$

$$= 2\, r^3 \{ Sin^3\phi . Boog\ Cot.\sqrt{Cos\phi} - Cos^{\frac{1}{2}}\phi Sin.\phi + Cos^{\frac{3}{2}}\phi\, Sin.\phi \}\delta\phi . \ (1)$$

waaruit voor den inhoud volgt

$$I = 2\, r^3 \{ \int Sin^3 . \phi\ Boog\ Cot.\sqrt{Cos.\phi}\, \delta\phi - \int Cos.^{\frac{1}{2}}\phi\, Sin.\phi\delta\phi \ldots$$
$$+ \int Cos.^{\frac{3}{2}}\phi\ Sin.\phi\delta\phi \} \ldots (2)$$

de twee laatste dezer integralen worden zeer gemakkelijk gevonden; want omdat $Sin.\phi\delta\phi = -\delta . Cos.\phi$ is, zoo hebben wij

$$\int Cos.^{\frac{1}{2}}\phi Sin.\phi\delta\phi = -\int Cos.^{\frac{1}{2}}\phi\delta . Cos.\phi = -\tfrac{2}{3} Cos.^{\frac{3}{2}}\phi \ldots (3)$$

$$en\ \int Cos.^{\frac{3}{2}}\phi\, Sin.\phi\delta\phi = -\int Cos.^{\frac{3}{2}}\phi\delta . Cos.\phi = -\tfrac{2}{5} Cos.^{\frac{5}{2}}\phi \ldots (4)$$

zoodat er nog alleen overblijft de eerste integraal te vinden. Hiertoe hebben wij vooreerst

$$\int Sin^3 . \phi Boog Cot.\sqrt{Cos.\phi}.\delta\phi = \int Sin\ \phi (1 - Cos^2 . \phi) B. Cot.\sqrt{Cos.\phi}.\delta\phi$$
$$= \int Sin.\phi Boog Cot.\sqrt{Cos.\phi}.\delta\phi - \int Sin\ \phi Cos^2 . \phi B. Cot.\sqrt{Cos.\phi}.\delta\phi . (5)$$

Om nu de integraal van den eersten term te vinden, differentieren wij de uitdrukking $Cos.\phi Boog\ Cot.\sqrt{Cos.\phi}$ en wij vinden

$$\delta . (Cos.\phi\, Boog\ Cot.\sqrt{Cos.\phi}) = -Sin.\phi\, Boog\ Cot.\sqrt{Cos.\phi}\,\delta\phi \ldots$$
$$+ Cos.\ \phi\,\delta\, .\, Boog\ Cot.\sqrt{Cos.\phi}$$

$$of\ \ Sin.\phi\, Boog\ Cot.\sqrt{Cos.\phi}\, .\, \delta\phi = -\delta . (Cos.\phi\, Boog\ Cot.\sqrt{Cos.\phi})$$
$$+ Cos.\ \phi\,\delta .\, Boog\ Cot.\sqrt{Cos.\phi}$$

en $\int Sin.\phi\, Boog\, Cot.\sqrt{Cos}\ \phi\, \partial\phi = - Cos.\phi\, Boog\, Cot.\sqrt{Cos}\ \phi \ldots$

$$+ \int Cos.\phi\, \partial.Boog\, Cot.\sqrt{Cos.\phi} \ldots (6)$$

Stellende nu in deze laatste integraal $\sqrt{Cos.\phi} = x$, en dus $Cos.\phi = x^2$, dan is $\partial.Boog\, Cot.\sqrt{Cos.\phi} = - \frac{\partial x}{1 + x^2}$ en bij gevolg

$$\int Cos.\phi\, \partial.Boog\, Cot.\sqrt{Cos.\phi} = \int \frac{-x^2 \partial x}{1+x^2} = -x + Boog\, Tang.x$$

$$= -\sqrt{Cos.\phi} + Boog\, Tang.\sqrt{Cos.\phi}$$

en substituerende dit in (6), dan komt er

$$\int Sin.\phi\, Boog\, Cot.\sqrt{Cos.\phi}\, \partial\phi = - Cos.\phi\, Boog\, Cot.\sqrt{Cos.\phi} \ldots$$

$$+ Boog\, Tang.\sqrt{Cos.\phi} - \sqrt{Cos.\phi} \ldots (7)$$

waardoor dan de eerste integraal, die in (4) voorkomt, gevonden is.

Ten einde de tweede integraal, die in deze zelfde formule bevat is, te bepalen, differentieren wij de uitdrukking $Cos^3.\phi\, Boog\, Cot\ \sqrt{Cos.\phi}$, en vinden

$$\partial.(Cos^3.\phi\, Boog\, Cot\ \sqrt{Cos.\phi}) = -3\, Sin.\phi\, Cos^2.\phi\, Boog\, Cot.\sqrt{Cos.\phi}.\partial\phi$$

$$+ Cos^3.\phi\, \partial.Boog\, Cot\ \sqrt{Cos.\phi}$$

of $3\, Sin.\phi\, Cos^2.\phi\, Boog\, Cot.\sqrt{Cos.\phi}\, \partial\phi = -\partial(Cos^3.\phi\, Boog\, Cot.\sqrt{Cos.\phi})$

$$+ Cos^3.\phi\, \partial.Boog\, Cot.\sqrt{Cos.\phi}$$

en $\int Sin\, \phi\, Cos^2.\phi\, Boog\, Cot.\sqrt{Cos.\phi}\, \partial\phi = -\frac{1}{3}(Cos^3.\phi\, Boog\, Cot\, \sqrt{Cos.\phi})$

$$+ \frac{1}{3} \int Cos^3.\phi\, \partial.Boog\, Cot.\sqrt{Cos.\phi} \ldots (8)$$

Stellende nu wederom $\sqrt{Cos\ \phi} = x$, dan wordt

$$\int Cos^3 \phi\, \partial.Boog\, Cot.\sqrt{Cos.\phi} = - \int \frac{x^6\, \partial x}{1 + x^2},$$

$$= -\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 - x + Boog\, Tang.x$$

en substitueren wij dit in (8), dan komt er

$$\int Sin.\phi\, Cos^2.\phi\, Boog\, Cot.\sqrt{Cos.\phi}\, \partial\phi = -\frac{1}{3} Cos^3.\phi\, Boog\, Cot.\sqrt{Cos.\phi}$$

$$- \frac{1}{3.5} Cos^2.\phi \sqrt{Cos.\phi} + \frac{1}{3.3} Cos\ \phi \sqrt{Cos.\phi} - \frac{1}{3}\sqrt{Cos.\phi}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{3} Boog\, Tang\ \sqrt{Cos.\phi} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Brengende nu de formulen (7) en (9) over in (5), dan komt er

$$\int Sin^3 \phi\, Boog\, Cot\ \sqrt{Cos.\phi}.\partial\phi = -(1-\tfrac{1}{3}Cos^2.\phi)\, Cos.\phi\, Boog\, Cot.\sqrt{Cos.\phi}$$

$$+ \frac{2}{3} Boog\, Tang.\sqrt{Cos}\ \phi - \frac{2}{3} Cos.^{\frac{1}{2}} \phi - \frac{1}{9} Cos.^{\frac{3}{2}} \phi + \frac{1}{15} Cos.^{\frac{5}{2}} \phi$$

en substituerende dit, benevens (3) en (4) in de vergelijking (2), dan verkrijgen wij

I =

$$I = 2r^3 \{ -(1 - \tfrac{1}{3} Cos^2.\phi) Cos.\phi \; Boog\,Cot. \sqrt{Cos.\phi} + \tfrac{2}{3} Boog\,Tang. \sqrt{Cos.\phi} ..$$
$$- \tfrac{2}{3} Cos.^{\frac{1}{2}} \phi + \tfrac{5}{9} Cos.^{\frac{3}{2}} \phi - \tfrac{1}{3} Cos.^{\frac{5}{2}} \phi + C \} \ldots\ldots (11)$$

Om de ſtandvastige grootheid C te bepalen, merken wij op, dat voor $\phi = 0$ ook AG en dus ook de inhoud I gelijk nul moet worden. Nu geeft $\phi = 0$ ons $Cos.\phi = 1$, en *Boog Tang.* $\sqrt{Cos.\phi}$ = *Boog Tang.* $1 = \tfrac{1}{4}\pi$; zoodat

$$0 = 2\,r^3 (- \tfrac{2}{3} . \tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{2}{3} . \tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{2}{3} + \tfrac{5}{9} - \tfrac{1}{3} + C) \text{ dus } C = \tfrac{4}{9}.$$

Om eindelijk hierdoor den inhoud van den halven uitgeholden bol te vinden, moet $\phi = 90^0 = \tfrac{1}{2}\pi$ genomen worden. Hierdoor wordt $Cos\,\phi = Cos.^{\frac{1}{2}} \phi = Cos.^{\frac{3}{2}} \phi = Cos.^{\frac{5}{2}} \phi = 0$, *Boog Tang.* $\sqrt{Cos.\phi} = 0$ en *Boog Cot.* $\sqrt{Cos.\phi} = \tfrac{1}{2}\pi$. Subſtitueren wij dan deze waarden, benevens die van C in (11), dan komt er voor den halven uitgeholden bol

$$I' = \tfrac{8}{9} r^3 = \tfrac{1}{9} . 8\, r^3 = \tfrac{1}{9} . (2\,r)^3 \; \ldots\ldots (12)$$

zoodat deze inhoud gelijk is aan het een negende gedeelte van den cubus, die om den bol kan worden beſchreven, zijnde dit dezelfde uitkomst, welke wij, op eene andere wijze, gevonden hebben in de *Verzameling van Wiskundige Voorſtellen.* I *Deel*, VOORSTEL CLIV.

Ten einde het moment van den halven uitgeholden bol, ten opzigte van het vlak BD, te verkrijgen, moeten wij de differentiaal van de ligchamelijke ruimte met $CG = r\ Cos.\phi$ vermenigvuldigen, en hiervan de integraal nemen. Vermenigvuldigende dan (1) met $r\ Cos\,\phi$, zoo vinden wij, door de integraal te nemen, voor deze ſom der momenten

$$S = 2r^4 \{ \int Cos.\phi . Sin^3.\phi \, Boog\,Cot. \sqrt{Cos.\phi}\, \partial\phi + \tfrac{2}{5} Cos.^{\frac{5}{2}} \phi - \tfrac{2}{7} Cos.^{\frac{7}{2}} \phi \} . (13)$$

Zijnde het integreren der twee laatſte termen zoo gemakkelijk, dat wij derzelver integralen ſlechts hebben nedergeſchreven.

Tot het integreren van de nog overgeblevene integraal, differentieren wij de uitdrukking $Sin^4.\phi \; Boog\,Cot. \sqrt{Cos.\phi}$, en vinden

$$\partial . (Sin^4.\phi \; Boog\,Cot. \sqrt{Cos\,\phi}) = 4\, Sin^3 \phi Cos.\phi Boog\,Cot \sqrt{Cos.\phi} . \partial\phi$$
$$+ Sin^4.\phi \, \partial . Boog\,Cot \sqrt{Cos\,\phi}$$

waaruit gemakkelijk volgt

$$\int Sin^3 . \phi Cos.\phi \, Boog\,Cot. \sqrt{Cos.\phi} . \partial\phi = \tfrac{1}{4} Sin^4.\phi \, Boog\,Cot. \sqrt{Cos.\phi} .$$
$$- \tfrac{1}{4} \int Sin^4.\phi . \partial . Boog\,Cot. \sqrt{Cos.\phi} \, ..(14)$$

Stel-

Stellende nu nogmaals $\sqrt{Cos\,\phi} = x$, dan wordt de laatſte integraal, omdat $Sin^4.\phi = (1 - Cos^2\phi)^2 = (1 - x^4)^2$ is,

$$\int Sin^4.\phi\partial.Boog\,Cot.\sqrt{Cos.\phi} = -\int\frac{(x^8 - 2x^4 + 1)\partial x}{1 + x^2}$$
$$= -\int(1 + x^2)(1 - x^2)^2\partial x$$
$$= -\tfrac{1}{7}x^7 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{3}x^3 - x$$
$$= -\tfrac{1}{7}Cos.^{\frac{7}{2}}\phi + \tfrac{1}{5}Cos.^{\frac{5}{2}}\phi + \tfrac{1}{3}Cos.^{\frac{3}{2}}\phi - Cos.^{\frac{1}{2}}\phi.$$

en ſubſtituerende dit in (14), dan komt er

$$\int Cos.\phi\,Sin^3.\phi\,Boog\,Cot.\sqrt{Cos.\phi}.\partial\phi = \tfrac{1}{4}Sin^4.\phi\,Boog\,Cot.\sqrt{Cos.\phi}$$
$$+ \tfrac{1}{4}Cos.^{\frac{1}{2}}\phi - \tfrac{1}{12}Cos.^{\frac{3}{2}}\phi - \tfrac{1}{20}Cos.^{\frac{5}{2}}\phi + \tfrac{1}{28}Cos.^{\frac{7}{2}}\phi$$

brengende dus eindelijk deze integraal in (13) over, dan komt er voor de ſom der momenten

$$S = 2r^4\{\tfrac{1}{4}Sin^4.\phi\,Boog\,Cot.\sqrt{Cos.\phi} + \tfrac{1}{4}Cos.^{\frac{1}{2}}\phi - \tfrac{1}{12}Cos.^{\frac{3}{2}}\phi \ldots\ldots$$
$$+ \tfrac{7}{28}Cos.^{\frac{5}{2}}\phi - \tfrac{1}{4}Cos.^{\frac{7}{2}}\phi + C\}.$$

Om C te vinden moet wederom $S = 0$ worden als $\phi = 0$ wordt, dit geeſt

$$0 = 2r^4(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{12} + \tfrac{7}{20} - \tfrac{1}{4} + C) \text{ of } C = -\tfrac{4}{15}.$$

Daar wij nu voor het moment van den halven uitgeholden bol $\phi = 90^\circ = \frac{1}{2}\pi$ moeten ſtellen, en hierdoor $Sin.\phi = 1$, $Cos.\phi = 0$, en $Boog\,Cot.\sqrt{Cos.\phi} = \frac{1}{2}\pi$ wordt, zoo is deze ſom der momenten

$$S' = 2r^4(\tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{4}{15}).$$

Omdat eindelijk de afſtand van het gevraagde zwaartepunt tot het middelpunt C van den bol gelijk is aan de ſom der momenten gedeeld door den inhoud, dat is gelijk $\frac{S'}{I'}$, zoo vinden wij voor dezen gevraagden afſtand

$$\frac{2r^4(\frac{1}{8}\pi - \frac{4}{15})}{\frac{8}{9}r^3} \text{ of } r(\tfrac{9}{32}\pi - \tfrac{3}{5}).$$

Wil men daarentegen den afſtand van dit zwaartepunt tot het punt A hebben, dan moet men de gevondene uitdrukking van r aftrekken, en men zal voor dezen afſtand vinden

$$r(\tfrac{8}{5} - \tfrac{9}{32}\pi).$$

Hieruit blijkt dan, dat, ofſchoon de inhoud en het oppervlak van dezen uitgeholden bol door meetbare grootheden worden

den voorgesteld, de afstand van het zwaartepunt tot het middelpunt echter geenszins in deze eigenschap deelt, daar dezelve van het getal π afhangt, die de verhouding van de middellijn tot den omtrek uitdrukt.

Eindelijk volgt nog uit het voorgaande, dat de afstand van het zwaartepunt des uitgeholden segments EAF, *Fig.* 120, tot het middelpunt C zal worden uitgedrukt door de formule

$$r\,\frac{\frac{1}{4}Sin^4.\phi\,Boog\,Cot.\sqrt{Cos\,\phi}+\frac{1}{4}Cos.^{\frac{1}{2}}\phi-\frac{1}{12}Cos.^{\frac{3}{2}}\phi+\frac{7}{25}Cos.^{\frac{5}{2}}\phi-\frac{1}{4}Cos.^{\frac{7}{2}}\phi-\frac{4}{15}}{\frac{2}{3}B.Tang\sqrt{Cos\phi}-(1-\frac{1}{3}Cos^2.\phi)Cos\phi\,B\,Cot.\sqrt{Cos\phi}-\frac{2}{3}Cos^{\frac{1}{2}}\phi+\frac{8}{9}Cos^{\frac{3}{2}}\phi-\frac{2}{5}Cos^{\frac{5}{2}}\phi+\frac{4}{9}}$$

welke formule nog algemeener zal worden, wanneer wij in plaats van $-\frac{4}{15}$ en $+\frac{4}{9}$ blijven schrijven C en C′, want dan zal dezelve den afstand aantoonen van het middelpunt C tot het zwaartepunt van een stuk, begrepen tusschen twee willekeurige vlakken, evenwijdig met het vlak BD, en wanneer deze vlakken op afstanden van BD staan, die met hoeken $\phi = \alpha$ en $\phi = \beta$ overeenstemmen, zal men alleen teller en noemer tusschen deze grenzen moeten nemen.

CCIII. VOORSTEL.

Door U. HUGUENIN.

Heeft de uitdrukking $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ *eene bestaanbare of onbestaanbare waarde? Bijaldien het eerste mogt plaats hebben, wordt gevraagd dezelve te bepalen?*

OPGELOST *door* U. HUGUENIN, I. R. SCHMIDT en I. B. VOLMER VAN BORN.

EERSTE OPLOSSING. *Door* U. HUGUENIN.

Daar $Log.(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\,Log.(\sqrt{-1})$ is, zal het er alleen op aankomen, om eene geschikte reeks voor $Log.x$ te vinden, waarin men $\sqrt{-1}$ in plaats van x kan stellen, en die men vervolgens alleen met $\sqrt{-1}$ behoeft te vermenigvuldigen, om de gevraagde waarde te bekomen.

Tot dit einde merke men op, dat

$$Log\,(1+x) = Log.\,x\,(1+\frac{1}{x}) = Log.\,x + Log\,(1+\frac{1}{x})$$

is, waardoor men heeft

$$Log. x = Log. (1 + x) - Log. (1 + \frac{1}{x}).$$

Nu is genoegzaam bekend, dat men voor de neperiaansche logarithmen heeft

$$Log. (1 + x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}. x^3 - \tfrac{1}{4} x^4 + \tfrac{1}{5} x^5 - enz.$$

en $Log. (1 + \frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}.\frac{1}{x^3} - \frac{1}{4}.\frac{1}{x^4} + \frac{1}{5}.\frac{1}{x^5} - enz.$

trekkende deze reeksen dus van elkander af, dan verkrijgt men

$$Log. x = (x - \frac{1}{x}) - \tfrac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{x^2}) + \tfrac{1}{3}(x^3 - \frac{1}{x^3}) - \tfrac{1}{4}(x^4 - \frac{1}{x^4}) + \tfrac{1}{5}(x^5 - \frac{1}{x^5}) - enz.$$

Stelt men nu $x = \sqrt{-1}$, dan is $x^2 = -1$, $x^3 = -\sqrt{-1}$, $x^4 = 1$, $x^5 = \sqrt{-1}$, $x^6 = -1$, $x^7 = -\sqrt{-1}$, $x^8 = 1$, *enz.* en bij gevolg

$$x - \frac{1}{x} = \sqrt{-1} - \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{-1}{\sqrt{-1}} - \frac{1}{\sqrt{-1}} = -\frac{2}{\sqrt{-1}},$$

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = -1 - \frac{1}{-1} = -1 + 1 = 0,$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = -\sqrt{-1} - \frac{1}{-\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} + \frac{1}{\sqrt{-1}} = +\frac{2}{\sqrt{-1}},$$

$$x^4 - \frac{1}{x^4} = 1 - \frac{1}{1} = 1 - 1 = 0,$$

$$x^5 - \frac{1}{x^5} = \sqrt{-1} - \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{-1}{\sqrt{-1}} - \frac{1}{\sqrt{-1}} = -\frac{2}{\sqrt{-1}}.$$

enz. *enz.*

en deze waarden in die van $Log. x$ substituerende, verkrijgen wij

$$Log. (\sqrt{-1}) = \frac{-2}{\sqrt{-1}} (1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + enz.)$$

of, omdat $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + enz. = Boog\,Tang. 1 = \frac{1}{4}\pi$ is,

$$Log. (\sqrt{-1}) = \frac{-2}{\sqrt{-1}} \times \tfrac{1}{4}\pi,$$

vermenigvuldigen wij dus aan beide zijden met $\sqrt{-1}$, dan komt er

$$\sqrt{-1}\, Log. (\sqrt{-1}) = -\tfrac{1}{2}\pi,$$

en van de logarithmen tot de getallen overgaande,

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\pi}},$$

waar-

waaruit blijkt, dat de gegevene uitdrukking bestaanbaar is, en derzelver waarde tevens is bepaald.

Wil men de waarde van $(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ bij benadering berekenen, dan kan men dit gevoegelijk op de volgende wijze door logarithmen verrigten. Men schrijve de gevondene waarde aldus

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{e^{\frac{1}{2}\pi}},$$

en merke op, dat $\frac{1}{2}\pi = 1,5707963$ en $e = 2,7182818$ is. Men heeft alsdan

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{2,7182818^{1,5707963}},$$

dus $$Log.\ \frac{10}{e^{\frac{1}{2}\pi}} = 1 - 1,5707963\ Log.\ 2,7182818,$$

$$= 1 - 1,5707963 \times 0,43429448,$$

en makende de waarde van dit laatste product wederom door logarithmen op, zal men vinden

$$Log.\ \frac{10}{e^{\frac{1}{2}\pi}} = 1 - 0,6821882816 = 0,3178118,$$

en dus $$\frac{10}{e^{\frac{1}{2}\pi}} = 2,0787957,$$

zoodat $$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = \frac{1}{10} \cdot \frac{10}{e^{\frac{1}{2}\pi}} = 0,20787957.$$

TWEEDE OPLOSSING. *Door* I. R. SCHMIDT.

Stellen wij in de genoegzaam bekende formule

$$Boog\ Tang.\ x = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot Nep.\ Log.\ \frac{1+x\sqrt{-1}}{1-x\sqrt{-1}}\ (*)$$

$x = 1$, dan komt er

$$\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \cdot Nep.Log.\frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{-1}} Nep.Log.\frac{(1+\sqrt{-1})^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}} Nep.\ Log.\ (\sqrt{-1}) = \frac{\sqrt{-1}}{-2} Nep.\ Log.\ (\sqrt{-1}),$$

dus

(*) Zie mijne *Differentiaal rekening*, pag. 50 *volg.* (3)

dus $\sqrt{-1} \cdot Nep. Log. \sqrt{-1} = -\frac{1}{2}\pi$,

en van de logarithmen tot de getallen overgaande,

$$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\pi}}.$$

CCIV. VOORSTEL.

Door L. J. Ulman.

Wanneer men de achtervolgende natuurlijke getallen tot de vijfde magt verheft, dan bespeurt men weldra, dat al deze vijfde magten, in de plaats der eenheden, hetzelfde cijfer als derzelver wortels hebben. Men ziet zulks, bij voorbeeld, reeds in het volgende tafeltje:

$2^5 = 32$	$4^5 = 1024$	$6^5 = 7776$	$8^5 = 32768$	enz.
$3^5 = 243$	$5^5 = 3125$	$7^5 = 16807$	$9^5 = 59049$	

en dit zelfde zal men bevinden, dat bij de negende, dertiende, zeventiende enz. magten plaats heeft.

Kan deze eigenschap der getallen zuiver wiskunstig betoogd worden, en zoo ja, zal dezelve dan ook in andere stelsels, dan in het tientallige, worden gevonden?

Opgelost *door* L. J. Ulman, W. Top Wz., R. van Wijk Jz., J. Köhler en A. B. de Bock.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Zij C de bazis van het talstelsel en c de magt, waartoe de getallen zijn verheven, zoodat in ons geval C = 10 en $c = 5$ is. Is nu N een willekeurig geheel getal, dan moet bewezen worden, dat N^c op hetzelfde cijfer zal eindigen als het getal N. Is dit nu zoo, dan zál, wanneer N^c met N verminderd wordt, dit laatste cijfer in de rest verdwijnen, en deze rest zal dus door de bazis van het talstelsel deelbaar worden, waaruit dan volgt, dat wij alleen zullen behoeven te bewijzen, dat in de opgegevene gevallen $\frac{N^c - N}{C}$ een geheel getal is, wat ook de waarde van het geheele getal N zijn moge. Of liever, wij zullen moeten onderzoeken, welke betrekking er tusschen N, c en C moet bestaan, opdat $\frac{N^c - N}{C}$ een geheel getal zal wezen.

Dit

Dit nu kan zeer gemakkelijk geschieden, wanneer men het volgende theorema van FERMAT, zoo als hetzelve door EULER is bewezen, als bekend aanneemt: (*)

„Wanneer c een ondeelbaar getal is en N een getal naar wel-„gevallen, doch niet deelbaar door c, dan zal $N^{c-1} - 1$ „door c zonder overschot kunnen gedeeld worden, zoodat „$\frac{N^{c-1} - 1}{c} = e$ alsdan een geheel getal zal zijn."

Daar het bewijs van deze stelling welligt niet in ieders handen is, zullen wij hetzelve hier kortelijk voordragen.

Zij x een geheel getal naar welgevallen, dan is

$$(1+x)^c = 1 + cx + \frac{c(c-1)}{1.2}x^2 + \text{enz.} \ldots + \frac{c(c-1)}{1.2}x^{c-2} + cx^{c-1} + x^c,$$

en dan ziet men ligtelijk, dat al de termen van deze reeks, uitgezonderd de eerste en de laatste, door c deelbaar zijn. Zij namelijk M de coefficient van een' der tusschenliggende termen x^m, zoodat m kleiner dan c, dan heeft men

$$M = \frac{c(c-1)(c-2) \ldots (c-(m-1))}{1.2.3 \ldots\ldots m}$$

of $M.1.2.3 \ldots\ldots m = c(c-1)(c-2)\ldots(c-(m-1))$, daar nu het laatste lid door c deelbaar is, moet ook het eerste lid door c deelbaar wezen; c is echter ondersteld een ondeelbaar getal te zijn, en bovendien grooter dan m, zoodat c noch in een der getallen 1, 2, 3, enz. tot m, noch in derzelver product kan deelbaar wezen, waaruit dan volgt, dat M door c moet deelbaar zijn.

Hieruit volgt dan nu, dat, c ondeelbaar en x een geheel getal zijnde, $(1+x)^c - 1 - x^c$ deelbaar door c is.

Zij nu $(1+x) = N$, dan volgt hieruit, dat ook de formule $N^c - 1 - (N-1)^c$ deelbaar zal zijn door c, wanneer slechts c ondeelbaar en N een geheel getal is. Dit kan nu alleen hiervan komen, dat $N^c - 1$ en $(N-1)^c$, beide door c gedeeld, hetzelfde overschot overlaten, en dit zullen wij kortheidshalve uitdrukken door de vergelijking:

$$O\{N^c - 1\} = O\{(N-1)^c\},$$

wel-

(*) Zie LE GENDRE, *Essai sur la Théorie des Nombres.*

welke vergelijking nu aldus gelezen moet worden: het overschot van $N^c - 1$, gedeeld door c, is gelijk aan het overschot der deeling van $(N - 1)^c$ door c.

Tellen wij alzoo bij $N^c - 1$ en $(N - 1)^c$ evenveel op, dan zullen de overschotten van de deeling door c nog even groot moeten zijn, zoodat wij dan ook zullen hebben

$$O\,\{N^c - N\} = O\,\{(N - 1)^c - (N - 1)\}.$$

Daar verder N in deze formule alle geheele getallen kan voorstellen, zoo verkrijgen wij, door N achtervolgens te doen veranderen in $N - 1$, $N - 2$, $N - 3$, *enz.*

$$O\,\{N^c - N\} = O\,\{(N - 1)^c - (N - 1)\},$$
$$O\,\{(N-1)^c - (N-1)\} = O\,\{(N-2)^c - (N-2)\},$$
$$O\,\{(N-2)^c - (N-2)\} = O\,\{(N-3)^c - (N-3)\},$$
enz. *enz.*
$$O\,\{(N-m)^c - (N-m)\} = O\,\{(N-m-1)^c - (N-m-1)\},$$

en daar het laatste lid van elke dezer vergelijkingen tevens het eerste lid van de volgende vergelijking is, zoo volgt hieruit in het algemeen

$$O\,\{N^c - N\} = O\,\{(N - p)^c - (N - p)\},$$

indien slechts p een geheel getal is.

Stellende alzoo $p = N$, dan verkrijgen wij

$$O\,\{N^c - N\} = O\,\{(N - N)^c - (N - N)\};$$

maar het overschot van het laatste lid is klaarblijkelijk gelijk o, en hieruit volgt, dat het overschot, door het eerste lid voorgesteld, mede gelijk o moet zijn. Zoodat wij dan nu bewezen hebben, dat c een ondeelbaar en N een geheel getal zijnde, $\frac{N^c - N}{c}$ of $\frac{N\,(N^{c-1} - 1)}{c} = g$ een geheel getal zal wezen.

Is dus N niet deelbaar door c, dan zal $N^{c-1} - 1$ door c deelbaar moeten zijn, hetgeen juist de opgegevene stelling van Fermat is.

Passen wij dit nu toe op ons vraagstuk, waarin wij reeds gezien hebben, dat alleen moet onderzocht worden, wanneer $\frac{N^c - N}{C}$ een geheel getal is, dan hebben wij nu reeds bewe-

zen,

zen, dat $\frac{N^c - N}{c}$ altijd een geheel getal is, wanneer c ondeelbaar is, waaruit dan blijkt, dat de eigenschap, waarvan in de opgaaf gesproken is, altijd zal doorgaan, wanneer de bazis van het talstelsel een ondeelbaar getal is, en de magten, waartoe de getallen verheven worden, gelijk zijn aan deze bazis. Deze eigenschap zal alzoo, bij voorbeeld, plaats hebben bij de derde magten in het drietallig stelsel, bij de vijfde magten in het vijftallig stelsel, bij de zevende magten in het zeventallig stelsel, en zoo vervolgens.

Verder merken wij op, dat $\frac{N^c - N}{c} = g$ niet alleen een geheel, maar ook een even getal zal wezen, wanneer c ondeelbaar is; want N even of oneven zijnde, is $N^c - N$ altijd even, en daar c, ondeelbaar zijnde, noodzakelijk oneven is (*), zoo moet het quotient even zijn. Wij kunnen alzoo $g = 2\,G$ stellen, en dan zal $\frac{N^c - N}{2c} = G$ mede een geheel getal wezen. Hieruit volgt, dat de eigenschap, in de opgaaf van het vraagstuk omschreven, ook altijd plaats zal hebben, wanneer de bazis van het talstelsel het dubbel van een ondeelbaar getal is, en de magten, waartoe de getallen verheven worden, gelijk aan de helft van de bazis, dat is, gelijk aan dit ondeelbaar getal zijn. Dit is nu het geval bij de vijfde magten in het tientallig stelsel; en hierdoor is dan de wet, die wij, in de opgaaf van dit vraagstuk, voor de vijfde magten hebben opgemerkt, zuiver wiskunstig bewezen.

Heeft de gemelde eigenschap voor de magten c plaats, dan spreekt het van zelf, dat zij ook voor de magten $2c - 1$, $3c - 2$, enz. en in het algemeen voor de magten $nc - (n - 1)$ moet doorgaan. De laatste cijfer van een gedurig product kan toch alleen van de laatste cijfers der factoren afhangen, waardoor dit product gevormd wordt. Eindigt alzoo het product van c getallen, die alle op de cijfer a uitgaan, mede met a, en men vermenigvuldigt dit product met $c - 1$ andere getal-

(*) De eenigste uitzondering hierop is het geval, waarin $c = 2$ is.

tallen, welke alle op *a* eindigen, dan heeft men wederom *c* getallen vermenigvuldigd, die op *a* eindigen, en het product moet dus wederom *a* tot laatste cijfer hebben, en dit zal dan elke reis gebeuren, wanneer men de uitkomst nogmaals met $c - 1$ factoren vermenigvuldigt, welke op *a* eindigen; waaruit dan volgt, dat indien het product van *c* factoren, die op *a* eindigen, wederom *a* tot laatste cijfer heeft, ook het product van $2c - 1$, $3c - 2$, *enz.* zulke factoren op *a* zal moeten uitgaan. Daar wij dan onze eigenschap in het tientallig stelsel voor de 5e magten bewezen hebben, zal dezelve in dit tientallig stelsel ook voor de 9e, 13e, 17e en in het algemeen voor de $(4n + 1)$e magten doorgaan.

CCV. VOORSTEL.

Door L. J. Ulman.

Men begeert een gegeven getal (A) in een zeker aantal (n) deelen te verdeelen, zoodanig, dat, wanneer men van deze achtervolgende deelen de termen eener rekenkunstige reeks (p, $p + q$, $p + 2q$, enz.) aftrekt, de resten achtervolgens door de termen der zelfde rekenkunstige reeks deelt, en uit ieder quotient den vierkantswortel trekt, deze wortels alsdan eene nieuwe rekenkunstige reeks uitmaken, waarvan het verschil der achtervolgende termen (a) gegeven is?

Opgelost door W. Top Wz., L. J. Ulman, J. Bassam, en R. van Wijk Jz.

Oplossing van W. Top Wz.

Stel de laatstgezochte reeks van getallen

$$x,\ x + a,\ x + 2a,\ enz.\ \ldots\ x + (n - 1)a,$$

dan is de onmiddelijk voorgaande reeks

$$x^2, (x + a)^2, (x + 2a)^2, enz.\ \ldots\ (x + (n - 1)a)^2;$$

de termen dezer reeks achtervolgens met die van de gegevene rekenkunstige reeks vermenigvuldigende, komt er voor de voorgaande reeks

$$px^2, (p+q)(x+a)^2, (p+2q)(x+2a)^2, enz.\ p+(n-1)q)(x+(n-1)a)^2,$$

en

en tellende hierbij de termen der gegevene rekenkunstige reeks op dan verkrijgen wij voor de deelen van het gegeven getal A
px^2+p, $(p+q)(x+a)^2+(p+q)$, $(p+2q)(x+2a)^2+(p+2q)$,
$(p+3q)(x+3a)^2+(p+3q)$, *enz.* . . . . *tot*
$+(p+(n-1)q)(x+(n-1)a)^2+(p+(n-1)q)$.
of, wanneer wij de termen van deze reeks ontwikkelen,

$$\left.\begin{array}{llll} px^2 & \ldots\ldots & \ldots\ldots & +\,p \\ (p+q)x^2 & +\,(p+q).2ax & +\,(p+q).\ a^2 & +\,(p+q) \\ (p+2q)x^2 & +\,(p+2q).4ax & +\,(p+2q).\ 4a^2 & +\,(p+2q) \\ (p+3q)x^2 & +\,(p+3q).6ax & +\,(p+3q).\ 9a^2 & +\,(p+3q) \\ (p+4q)x^2 & +\,(p+4q).8ax & +\,(p+4q).16a^2 & +\,(p+4q) \end{array}\right\}(\alpha)$$

en zoo vervolgens tot n termen.

Trekken wij deze termen van elkander af, dan vinden wij voor de eerste verschillen

$$\begin{array}{l} qx^2+(2p+2q)\,ax+(p+q)\,a^2+q \\ qx^2+(2p+6q)\,ax+(3p+7q)\,a^2+q \\ qx^2+(2p+10q)\,ax+(5p+19q)\,a^2+q \\ qx^2+(2p+14q)\,ax+(7p+37q)\,a^2+q \\ \textit{enz.} \qquad\qquad \textit{enz.} \end{array}$$

Door deze termen wederom af te trekken, worden de tweede verschillen

$$\begin{array}{l} 4q\,ax+(2p+6q)\,a^2 \\ 4q\,ax+(2p+12q)\,a^2 \\ 4q\,ax+(2p+18q)\,a^2 \\ \textit{enz.} \quad \textit{enz.} \end{array}$$

Deze termen nogmaals van elkander aftrekkende, zullen wij vinden, dat de derde verschillen alle gelijk $6qa^2$ zijn.

Daar dan de eerste termen van de reeks en de reeksen der verschillen zijn $p(x^2+1)$, $qx^2+2(p+q)ax+(p+q)a^2+q$, $4q\,ax+2(p+3q)a^2$ en $6qa^2$, zoo zal, ingevolge de leer der reeksen, die tot gelijke verschillen kunnen worden gebragt, de som van n termen der reeks (α) worden uitgedrukt door

$$n.p(x^2+1)+\frac{n(n-1)}{1.2}.(qx^2+2(p+q)ax+(p+q)a^2+q),$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.(4q\,ax+2(p+3q)a^2),$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}.6q\,a^2,$$

 en

en deze som zal nu, ingevolge het vraagstuk, gelijk A moeten zijn.

Rangschikken wij dan de termen dezer vergelijking volgens de magten van x, zoo verkrijgen wij

$$n(p+\tfrac{1}{2}\,\overline{n-1}\,q)x^2+n(n-1)a\{(p+q)+\tfrac{2}{3}(n-2)q\}x+np+n(n-1)\{\tfrac{1}{2}(a^2p+a^2q+q)+\tfrac{1}{3}(n-2)a^2(p+3q)\,..$$
$$+\tfrac{1}{4}(n-2)(n-3)a^2q\}-A=0.$$

Deze vergelijking kunnen wij voorstellen door

$$Px^2+Qx+R=0,$$

of

$$x^2+\frac{Q}{P}x+\frac{R}{P}=0,$$

en dan vinden wij uit dezelve

$$x=-\frac{Q}{2P}\pm\sqrt{\left(\frac{Q^2}{4P^2}-\frac{R}{P}\right)},$$

en hierdoor x gevonden hebbende, zijn ook de gevraagde deelen van het getal A bekend.

CCVI. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Uit het toppunt van eenen regten cirkelvormigen kegel als middelpunt is een bol beschreven, waarvan het oppervlak den kegel in twee deelen verdeelt, die tot elkander in gegevene reden staan. Indien nu de afmetingen van den kegel gegeven zijn, vraagt men den straal van dien bol te vinden?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, J. BASSAN, W. TOP Wz., R. VAN WIJK Jz. en L. W. MARTINI.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Zij ABC, *Fig.* 122. de regthoekige driehoek, door welks omwenteling de gegeven kegel geboren is, en zij AD = AE de gezochte straal, dan is het bovenste deel van den kegel een bolvormige sector, bestaande uit de som van den kegel en het bolvormig segment, door de figuren ADF en DFE gedurende de omwenteling voortgebragt.

De inhoud van een bolvormigen sector is, zoo als bekend is, ge-

gelijk aan het bolvormig oppervlak door den boog DE doorloopen, vermenigvuldigd met een derde van den straal AD; maar dit bolvormig oppervlak is, volgens den bekenden regel, gelijk den omtrek van eenen grooten cirkel des bols, vermenigvuldigd met de hoogte DE, en bijgevolg is

$$\textit{Inh. bolv. sect.}\ ADE = 2\,AD \times \pi \times FE \times \tfrac{1}{3}\,AD.$$
$$= \tfrac{2}{3}\,\pi\,.\,AD^2\,(AD - AF).$$

Stellende nu $AB = a$, $AC = h$ en $AD = x$, dan is

$$AB : AC = AD : AF \text{ of } a : h = x : AF, \text{ dus } AF = \frac{h}{a}\,x,$$

waardoor

$$\textit{Inh. bolv. sect.}\ ADE = \tfrac{2}{3}\pi x^2 \left(x - \frac{h}{a}x\right) = \tfrac{2}{3}\pi\,.\,\frac{a-h}{a}\,x^3.$$

De inhoud van den geheelen kegel is

$$\textit{Inh. keg.}\ ABC = \tfrac{1}{3}\,AC \times BC^2\,.\,\pi = \tfrac{1}{3}\,\pi\,.\,h\,(a^2 - h^2).$$

Is nu de reden van de twee stukken gegeven, waarin de kegel door het bolvormig oppervlak verdeeld moet worden, dan is ook de reden van het bovenste stuk tot den geheelen kegel bekend. Stellen wij deze reden als p tot q, dan hebben wij alzoo

$$\tfrac{2}{3}\,\pi\,\frac{a-h}{a}\,x^3 : \tfrac{1}{3}\,\pi\,h\,(a^2 - h^2) = p : q,$$

of $\quad 2\,(a-h)\,x^3 : ah\,(a^2 - h^2) = p : q,$

dat is $\quad x^3 : \tfrac{1}{2}\,ah\,(a+h) = p : q$

zoodat $\quad x^3 = \dfrac{pah\,(a+h)}{2q},$

en $\quad x = \sqrt[3]{\dfrac{pah\,(a+h)}{2q}},$

waardoor de gevraagde straal bekend is.

Moet de kegel midden door gedeeld worden, dan is $q = 2p$, en bijgevolg $\quad x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{4}\,ah\,(a+h)}.$

CCVII. VOORSTEL.

Door I. W. MARTINI.

Door de twee uiteinden A *en* B, *Fig.* 123, *van eene gegevene lijn* AB, *wordt een willekeurige cirkel beschreven. Neemt men nu,*

ter wederzijde van het midden O *der lijn* AB, *de stukken* OQ *en* OQ′ *even groot, en zoodanig, dat zij tot den straal van den beschreven cirkel in eene bepaalde en gegevene reden staan, en trekt men door* Q *en* Q′ *loodlijnen op* AB, *dan snijden deze loodlijnen den omtrek van den cirkel in vier verschillende punten* P. *Nu kan men een oneindig aantal cirkels beschrijven, die door de punten* A *en* B *gaan, en vervolgens op elk dezer cirkels de opgegevene constructie volvoeren, en men zal op deze wijze ook vier oneindige reeksen van punten* P *verkrijgen. Men vraagt welke de meetkunstige plaats van al deze punten zal zijn?*

Opgelost *door* I. W. Martini, J. B. Volmer van Born, W. Top Wz. en R. van Wijk Jz.

Stellen wij OA = OB = a, en den straal van den cirkel uit M beschreven MB = $n \times$ OQ. Nemen wij verder AB als de as der abscissen aan, en CD, bij O loodregt door AB gaande, en die de middelpunten van al de cirkels bevat, als de as der ordinaten, dan is OQ = x en QP = y, en wij hebben, om dat MB = $n \times$ OQ = nx is,

$$OM = EQ = \pm\sqrt{(BM^2 - BO^2)} = \pm\sqrt{(n^2x^2 - a^2)},$$

en

$$PE = PQ - QE = y \mp \sqrt{(n^2x^2 - a^2)},$$

maar wij hebben bovendien MP² = PE² + ME², dat is MB² = PE² + OQ², en brengende hierin de waarden over,

$$n^2x^2 = (y \mp \sqrt{(n^2x^2 - a^2)})^2 + x^2,$$

waaruit,

$$(n^2 - 1)x^2 = (y \mp \sqrt{(n^2x^2 - a^2)})^2,$$

of hieruit den vierkantswortel trekkende,

$$y \mp \sqrt{(n^2x^2 - a^2)} = \pm x\sqrt{(n^2 - 1)},$$

en

$$y = \pm\left\{x\sqrt{(n^2 - 1)} \pm \sqrt{(n^2x^2 - a^2)}\right\}.$$

Deze vergelijking niet hooger dan de tweede graad opklimmende, behoort tot eene der kegelsneden, en wel tot de hyperbool, omdat voor positieve en negatieve waarden van x, die grooter en grooter worden, altijd twee waarden voor y blijven bestaan, hetgeen bij de ellips of parabool geene plaats heeft.

Wij moeten vooral opmerken, dat voor de bestaanbaarheid van ons vraagstuk n niet kleiner dan 1 mag zijn, want dan zou $\sqrt{(n^2 - 1)}$ en dus y onbestaanbaar worden. Dit wordt ook door de

de constructie duidelijk; want was n kleiner dan 1, dan zou MB kleiner dan OQ zijn, en de loodlijn door Q op AB getrokken, zou de overeenkomstige cirkel niet meer snijden.

Is $n = 1$, dan worden de loodlijnen door Q gaande alle raaklijnen aan de overeenkomstige cirkels, en in dit geval zal er slechts eene hyperbool bestaan. De vergelijking wordt dan $y = \pm \surd (x^2 - a^2)$. De hyperbool is dus in dit geval gelijkzijdig, en heeft AB tot groote as en O tot middelpunt. Dit geval is in *Fig.* 124 voorgesteld, en geeft tot geene verdere aanmerkingen aanleiding. Alleen merken wij op, dat het bewezene tot eene zeer gemakkelijke constructie voor de gelijkzijdige hyperbool aanleiding geeft. Is namelijk AB de as, en beschrijven wij een willekeurig aantal cirkels, die door A en B gaan, en waarvan dus de middelpunten M, M_1, M_2, *enz.* alle op de lijn CD liggen, die loodregt door het midden O, op AB is opgerigt, dan zullen wij in deze cirkels slechts middellijnen PP', $P_1 P'_1$, $P_2 P'_2$, *enz.* evenwijdig met AB moeten trekken, en dan zullen de uiteinden P dezer middellijnen punten van de gelijkzijdige hyperbool zijn.

Is n grooter dan 1, zoo stelt onze vergelijking eigenlijk twee hyperboolen voor, waarvan de vergelijkingen zijn

$$y = x \surd (n^2 - 1) \pm \surd (n^2 x^2 - a^2),$$

en $$y = - x \surd (n^2 - 1) \pm \surd (n^2 x^2 - a^2);$$

daar echter de tweede vergelijking in de eerste overgaat, door eenvoudig x negatief te nemen, zoo volgt hieruit, dat deze twee hyperbolen gelijk en gelijkvormig zijn, en alleen in betrekkelijke ligging ten opzigte van de as CD verschillen. Is alzoo *Fig.* 123, XTYxty de eene hyperbool, dan zal X'T'Y'$x't'y'$ de andere hyperbool zijn.

Dit begrepen hebbende, zal het alleen noodig zijn eene dezer hyperbolen nader te bepalen, daar alles, wat op de eene betrekkelijk is, dan ook op de andere kan worden toegepast. Wij zullen ons alzoo alleen met de vergelijking

$$y = x \surd (n^2 - 1) \pm \surd (n^2 x^2 - a^2)$$

bezig houden.

Het eerste gedeelte van het tweede lid is de vergelijking van eene regte lijn A'B', die door O gaat en met AB een hoek B'OB maakt, waarvan $\surd (n^2 - 1)$ de tangens is. De-

 ze

ze lijn deelt nu al de ordinaten PP′ midden door en is alzoo eene middellijn van de hyperbool, en wel de middellijn, die tot de ordinaten PP′ behoort, welke loodregt op AB staan.

Om de lengte van deze middellijn A′B′ te vinden, merken wij op, dat B′ het uiteinde van de middellijn zijnde, de raaklijn B′q van het punt B′ evenwijdig met PP′ loopt. Bij dit punt B′ moet dus PR = RP′ = o zijn; maar de waarde van PR is het tweede gedeelte van het tweede lid der vergelijking, en dus is

$$PR = \sqrt{(n^2 x^2 - a^2)},$$

en PR zal dus o worden voor $nx = a$ of $Oq = x = \frac{a}{n}$; hieruit volgt $B'q = Oq$ *Tang.* $B'OB = \frac{a}{n}\sqrt{(n^2 - 1)}$ en bij gevolg $OB' = \sqrt{(Oq^2 + B'q^2)} = \sqrt{\left(\frac{a^2}{n^2} + \frac{a^2(n^2-1)}{n^2}\right)} = a$, zoodat $A'B' = AB$. Op dezelfde wijze is dan ook in de andere hyperbool $A''B'' = AB$. Uit deze beschouwing blijkt dan nu ook, dat $Oq = \frac{a}{n}$ het minimum voor x is, en dit zelfde gaat ook aan de andere zijde door voor $Oq' = \frac{a}{n}$.

Stellen wij in de vergelijking $y = x\sqrt{(n^2 - 1)} \pm \sqrt{(n^2 x^2 - a^2)}$, $y = o$, dan komt er $x\sqrt{(n^2 - 1)} = \sqrt{(n^2 x^2 - a^2)}$ of $x^2(n^2 - 1) = n^2 x^2 - a^2$, dus $x^2 = a^2$ en $x = \pm a$. Dit ook eveneens voor de tweede hyperbool doorgaande, zoo volgt hieruit, dat beide de hyperbolen door de punten A en B gaan, hetgeen alzoo de doorsnijdingspunten zijn van de twee hyperbolen, die aan de vraag voldoen. Hieruit volgt dan nog, dat wanneer uit O met OA of OB als straal een cirkel beschreven wordt, de doorsnijding van dezen cirkel met de vier takken der twee hyperbolen de uiteinden van de middellijnen A′B′ en A″B″ zal aanwijzen, die tot de ordinaten behooren, welke loodregt op AB staan.

De grootte der middellijn A′B′ alzoo bepaald hebbende, zullen wij aantoonen, hoe derzelver rigting gemakkelijk kan worden gevonden. Omdat *Tang.* $B'OB = \sqrt{(n^2 - 1)}$ is, zoo is $QR = OQ$ *Tang.* $B'OB = OQ\sqrt{(n^2 - 1)}$; maar MB =

MP

MP $= n \cdot$ OQ zijnde, zoo is $n = \frac{MP}{OQ}$ en $n^2 = \frac{MP^2}{OQ^2} = \frac{PE^2 + OQ^2}{OQ^2} = \frac{PE^2}{OQ^2} + 1$ dus $\sqrt{(n^2 - 1)} = \frac{PE}{OQ}$, zoodat QR $=$ OQ $\times \sqrt{(n^2 - 1)} =$ PE, waaruit dan volgt, dat A′B′ evenwijdig met MP moet worden getrokken.

Niets is nu gemakkelijker, dan de vergelijking tusschen OR $= u$ en RP $=$ RP′ $= t$ te vinden; want wij hebben vooreerst RP $= t = \sqrt{(n^2x^2 - a^2)}$; maar OR $=$ OQ *Sec.* B′OB $=$ OQ $\sqrt{(1 + Tang^2.}$ B′OB$) = x \cdot n$ zijnde, zoo is $nx = u$, en brengende dit over in t, dan komt er

$$t = \pm \sqrt{(u^2 - a^2)},$$

waaruit nog volgt, dat de toegevoegde middellijn van A′B′, welke met PP′ evenwijdig moet loopen, en dus op CD gelegen moet zijn, mede gelijk a is, en dat dus CD werkelijk deze toegevoegde middellijn is. Men kan hieruit gemakkelijk opmaken, dat, wat n ook zijn mag, de twee hyperbolen altijd gelijkzijdige hyperbolen zullen zijn; doch dit zal weldra nog duidelijker blijken.

De stand van de middellijn A′B′ alzoo bepaald hebbende, is er niets gemakkelijker, dan de as Tt van de hyperbool te vinden. Daar namelijk de middellijnen A′B′ en AB, zoo als bewezen is, even lang zijn, zoo maken zij gelijke hoeken met de as, en wij zullen alzoo alleen den gevonden hoek B′OB door Tt midden door moeten deelen, om de as Tt te verkrijgen. De as van de andere hyperbool wordt derhalve verkregen door den hoek A′OA midden door te deelen.

De lengte van de halve as OT kan op de volgende wijze verkregen worden. Omdat *Tang.* B′OB $= \sqrt{(n^2 - 1)}$ is, zoo is *Cos.* B′OB $= \frac{1}{n}$ en dus *Tang.* TOB $= \sqrt{\frac{1 - Cos.\ B'OB}{1 + Cos.\ B'OB}} = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$.

Wij hebben dus voor het punt T de twee vergelijkingen

$$y = x\sqrt{(n^2 - 1)} - \sqrt{(n^2x^2 - a^2)},$$

en

$$y = x\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}.$$

Deze waarden van y aan elkander gelijk stellende, en door x deelende, komt er

$$\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} = \sqrt{(n^2-1)} - \sqrt{(n^2-\frac{a^2}{x^2})},$$

of $\sqrt{(n^2-\frac{a^2}{x^2})} = \sqrt{(n^2-1)} \times (1-\frac{1}{n+1}) = \frac{n}{n+1}\sqrt{(n^2-1)}$,

dus $$n^2 - \frac{a^2}{x^2} = \frac{n-1}{n+1} \cdot n^2;$$

en $$\frac{a^2}{x^2} = n^2(1-\frac{n-1}{n+1}) = \frac{2n^2}{n+1},$$

waaruit $$ON = x = \frac{a}{n}\sqrt{\tfrac{1}{2}(n+1)},$$

dus $$NT = y = x\sqrt{\frac{n-1}{n+1}} = \frac{a}{n}\sqrt{\tfrac{1}{2}(n-1)},$$

zoodat $$OT = \sqrt{(OQ^2+QT^2)} = \frac{a}{n}\sqrt{n},$$

Om de tweede as Uu te bepalen, merken wij op, dat de regthoek uit de assen gelijk is aan het parallelogram, onder de toegevoegde middellijnen. Nu is het parallelogram uit de toegevoegde middellijnen A'B' en CD, volgens het vroeger gevondene

$$A'B' \times CD \times Sin.\, COB' = A'B' \times CD \times Cos.\, B'OB = \frac{a^2}{n};$$

en dit is dan nu ook de regthoek der assen; maar wij hebben voor de eerste as gevonden $\frac{a}{n}\sqrt{n}$; de tweede as zal dus zijn

$$Uu = \frac{a^2}{n} : \frac{a}{n}\sqrt{n} = \frac{a}{\sqrt{n}} = \frac{a}{n}\sqrt{n};$$

de tweede as is bij gevolg gelijk aan de eerste, en nu kan er geen twijfel ten opzigte der gelijkzijdigheid van de hyperbolen meer overblijven. Stellen wij dus OW = w en WW = y, dan zal de vergelijking zijn

$$y = \pm\sqrt{(w^2 - \frac{a^2}{n})},$$

en dit is nu op de andere hyperbool even toepasselijk.

Het zou niet moeijelijk wezen uit onze figuur nog vele andere gevolgen af te leiden; doch daar dezelve over het algemeen niet zeer belangrijk en van weinig toepassing zijn, gaan wij dezelve met stilzwijgen voorbij.

CCVIII.

CCVIII. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Van eenen onregelmatigen vierhoek zijn de vier zijden benevens een der hoeken gegeven, men vraagt deszelfs inhoud te berekenen?

OPGELOST *door* J. BASSAN, S. KLIJNSMA, R. VAN WIJK JZ., W. TOP WZ., L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK en J. KÖHLER.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stellen wij, *Fig.* 125, de zijden AD $= a$, DG $= b$, CB $= c$ en AB $= d$, en zij D $= \alpha$ de gegeven hoek, dan is,

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ Cos.\ \alpha,$$

en

$$AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd\ Cos\ B,$$

deze twee waarden aan elkander gelijk-stellende, vinden wij

$$a^2 + b^2 - 2ab\ Cos.\ a = c^2 + d^2 - 2cd\ Cos.\ B,$$

waaruit

$$Cos.\ B = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab\ Cos.\ \alpha}{2cd},$$

waardoor de hoek B en dus ook deszelfs sinus kan berekend worden.

Nu is *drieh.* ADC $= \frac{1}{2} ab\ Sin.\ \alpha$ en *drieh.* ABC $= \frac{1}{2} cd\ Sin.\ B$; tellende dus deze inhouden bij elkander op, dan vinden wij voor den inhoud van het onregelmatig vierkant

$$I = \tfrac{1}{2}(ab\ Sin.\ \alpha + \tfrac{1}{2} cd\ Sin\ B);$$

en hierdoor kan dan, omdat B door de voorgaande vergelijking bepaald is, de inhoud I berekend worden.

Wil men I onmiddellijk in de gegevens uitdrukken, dan is

$$Sin.\ B = \sqrt{\left(1 - \frac{(c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab\ Cos.\ \alpha)^2}{4c^2 d^2}\right)};$$

en bij gevolg,

$$I = \tfrac{1}{2} ab\ Sin.\ \alpha + \tfrac{1}{4}\sqrt{\{4c^2 d^2 - (c^2 + d^2 - a^2 - b^2 + 2ab\ Cos\ \alpha)^2\}}.$$

CCIX. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Een regte cirkelvormige kegel wordt gesneden door een vlak, dat loodregt op het grondvlak staat. Men vraagt den inhoud van het afgesneden stuk te berekenen?

Op-

OPGELOST *door* R. VAN WIJK Jz., W. TOP Wz. en S. KLIJNSMA.

OPLOSSING *van* R. VAN WIJK Jz.

Zij, *Fig.* 126, AHB de kegel en CGD het vlak, dat loodregt op het grondvlak ſtaat, en dat wij tevens loodregt op het vlak AHB onderſtellen, dan is de doorſnede CGD eene hyperbool, en dan moet de inhoud van het ligchaam CGDA gevonden worden.

Laten wij nu door CD en den top H een vlak CHD gaan, dan ſnijdt hetzelve het oppervlak des kegels volgens de regte lijnen CH en DH, en dan is het ligchaam CGDA gelijk aan den kegel, die CAD tot grondvlak en H tot top heeft, verminderd met den kegel, welke het vlak EGD tot grondvlak en H tot top heeft.

Daar nu de inhoud van eenen kegel, welke gedaante het grondvlak ook hebben moge, gelijk is aan het grondvlak, vermenigvuldigd met een derde van de hoogte, zoo is

$$Inh.\ kegel\ \text{ACDH} = fegt.\ \text{CAD} \times \tfrac{1}{3}\,\text{HF},$$

en $$Inh.\ kegel\ \text{CGDH} = hyp.\ \text{CGD} \times \tfrac{1}{3}\,\text{MI},$$

en trekkende deze van elkander af, dan blijft er, omdat MI = FE is,

$$Ligch.\ \text{CGDA} = fegt.\ \text{CAD} \times \tfrac{1}{3}\,\text{HF} - hyp.\ \text{CGD} \times \tfrac{1}{3}\,\text{FE}.$$

Zoodat wij de lijnen en vlakken, die in het laatſte lid voorkomen, nog in de gegevens moeten uitdrukken.

De kegel is geheel bepaald, wanneer wij HF $= h$ en AF $=$ FB $= r$ kennen, en dan is de ſtand van het vlak CGD bepaald, wanneer ons FE $= m$ gegeven is. Deze lijnen altoos als bekend aannemende, hebben wij

$$Ligch.\ \text{CGDA} = \tfrac{1}{3}\,(h \times fegt.\ \text{CAD} - m\,.\,hyp.\ \text{CGD})\ \ldots\ (\text{I})$$

en er blijft dus alleen over om aan te toonen, hoe de inhoud van het ſegment CAD en van het hyperbolisch vlak CGD in r, h en m kunnen worden uitgedrukt.

Vooreerst hebben wij hiertoe ED $= \sqrt{(r^2 - m^2)}$ en bij gevolg $Boog$ AD $= r\ Boog\ Sin.\ \frac{\sqrt{(r^2 - m^2)}}{r} = r\ Boog\ Cos.\ \frac{m}{r}$, dus $Boog$ DAE $= 2r\ Boog\ Cos.\ \frac{m}{r}$ en, omdat $ſect.$ FCAD $= \frac{1}{2}\,r \times Boog$ DAE is

ſector

$$sector\ FCAD = r^2\ Boog\ Cos. \frac{m}{r}.$$

Daar verder *driek.* CFD = EF × ED is, zoo is

$$driek.\ CFC = m \sqrt{(r^2 - m^2)},$$

en deze uitdrukkingen van elkander aftrekkende, blijft er

$$segt,\ CAD = r^2\ Boog\ Cos. \frac{m}{r} - m \sqrt{(r^2 - m^2)} \ldots (II)$$

en wij moeten dus nog alleen den inhoud van het vlak CGD bepalen.

Ten einde hiertoe te geraken, merken wij op, dat I het middelpunt van de hyperbool CGD is, waarvan men zich gemakkelijk zal overtuigen, door het kegelvlak boven den top te verlengen. De halve eerste as van deze hyperbool is dus IG, en omdat AF : FH = AE : EG of $r : h = r - m : EG$ is, vinden wij voor deze halve eerste as

$$IG = a = h - EG = h - \frac{h(r-m)}{r} = \frac{mh}{r}.$$

Stellen wij verder de halve tweede as van deze hyperbool b, dan is door de bekende vergelijking van de hyperbool

$$DE = \frac{b}{a} \sqrt{(IE^2 - a^2)},$$

of

$$\sqrt{(r^2 - m^2)} = \frac{b}{a} \sqrt{(h^2 - a^2)},$$

zoodat

$$b = \frac{a\sqrt{(r^2 - m^2)}}{\sqrt{(h^2 - a^2)}} = \frac{\frac{mh}{r}\sqrt{(r^2 - m^2)}}{\sqrt{(h^2 - \frac{m^2 h^2}{r^2})}} = m.$$

Zijn nu de halve assen van eene hyperbool a en b, dan is de middelpuntsvergelijking

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)},$$

dus

$$y\partial x = \frac{b}{a} \partial x \sqrt{(x^2 - a^2)},$$

en

$$I = \int y \partial x = \frac{b}{a} \int \partial x \sqrt{(x^2 - a^2)},$$

of wanneer wij de integratie verrigten,

$$I = \tfrac{1}{2} \frac{b}{a} \left\{ x\sqrt{(x^2 - a^2)} - a^2\ Nep.\ Log. \frac{x + \sqrt{(x^2 - a^2)}}{a} \right\},$$

wel-

welke integraal reeds voor $x = a$ verdwijnt. Wij zullen dus in ons geval $x = h$ moeten nemen, en dan de uitkomst met 2 moeten vermenigvuldigen, waardoor wij verkrijgen

$$hyp.\,CGD = \frac{b}{a}\left\{h\sqrt{(h^2-a^2)} - a^2\,Nep.\,Log.\frac{h+\sqrt{(h^2-a^2)}}{a}\right\},$$

en brengen wij hierin de gevondene waarden van a en b over, dan komt er

$$hyp.\,CGD = h\sqrt{(r^2-m^2)} - \frac{m^2 h}{r}\,Nep.\,Log.\frac{r+\sqrt{(r^2-m^2)}}{m}. \text{ (III).}$$

Uit dit alles volgt dan, dat de gevraagde inhoud zal berekend worden door de achtervolgende vergelijkingen

$$A = r^2\,Boog\,Cos.\frac{m}{r} - m\sqrt{(r^2-m^2)} \quad \ldots \quad (1)$$

$$B = h\sqrt{(r^2-m^2)} - \frac{m^2 h}{r}\,Nep.\,Log.\frac{r+\sqrt{(r^2-m^2)}}{m} \quad \ldots \quad (2)$$

$$I = \tfrac{2}{3}(hA - mB) \quad \ldots \quad (3)$$

waarin $HF = h$, $AF = r$ en $EF = m$ is.

CCX. VOORSTEL.

Door S. KLIJNSMA.

Men vraagt onder alle driehoeken, die gelijke bazis en denzelfden ingeschreven' cirkel hebben, dien te bepalen, waarvan de inhoud een maximum of minimum is?

OPGELOST *door* S. KLIJNSMA, R. VAN WIJK Jz., L. J. ULMAN, W. TOP Wz., en A. B. DE BOCK.

OPLOSSING *van* S. KLIJNSMA.

Laat ABC, *Fig.* 127, de driehoek zijn. Stellen wij de bekende zijde $AC = a$; den straal van den ingeschreven' cirkel $MD = ME = MF = r$, den halven omtrek van den driehoek s en $CD = CE = x$, dan zijn x en s veranderlijke grootheden, terwijl a en r standvastige grootheden zijn. Verder volgt hier terstond uit $AD = AF = a - x$ en $BF = BE = \frac{1}{2}(2s - 2AD - 2DC) = \frac{1}{2}(2s - 2a) = s - a$, zoodat de zijden van den driehoek door deze stelling worden

$$AC = a;\ AB = s - x \text{ en } BC = s - a + x.$$

Stel-

Stellen wij nu den inhoud van den driehoek I, dan hebben wij uit de bekende eigenschappen der driehoeken

$$I = rs \ldots \ldots \ldots (1)$$

en $$I = \sqrt{s(s-a)x(a-x)} \ldots (2)$$

of, wanneer wij de laatste vergelijking in het vierkant brengen,

$$I^2 = s(s-a)x(a-x),$$

en deelende deze vergelijking door (1), dan komt er, na met r vermenigvuldigd te hebben,

$$rI = x(a-x)(s-a).$$

Deze vergelijking differentierende, verkrijgen wij, omdat I, x en s veranderlijk zijn,

$$r\delta I = (a-x)(s-a)\delta x - x(s-a)\delta x + x(a-x)\delta s,$$

of $$r\delta I = (a-2x)(s-a)\delta x + x(a-x)\delta s$$

en $$\frac{\delta I}{\delta x} = \frac{(a-2x)(s-a)}{r} + \frac{x(a-x)}{r} \cdot \frac{\delta s}{\delta x} \ldots (3)$$

Differentieren wij verder de vergelijking (1), dan verkrijgen wij $\delta I = r\delta s$, dus $\delta s = \frac{\delta I}{r}$, en brengende dit in (3) over, dan komt er

$$\frac{\delta I}{\delta x} = \frac{(a-2x)(s-a)}{r} + \frac{x(a-x)}{r^2} \cdot \frac{\delta I}{\delta x},$$

of $$\frac{\delta I}{\delta x} \times \frac{r^2 - x(a-x)}{r^2} = \frac{(a-2x)(s-a)}{r},$$

waaruit $$\frac{\delta I}{\delta x} = \frac{r(a-2x)(s-a)}{r^2 - ax + x^2}.$$

Daar wij nu I als eene functie van x beschouwen, en I een maximum of minimum moet wezen, zoo moeten wij $\frac{\delta I}{\delta x} = 0$ stellen, en dit geeft ons, daar r eene standvastige grootheid is,

$$(a-2x)(s-a) = 0,$$

zoodat een dezer factoren gelijk 0 moet zijn.

Stelden wij den factor $s - a = 0$, of $s = a$, dan zou de omtrek $2s = 2a = 2$AC worden, waaruit zou volgen AB + BC = AC, hetgeen onmogelijk is, omdat de som van elke twee zijden grooter dan de derde moet wezen.

Wij moeten dan den factor $a - 2x = 0$ stellen, en dit geeft $x = \frac{1}{2}a$, of CD $= \frac{1}{2}$ AC, hetgeen met den gelijkbeenigen driehoek overeenstemt, en deze zal dus de gevraagde zijn.

Het is reeds uit den aard der zaak blijkbaar, dat de gevonden driehoek geen maximum, maar een minimum is. De berekening leert ons dit op de volgende wijze.

Differentieeren wij $\frac{\partial I}{\partial x}$, waarvan wij teller en noemer kortheidshalve door X en X′ voorstellen, andermaal, en deelen wij door ∂x, dan komt er

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}=\frac{X'.\frac{\partial X}{\partial x}-X.\frac{\partial X'}{\partial x}}{X'^2};$$

doch daar wij deze waarde alleen moeten kennen, in de onderstelling dat $\frac{\partial I}{\partial x}$ en dus $X=0$ is, zoo hebben wij in deze onderstelling

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}=\frac{\partial X:\partial x}{X'},$$

of, omdat $X=r(a-2x)(s-a)$ en $X'=r^2-x(a-x)$ is,

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}=r.\frac{-2(s-a)+(a-2x)\frac{\partial s}{\partial x}}{r^2-x(a-x)},$$

of, uit hoofde dat $\partial s=\frac{\partial I}{r}$ is,

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}=r.\frac{-2(s-a)+\frac{a-2x}{r}.\frac{\partial I}{\partial x}}{r^2-x(a-x)},$$

dat is, voor onze onderstelling van $\frac{\partial I}{\partial x}=0$,

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}=-\frac{2r(s-a)}{r^2-x(a-x)},$$

en bij gevolg voor $x=\frac{1}{2}a$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}=-\frac{2r(s-a)}{r^2-\frac{1}{4}a^2}=\frac{2r(s-a)}{\frac{1}{4}a^2-r^2}.$$

Daar nu klaarblijkelijk s grooter dan a, en r kleiner dan $\frac{1}{2}a$ moet zijn, zoo is deze waarde positief, en toont bij gevolg een minimum voor den driehoek aan.

De overige zijden en de inhoud van den driehoek kunnen nu gemakkelijk in a en r worden uitgedrukt; want stellende de

waar-

waarden van I uit (1) en (2) aan elkander gelijk, dan hebben wij, na alles in het vierkant verheven en door s gedeeld te hebben,

$$r^2 s = x\,(a - x)\,(s - a),$$

en stellende hierin $x = \frac{1}{2}a$, dan komt er

$$r^2 s = \tfrac{1}{4}a^2\,(s - a),$$

waaruit wij vinden

$$s = \frac{a^3}{a^2 - 4r^2},$$

en dus

$$AB = BC = \tfrac{1}{2}\,(s - a) = \frac{2ar^2}{a^2 - 4r^2},$$

terwijl wij voor den inhoud van den driehoek vinden

$$I = rs = \frac{ra^3}{a^2 - 4r^2}.$$

CCXI. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

Twee perſonen A en B bezitten elk een geheel getal guldens, Indien nu het vierkant van het aantal guldens, dat B bezit, 77 meer is, dan het vierkant van het aantal guldens van A, dan vraagt men hoe veel guldens elk bezit?

OPGELOST *door* J. BASSAN, I. B. VOLMER VAN BORN, G. BRANDSTEDER, L. J. ULMAN, A. VOLKERSE, A. B. DE BOCK JR., W. TOP Wz., C. F. JULIUS, I. KÖHLER, A. VAN DER SWAN, B. BEKKING, M. B. JUNG en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel dat A bezit x en dat B bezit y guldens, dan is, volgens het vraagſtuk,

$$y^2 - x^2 = 77;$$

of $$(y + x)\,(y - x) = 7 \times 11 = 1 \times 77;$$

daar nu 77 op geene andere wijze in factoren kan worden ontbonden, zoo beſtaan er niet meer dan twee antwoorden, namelijk

$y + x = 11$ en $y - x = 7$, dus $y = 9$ en $x = 2$,

of $y + x = 77$ en $y - x = 1$, dus $y = 39$ en $x = 38$,

waardoor het vraagſtuk is opgelost.

CCXII. VOORSTEL.

Door W. Top Wz.

Vier bollen van gelijken straal raken elkander, twee aan twee aan, zoodanig, dat de vier middelpunten de hoekpunten zijn van eene driehoekige piramide, waarvan elke der ribben gelijk is aan de middellijn van een' der bollen. Men vraagt den inhoud te berekenen van de ruimte, begrepen tusschen de oppervlakken van deze vier bollen en de zijvlakken der piramide?

Opgelost *door* W. Top Wz. en I. W. Martini.

Oplossing *van* W. Top Wz.

Men stelle zich voor, dat A, B, C en D, *Fig.* 128, de middelpunten der vier bollen, en dus de hoekpunten van de driehoekige piramide zijn, dan zijn AE = EC = *r* de stralen van twee der bollen, en wanneer wij verder stellen, dat FEG de bolvormige driehoek is, welke op het oppervlak van den bol ontstaat, die zijn middelpunt in A heeft, door de snijding met de drie zijvlakken DAB, BAC en CAD, dan is het uit de gelijkheid der drievlakkige hoeken van de piramide klaar, dat wij, na den inhoud van den bolvormigen sector GFEA berekend te hebben, denzelven met 4 zullen moeten vermenigvuldigen, en de uitkomst van den inhoud der geheele piramide zullen moeten aftrekken, om den inhoud van het gevraagde ligchaam te verkrijgen.

Nu is bekend, dat de inhoud van een' bolvormigen driehoek tot het geheele oppervlak van den bol in reden is, als de som der hoeken, verminderd met twee regte hoeken, tot acht regte hoeken. Daar verder de zijden van den bolvormigen driehoek alle gelijk 60° zijn, zoo zullen de hoeken even groot wezen; om nu deze hoeken te bepalen, weten wij, dat de drie zijden van eenen bolvormigen driehoek gelijk *a*, *b* en *c* gegeven zijnde, de hoek A gevonden wordt, door de formule

$$Sin. \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{Sin. (s - b) \, Sin. (s - c)}{Sin. b \, . \, Sin. c}},$$

waarin *s* de halve som der zijden is. Zijn dus de zijden alle ge-

gelijk a, dan is $s = \frac{3}{2}a$, en dan is voor den gelijkzijdigen bolvormigen driehoek

$$Sin.\tfrac{1}{2}A = Sin.\tfrac{1}{2}B = Sin.\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{Sin^2.\frac{1}{2}a}{Sin^2.a}} = \frac{Sin.\frac{1}{2}a}{Sin.a},$$

dat is $\quad Sin.\tfrac{1}{2}A = Sin.\tfrac{1}{2}B = Sin.\tfrac{1}{2}C = \tfrac{1}{2}Sec.\tfrac{1}{2}a.$

Voor $a = 60°$ is dus $Sin.\tfrac{1}{2}A = \tfrac{1}{2}Sec.30°. = \tfrac{1}{2}.\frac{1}{Cos.30°} = \tfrac{1}{2}.\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$, zoodat $A = 2$ *Boog Sin.* $\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$. De som der hoeken is, bij gevolg, 6 *Boog Sin.* $\tfrac{1}{3}\sqrt{3}$, en hierdoor vinden wij bij gevolg, daar het oppervlak van elk der bollen $4r^2\pi$ is,

$$Inh.\,bolv.\,drieh.\,EFG = \frac{6\,Boog\,Sin.\frac{1}{3}\sqrt{3}-\pi}{4\pi}.4r^2\pi$$
$$= (6\,Boog.\,Sin.\tfrac{1}{3}\sqrt{3}-\pi)\,r^2;$$

vermenigvuldigende deze uitdrukking met $\frac{1}{3}r$, dan verkrijgen wij den inhoud van den drievlakkigen bolvormigen sector, en wij zullen dus voor de vier sectoren verkrijgen

$$\tfrac{4}{3}(6\,Boog\,Sin.\tfrac{1}{3}\sqrt{3}-\pi)\,r^3.$$

Eindelijk is bekend, dat de inhoud van het Tetraedrum gelijk is aan de derde magt van eene der ribben, vermenigvuldigd met $\frac{1}{12}\sqrt{2}$; daar nu elke der ribben in ons geval $2r$ is, zoo is de inhoud van het Tetraedrum $\frac{2}{3}r^3\sqrt{2}$. Verminderende dus dezen inhoud met de gevondene uitdrukking, dan blijft er voor den gevraagden inhoud

$$r^3\left\{\tfrac{2}{3}\sqrt{2}-\tfrac{4}{3}(6\,Boog\,Sin.\tfrac{1}{3}\sqrt{3}-\pi)\right\},$$

door welke formule men nu den coefficient van r^3 in zoo veel decimalen zal kunnen berekenen als men goedvindt.

CCXIII. VOORSTEL.

Door W. Top Wz.

Vijf bollen van gelijken straal raken elkander twee aan twee aan, zoodanig, dat de middelpunten de hoekpunten zijn van eene vierhoekige piramide, waarvan al de zijden gelijk zijn aan de middellijn van een' der bollen. Men vraagt den inhoud te berekenen van de ruimte, begrepen tusschen de oppervlakken van deze bollen en de zijvlakken van de piramide?

OPLOSSING. *Door* W. TOP Wz.

Zij ABCDE, *Fig.* 129, de vierhoekige piramide, waarvan al de ribben gelijk $2r$, dat is, gelijk de middellijn van een' der bollen zijn, dan is ABCD een quadraat, terwijl de opstaande zijde alle gelijkzijdige driehoeken zijn. Is dus AFGH een der vier bolvormige sectors, die aan het grondvlak van de piramide ontstaan, dan zijn de zijden FG en GH elk gelijk 60° en de zijde FH is 90°; de drie overige sectors, welke aan het grondvlak liggen, zijn voor het overige volkomen gelijk met den sector AFGH.

De piramide ABCDE is niets anders dan de helft van een octaedrum. Brengen wij dus door DE en EB een plat vlak, dan is de hoek DEB = 90°, terwijl al de overige hoeken aan den top 60° bedragen. Hieruit volgt dan, dat de viervlakkige hoek bij E het dubbel is van een' der drievlakkige hoeken aan het grondvlak, en de viervlakkige bolvormige sector bij E zal dus ook het dubbel zijn van een' der drievlakkige bolvormige sectors, die aan de bazis liggen.

Kunnen wij alzoo den inhoud berekenen van den sector AFGH, dan zullen wij alleen het zesvoud van dezen sector moeten aftrekken van den inhoud der piramide, en de rest zal alsdan de gevraagde inhoud wezen.

Beginnen wij dus met de hoeken van den bolvormigen driehoek FGH te berekenen, dan hebben wij, door in de algemeene formule

$$Sin.\ \tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{Sin.(s-b)\,Sin.(s-c)}{Sin.\,b\ Sin.\,c}},$$

$b = c = 60°$ en $s = \frac{1}{2}(2 \times 60° + 90°) = 105°$ te stellen,

$$Sin.\ \tfrac{1}{2}G = \sqrt{\frac{Sin^2.45°}{Sin^2.60°}} = \frac{Sin.\,45°}{Sin.\,60°} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{6},$$

en, door in dezelfde formule $b = 90°$, $c = 60°$ en $s = 105°$ te stellen,

$$Sin.\ \tfrac{1}{2}F = Sin.\ \tfrac{1}{2}H = \sqrt{\frac{Sin.\,15° \times Sin.\,45°}{Sin.\,90° \times Sin\,60°}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} \times Sin.\,15°}{2 \times \frac{1}{2}\sqrt{3}}};$$

of, omdat $Sin.\ 15° = \sqrt{\frac{1 - Cos.\,30°}{2}} = \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3})} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ is,

$$Sin.\ \tfrac{1}{2}F = Sin.\ \tfrac{1}{2}H = \tfrac{1}{6}\sqrt{(18 - 6\sqrt{3})},$$

zoo-

zoodat $G = 2\ \textit{Boog Sin.}\ \frac{1}{3}\sqrt{6} = \textit{Boog Sin.}\ \frac{2}{3}\sqrt{2}$,

en $F = H = 2\ \textit{Boog Sin.}\ \frac{1}{6}\sqrt{(18 - 6\sqrt{3})} = \textit{Boog Sin}\ \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

De ſom der hoeken van den bolvormigen driehoek is dus

$$G + F + H = \textit{Boog Sin.}\ \frac{2}{3}\sqrt{2} + 2\ \textit{Boog Sin.}\ \frac{1}{3}\sqrt{6},$$
$$= \textit{Boog Sin}\ \frac{2}{3}\sqrt{2} + \textit{Boog Sin.}\ \frac{2}{3}\sqrt{2},$$
$$= 2\ \textit{Boog Sin}\ \frac{2}{3}\sqrt{2} = \textit{Boog Sin.}\ \frac{4}{9}\sqrt{2},$$

zoodat wij, omdat het oppervlak van den bol $4r^2\pi$ is, voor den inhoud van den driehoek hebben

$$\textit{Drieh.}\ FGH = (\textit{Boog Sin.}\ \frac{4}{9}\sqrt{2} - \pi)\, r^2;$$

dit vermenigvuldigende met $\frac{1}{3}r$, verkrijgt men den inhoud van den bolvormigen ſector, en dus is het zesvoud van dezen ſector

$$6 \times \textit{ſect.}\ AFGH = 2\ (\textit{Boog Sin.}\ \frac{4}{9}\sqrt{2} - \pi)\, r^3,$$
$$= (\textit{Boog Sin.}\ \frac{56}{81}\sqrt{2} - 2\pi)\, r^3.$$

De inhoud van de vierhoekige piramide is gelijk het grondvlak $4r^2$, vermenigvuldigd met een derde van de hoogte, dat is, met $\frac{1}{3}r\sqrt{2}$, en dus $\frac{4}{3}r^3\sqrt{2}$, en de inhoud van het gevraagde ligchaam is bij gevolg

$$r^3\ \{\frac{4}{3}\sqrt{2} - (\textit{Boog Sin.}\ \frac{56}{12}\sqrt{2} - 2\pi)\},$$

welke formule, ingevolge de herleidingen in onze oplosſing voorkomende, ook aldus kan worden geſchreven

$$\frac{4}{3}r^3\ \{\sqrt{2} - 6\,(\textit{Boog Sin.}\ \frac{1}{3}\sqrt{6} - \frac{1}{4}\pi)\},$$

welken vorm wij de voorkeur geven, omdat men nu zeker is, dat *Boog Sin.* $\frac{1}{3}\sqrt{6}$, den halven hoek G voorſtellende, in het eerſte quadrant moet worden genomen.

CCXIV. VOORSTEL.

Door W. Top Wz.

Het grondvlak van een prisma is een regthoekige driehoek, waarvan de hypothenuſa gegeven is. In dit prisma is een afgeknotte kegel geplaatst, hebbende den ingeſchreven cirkel des gezegden driehoeks tot grondvlak, en welke met het prisma gelijke hoogte heeft. Indien nu de middellijnen van het grond- en bovenvlak des afgeknotten kegels tot elkander in reden zijn als 1 *tot p, en de inhoud van het prisma tot den inhoud van den afgeknotten kegel als* 1 *tot q, dan vraagt men de regthoeks-zijden des grondvlaks van het prisma te bepalen?*

OPGELOST *door* J. BASSAN, W. TOP WZ., L. J. ULMAN en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Zij, *Fig.* 130, ABC het grondvlak van het prisma, en stellen wij den straal van den ingeschreven' cirkel, die het grondvlak van den afgeknotten kegel is, x, dan zullen wij alleen x hebben te bepalen, want dezelve gevonden hebbende, zoo geeft ons de figuur ter bepaling van de regthoekszijden terstond de vergelijkingen

$$z + y = a \text{ en } (z + x)^2 + (x + y)^2 = (z + y)^2.$$

Ontwikkelen wij de laatste vergelijking, dan verkrijgen wij, na de gelijke termen te hebben weggelaten en door 2 gedeeld te hebben,

$$(z + y)\, x = yz,$$

of, omdat $z + y = a$ is,

$$yz = ax,$$

en dan wordt uit de vergelijkingen $z + y = a$ en $zy = ax$ gemakkelijk gevonden

$$z = \tfrac{1}{2} a + \tfrac{1}{2} \sqrt{a (a - 4x)},$$

en

$$y = \tfrac{1}{2} a - \tfrac{1}{2} \sqrt{a (a - 4x)},$$

waaruit voor de regthoekszijden volgt

$$AB = z + x = \tfrac{1}{2} a + x + \tfrac{1}{2} \sqrt{a (a - 4x)},$$

en

$$BC = y + x = \tfrac{1}{2} a + x - \tfrac{1}{2} \sqrt{a (a - 4x)}.$$

Gaan wij dan nu over, om uit de opgaaf van het vraagstuk de waarde van x te bepalen.

De omtrek van den driehoek is, ingevolge het boven gevondene, $2a + 2x$, en vermenigvuldigende denzelven met den halven straal $\frac{1}{2} x$ van den ingeschreven' cirkel, dan komt er, voor den inhoud van het grondvlak, $x (a + x)$; stellen wij dus de gemeenschappelijke hoogte van het prisma en den afgeknotten kegel h, dan is de inhoud van het prisma

$$\textit{Inh. prisma} = hx\,(a + x).$$

Omdat de middellijnen en dus ook de stralen van het grond- en bovenvlak des afgeknotten kegels tot elkander in reden zijn als 1 tot p, en wij den straal van het grondvlak gelijk x gesteld hebben, zoo is de straal van het bovenvlak px; en daar de hoogte h is, zoo vinden wij voor den inhoud van den afgeknotten kegel:

$$\textit{Inh afgck. kegel} = \tfrac{1}{3} h x^2 \pi (1 + p + p^2).$$

Daar

Daar nu, volgens de opgaaf, de inhoud van het eerste ligchaam tot dien van het tweede in reden moet zijn als 1 tot q, zoo is

$$\tfrac{1}{3} h x^2 \pi (1 + p + p^2) = q h x (a + x),$$

of

$$x \pi (1 + p + p^2) = 3 q a + 3 q x,$$

en losfen wij hieruit x op, dan verkrijgen wij voor den ftraal van het grondvlak

$$x = \frac{3 a q}{(1 + p + p^2) \pi - 3 q}.$$

Hierdoor dan x berekend hebbende, geven ons de boven gevondene formulen niet alleen de zijden van het grondvlak, maar ook de inhouden van beide ligchamen, wanneer de hoogte bekend is.

CCXV. VOORSTEL.

Door W. TOP Wz.

Men vraagt eene reeks van achtervolgende veelhoekige getallen te vinden, die alle denzelfden wortel hebben, met een driehoekig getal beginnende, en waarvan de som een quadraat is?

OPGELOST *door* W. TOP Wz., J. BASSAN, L. J. ULMAN, M. B. JUNG, G. BRANDSTEDER, J. KÖHLER, R. VAN WIJK Jz. en A. B. DE BOCK Jr.

OPLOSSING *van* W. TOP Wz.

Zij x de gemeenfchappelijke wortel van de achtervolgende veelhoekige getallen, dan zijn dezelve

het driehoekige . . . . . . $\frac{x^2 + 1 . x}{2}$,

het vierhoekige . . . . . . $\frac{2 x^2 + 0 . x}{2}$,

het vijfhoekige . . . . . . $\frac{3 x^2 - 1 . x}{2}$,

het zeshoekige . . . . . . $\frac{4 x^2 - 2 . x}{2}$,

enz.   *enz.*

het n-hoekige . . . . $\frac{(n - 2) x^2 - (n - 4) x}{2}$.

Deze reeks van uitdrukkingen vormt ten duidelijkste eene rekenkunstige reeks, waarvan het gemeene verschil der termen $\frac{1}{2}(x^2 - x)$ is. Wij vinden alzoo de som dezer uitdrukkingen, door de som van de eerste en laatste te vermenigvuldigen met de helft van het aantal termen, welk aantal hier $n - 2$ is, omdat wij van de driehoekige begonnen zijn. Deze som wordt alzoo uitgedrukt door

$$\left\{\frac{x^2 + x}{2} + \frac{(n-2)x^2 - (n-4)x}{2}\right\} \times \tfrac{1}{2}(n-2),$$

dat is door

$$\tfrac{1}{4}(n-2)\left\{(n-1)x^2 - (n-5)x\right\},$$

en daar, ingevolge het vraagstuk, deze som een rationaal quadraat moet zijn, zoo zal ook

$$(n-2)\left\{(n-1)x^2 - (n-5)x\right\},$$

een rationaal quadraat moeten wezen.

Stellen wij den wortel van dit quadraat gelijk aan $(n-2)px$, dan is

$$(n-2)\left\{(n-1)x^2 - (n-5)x\right\} = (n-2)^2p^2x^2,$$

of $\quad (n-1)x - (n-5) = (n-2)p^2x,$

en lossen wij hieruit x op, dan vinden wij

$$x = \frac{n-5}{(n-1)-(n-2)p^2},$$

waarin nu n en p naar welgevallen kunnen genomen worden, zijnde het ondertusschen klaar, dat indien wij voor n en p geheele getallen naar welgevallen aannemen, x meestal een gebroken zal worden, waardoor dan ook de geheele reeks van gevraagde getallen uit gebrokens zal bestaan.

Wij vinden ondertusschen voor x geheele getallen, wanneer wij $p = 1$ nemen; want dan wordt de noemer van x gelijk 1, en bij gevolg

$$x = n - 5,$$

en nemen wij alzoo voor n een geheel getal grooter dan 5, zal ook x een geheel positief getal worden, waardoor dan de geheele reeks van gevraagde getallen geheel en positief zal worden.

Nemen wij, bij voorbeeld, $n = 6$, dan is $x = 1$, en de reeks wordt aldus 1, 1, 1, 1, waarvan de som 4 en dus een quadraat is.

Ne-

Nemen wij $n = 7$, dan wordt $x = 2$ en de reeks wordt 3, 4, 5, 6, 7, waarvan de som 25 wederom een quadraat is.

Nemende $n = 8$, dan is $x = 3$, en de reeks van getallen wordt 6, 9, 12, 15, 18, 21, waarvan de som 81 nogmaals een quadraat is, en wij kunnen hiermede zoo ver voortgaan als wij goedvinden.

CCXVI. VOORSTEL

Door C. F. Julius.

Er zijn vier getallen, die de volgende eigenschappen hebben. Het quadraat van het derde is gelijk aan dat van het tweede, plus driemaal dat van het eerste. Het derde minus het eerste is gelijk aan het quadraat van het verschil tusschen het derde en het tweede. Het vermenigvuldigde van het eerste met het vierde is gelijk zevenmaal het tweede plus tweemaal het derde, en eindelijk is het quadraat van het eerste gelijk aan de som van het tweede en derde. Welke getallen zijn dit?

Opgelost door J. B. Volmer van Born, C. F. Julius, W. Top Wz., A. E. Tromp, G. Brandsteder, J. Köhler, M. B. Jung, J. Bassan, A. B. de Bock Jr., R. van Wijk Jz., L. J. Ulman, B. Bekking en A. van der Swan.

Oplossing van J. B. Volmer van Born.

Stellen wij de vier getallen v, x, y en z, dan worden de voorwaarden van het voorstel uitgedrukt door de volgende vergelijkingen

$$y^2 = x^2 + 3v^2 \quad \ldots \quad (1) \qquad vz = 7x + 2y \quad \ldots \quad (2)$$

$$y - v = (y - x)^2 \quad \ldots \quad (3) \qquad v^2 = x + y \quad \ldots \quad (4).$$

Substitueert men v^2 uit (4) in de vergelijking (1), dan komt er

$$y^2 = x^2 + 3\,(x + y),$$

of

$$y^2 - x^2 = 3\,(y + x),$$

dat is

$$(y + x)\,(y - x) = 3\,(y + x),$$

zoodat

$$(y + x)\,(y - x - 3) = 0,$$

aan welke vergelijking op twee wijzen kan worden voldaan, door namelijk te nemen

$y +$

$... x = 0$ of $y - x - 3 = 0$;
$... = x$ of $y = x + 3$,

... onderzoeken, wat elke dezer waarden voor ... onbekenden geeft.

Nemen wij vooreerst $y = x + 3$, dan geeft (2) $v = y - ... = x + 3 - 9 = x - 6$, en brengende deze waarden van y en v over in (4), dan komt er

$$(x - 6)^2 = 2x + 3,$$
$$x^2 - 14x + 33 = 0,$$
$$x = 11 \text{ of } x = 3.$$

De eerste waarde van y geeft dus reeds twee antwoorden op het vraagstuk, namelijk:

I°. $x = 11, y = x + 3 = 14, v = x - 6 = 5, z = \frac{7x + 2y}{v} = 21$,

II°. $x = 3, y = x + 3 = 6, v = x - 6 = -3, z = \frac{7x + 2y}{v} = -11$.

Nemen wij daarentegen de tweede gevondene waarde van y, namelijk $y = -x$, dan geeft (2) $v = y - (y - x)^2 = -x - 4x^2$, en brengende deze waarde van y en v in (4) over, dan komt er

$$(x + 4x^2)^2 = 0,$$
of
$$x + 4x^2 = 0,$$
dat is
$$x(1 + 4x) = 0,$$
waaruit
$$x = 0, \text{ of } x = -\tfrac{1}{4},$$

en hierdoor verkrijgen wij nog twee andere antwoorden op het vraagstuk, namelijk:

III°. $x = 0, y = -x = 0, v = -x - 4x^2 = 0, z = \frac{7x + 2y}{v} = \frac{0}{0}$,

zoo alsdan de drie eerste getallen 0 zijn en het vierde onbepaald is, of naar welgevallen genomen kan worden, en

IV°. $x = -\frac{1}{4}, y = -x = \frac{1}{4}, v = -x - 4x^2 = 0, z = \frac{7x + 2y}{v} = \infty$.

CCXVII. VOORSTEL

Door C. F. JULIUS.

Men vraagt een getal te vinden, dat uit twee cijferletters bestaat. De som van viermaal het cijfer der eenheden en zesmaal dat

dat der tientallen brengt een quadraat voort, welks wortel gelijk het cijfer der eenheden is; ook is het quadraat van de som der cijferletters twee meer, dan het omgekeerde van het getal?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, A. VOLKERSE, B. BEKKING, W. TOP Wz., A. B. DE BOCK JR., A. VAN DER SWAN, L. J. ULMAN, M. B. JUNG, R. VAN WIJK Jz., J. BASSAN, G. BRANDSTEDER, J. B. VOLMER VAN BORN en J. KÖHLER.

1°. OPLOSSING. *Door* C. F. JULIUS.

Stelt men de eenheden voor door x en de tientallen door y, dan is het getal $10y + x$, en dus het omgekeerde van het getal $10x + y$, en dan hebben wij door het vraagstuk

$$4x + 6y = x^2 \quad \text{en} \quad (x + y)^2 = 10x + y + 2.$$

Uit de eerste vergelijking vinden wij terstond

$$y = \frac{x^2 - 4x}{6},$$

en brengende dit in de tweede vergelijking over, dan wordt dezelve

$$(x + \frac{x^2 - 4x}{6})^2 = 10x + \frac{x^2 - 4x}{6} + 2.$$

of $$(x^2 + 2x)^2 = 6(x^2 + 56x + 12),$$

dat is, na ontwikkeling en herleiding,

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 336x - 72 = 0.$$

Hieruit vindt men gemakkelijk $x = 6$, en het eerste lid door $x - 6$ deelende, komt er, ter bepaling van de overige wortels,

$$x^3 + 10x^2 + 58x + 12 = 0,$$

welke geene positieve wortels kan bevatten, omdat al de termen positief zijn. Daar nu x, om aan den zin van het vraagstuk te voldoen, een geheel positief getal moet wezen, zoo kan x niet anders zijn dan 6, en dus is $y = \frac{x^2 - 4x}{6} = 2$, zoodat 26 het gevraagde getal is.

TWEEDE OPLOSSING. *Door* A. VOLKERSE.

Men kan, door de eerste voorwaarde alleen, zonder veel moeite tot de kennis van het gevraagde getal geraken. Stellen wij

wij namelijk de cijfers der eenheden en tientallen x en y, dan geeft deze eerste voorwaarde

$$4x + 6y = x^2,$$

of
$$y = \frac{x^2 - 4x}{6} = \frac{x(x-4)}{6}.$$

Daar nu x en y positief moeten wezen, zoo moet x grooter zijn dan 4. Verder kan x uit den aard der zaak niet grooter dan 9 wezen. Eindelijk moet x even zijn; want was x oneven, dan was ook $x - 4$ oneven, en dus ook $x(x - 4)$ oneven en alzoo niet door 6 deelbaar. Nu bestaan er tusschen 4 en 10 geene andere geheele evene getallen dan 6 en 8, en wij moeten dus alleen beproeven, welk dezer twee cijfers aan de vraag voldoet. Men ziet weldra, dat 8 niet voldoet, maar dat $x = 6$ geeft $y = 2$, en dat het gevraagde getal alzoo niet anders kan zijn dan 26.

CCXVIII. VOORSTEL

Door B. LUBBERS.

Men vraagt de zijden van eenen scherphoekigen driehoek te vinden, welke de eigenschap heeft, dat indien men uit het hoekpunt des hoeks, welke de middelste in grootte is, eene loodlijn op de overstaande zijde laat vallen, deze loodlijn en de drie zijden des driehoeks eene rekenkunstige reeks vormen, welke met de eenheid opklimt?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, G. BRANDSTEDER, R. VAN WIJK Jz., J. BASSAN, M. B. JUNG, C. F. JULIUS, J. KÖHLER, A. B. DE BOCK Jr., W. TOP Wz., L. J. ULMAN en A. VAN DER SWAN.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Zij ABC, *Fig.* 131, een scherphoekige driehoek, en BD de loodlijn, die uit het hoekpunt B op de zijde AC valt. Daar nu B volgens de opgaaf kleiner dan C en grooter dan A moet zijn, zoo is AB de grootste en BC de kleinste zijde, en daar BD klaarblijkelijk kleiner dan de kleinste zijde BC is, zoo is dezelve ook kleiner dan elke der twee overige zijden, waar-

waarna dan volgt, dat BD, BC, AC en AB de achtervolgende termen van de rekenkunstige reeks moeten wezen, die met 1 opklimt. Stellende dus BD $= x$, dan is BC $= x + 1$, AC $= x + 2$, en AB $= x + 3$.

Nu is CD $= \sqrt{(BC^2 - BD^2)} = \sqrt{((x+1)^2 - x^2)} = \sqrt{(2x+1)}$, en AD $= \sqrt{(AB^2 - BD^2)} = \sqrt{((x+3)^2 - x^2)} = \sqrt{(6x+9)}$, en daar de som dezer lijnen gelijk AC, dat is, gelijk $x + 2$ is, zoo hebben wij de vergelijking

$$\sqrt{(2x+1)} + \sqrt{(6x+9)} = x + 2 \quad \ldots\ldots (1)$$

brengen wij beide leden dezer vergelijking in het vierkant, dan komt er

$$8x + 10 + 2\sqrt{(12x^2 + 24x + 9)} = x^2 + 4x + 4,$$

of

$$2\sqrt{(12x^2 + 24x + 9)} = x^2 - 4x - 6.$$

Verheffende deze vergelijking andermaal tot de tweede magt, dan vinden wij

$$4(12x^2 + 24x + 9) = (x^2 - 4x - 6)^2,$$

en wanneer wij deze vergelijking ontwikkelen, en alles naar de afdalende magten van x rangschikken, dan verkrijgen wij

$$x^4 - 8x^3 - 44x^2 - 48x = 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

of

$$x^3 - 8x^2 - 44x - 48 = 0,$$

waaruit $x = 12$, terwijl de twee andere wortels beide zijn $x = -2$.

De twee gelijke wortels $x = -2$ voldoen niet aan de vergelijking (1), maar wel aan de vergelijking

$$\sqrt{(2x+1)} - \sqrt{(6x+9)} = x - 2,$$

welke tot dezelfde eindvergelijking (2) voert, en wij hebben alzoo voor de oplossing van ons vraagstuk alleen $x = 12$, waardoor de zijden van den driehoek worden 13, 14 en 15.

CCXIX. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Er is eene rekenkunstige reeks van vier termen, welker som het vierkant is van het verschil der termen. De termen van deze reeks zijn de zijden en de loodlijn van eenen driehoek, welke loodlijn in den driehoek getrokken is uit het hoekpunt van den hoek, die de middelste in grootte is. Men vraagt deze reeks te bepalen?

Opgelost door B. Lubbers, R. van Wijk Jz., W. Top Wz., A. van der Swan, J. Bassek, M. B. Jung, L. J Ulman, A. B. de Bock, C. F. Julius, J. Köhler en G. Brandsteder.

Oplossing van B. Lubbers.

Zij ABC, *Fig.* 131, wederom de driehoek, waarin C de grootste en A de kleinste hoek, dan moet de loodlijn uit den hoek B getrokken worden, en dan is BC de kortste, AC de middelste en AB de langste zijde; maar BD kleiner zijnde dan de kleinste zijde BC van den driehoek, zoo is BD de eerste term van de rekenkunstige reeks, en de achtervolgende termen van deze reeks zijn bijgevolg BD, BC, CA, en AB. Daar nu ook de opklimming of het verschil der termen van deze reeks onbekend is, zoo stellen wij voor derzelver termen $BD = x - 3y$, $BC = x - y$, $AC = x + y$ en $AB = x + 3y$; de som der termen is dan $4x$, en daar deze som het vierkant moet zijn van het verschil $2y$ der termen, zoo hebben wij vooreerst

$$4x = 4y^2 \quad \text{of} \quad x = y^2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Verder hebben wij, even zoo als in het voorgaande voorstel werkende,

$$CD=\sqrt{(BC^2-BD^2)}=\sqrt{\{(x-y)^2-(x-3y)^2\}}=\sqrt{(4xy-8y^2)},$$

en

$$AD=\sqrt{(AB^2-BD^2)}=\sqrt{\{(x+3y)^2-(x-3y)^2\}}=\sqrt{12xy},$$

en daar $AD + CD = AC = x + y$ moet zijn,

$$\sqrt{(4xy-8y^2)}+\sqrt{12xy}=x+y,$$

of, in plaats van x de gevondene waarde y^2 stellende,

$$\sqrt{(4y^3-8y^2)}+\sqrt{12y^3}=y^2+y,$$

dat is, beide leden door y deelende,

$$2\sqrt{(y-2)}+2\sqrt{3y}=y+1 \ldots\ldots\ldots (I)$$

deze vergelijking in het vierkant brengende, hebben wij

$$16y-8+8\sqrt{(3y^2-6y)}=y^2+2y+1,$$

of

$$8\sqrt{(3y^2-6y)}=y^2-14y+9,$$

en wanneer wij nog eens quadrateren,

$$64(3y^2-6y)=(y^2-14y+9)^2,$$

welke vergelijking, herleid en volgens de afdalende magten van y gerangschikt, geeft

$$y^4-28y^3+22y^2+132y+81=0.$$

Deze

Deze vergelijking heeft twee wortels gelijk — 1, terwijl de andere zijn $y = 3$ en $y = 27$. De wortels — 1 en 3 behooren echter niet tot onzen driehoek, want zij losfen niet de vergelijking (1), maar de vergelijking

$$2\sqrt{(y-2)} + 2\sqrt{3y} = y + 1$$

op, welke met de vergelijking (1) dezelfde eindvergelijking heeft. Daar alzoo $y = 27$ de eenigste wortel is, die aan de vergelijking (1), onder den opgegeven' vorm, voldoet, zoo is $x = y^2 = 729$, en hierdoor vinden wij voor de loodlijn $BD = x - 3y = 648$, terwijl de zijden van den driehoek zijn $BC = x - y = 702$, $AC = x + y = 756$ en $AB = x + 3y = 810$.

CCXX. VOORSTEL.

Door C. F, JULIUS.

Vier getallen te vinden van de volgende eigenschap. De fom der quadraten van de drie eerfte is gelijk de derde magt van het vierde. De fom van het eerfte en tweede is gelijk aan het vierde. Het tweede is rekenkunftig midden evenredig tusfchen het eerfte en vierde. Eindelijk is het tweede meetkunftig midden evenredig tusfchen het eerfte en het verfchil van het derde en vierde?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, A. E. TROMP, A. B. DE BOCK JR., A. VAN DER SWAN, L. J. ULMAN, B. BEKKING, W. TOP WZ., M. B. JUNG, J. BASSAN, I. KÖHLER, G. BRANDSTEDER, I. B. VOLMER VAN BORN en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* C. F. JULIUS.

Drukken wij de getallen uit door x, y, z en v, dan verkrijgen wij uit de opgaaf de volgende vergelijkingen

$$x^2 + y^2 + z^2 = v^3 \quad \ldots \quad (1).$$

$$x + y = v \quad \ldots \quad (2).$$

$$2y = x + v \quad \ldots \quad (3).$$

$$y^2 = x(z - v) \quad \ldots \quad (4).$$

Trekken wij (2) van (3), dan blijft er, na overbrenging der termen,

$$y = 2x \quad \ldots \quad (5).$$

bren-

brengende dit over in (2), dan komt er

$$v = 3x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

en brengende deze waarden van y en v over in (4), dan verkrijgen wij

$$4x^2 = x\,(z - 3x),$$

of

$$4x = z - 3x,$$

waaruit

$$z = 7x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Substitueerende eindelijk (5), (6) en (7) in (1), dan komt er

$$x^2 + 4x^2 + 49x^2 = 27x^3,$$

of

$$54x^2 = 27x^3,$$

dat is

$$x^3 - 2x^2 = 0,$$

waaruit $x = 0$ of $x = 2$.

Nemende $x = 0$, dan worden al de vier getallen gelijk nul, en deze voldoen werkelijk aan de gegevene vergelijkingen.

Nemende daarentegen $x = 2$, dan is $y = 2x = 4$, $z = 7x = 14$, en $v = 3x = 6$, hetgeen dan de gevraagde getallen zijn.

CCXXI. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JR.

Een gegeven vierkant, door drie regte lijnen, in een vierkant, regthoek, driehoek en trapezium te verdeelen, en wel zoodanig, dat de regthoek gelijk zij aan den driehoek, en dat het vierkant de helft zij van het trapezium?

OPGELOST door L. J. ULMAN, I. H. VOLMER VAN BORN, W TOP WZ., M. B. JUNG, J. BASSAN, A. B. DE BOCK JR., en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING van L. J. ULMAN.

Laat ABCD, *Fig.* 132, het gegeven quadraat zijn en AFGE, FGHC, EIB en IHDB het quadraat, de driehoek, de regthoek en het trapezium, waarnaar gevraagd wordt. Stellen wij de zijde van het gegeven vierkant AB $= a$ en dat van het gevraagde vierkant AE $=$ AF $= x$, dan is FC $=$ EB $= a - x$. De inhoud van den regthoek is $x\,(a - x)$ en de inhoud van den driehoek is $\frac{1}{2}$. EB $\times$ EI $= \frac{1}{2}\,(a - x) \times$ EI; daar nu deze inhouden aan elkander gelijk moeten zijn, zoo is $\frac{1}{2}\,(a - x) \times \text{EI} = x\,(a - x)$, waaruit EI $= 2x$.

Al-

Alles zal dus bepaald zijn wanneer x bekend is; want alsdan zal men EI = 2 EG of GI = EG moeten nemen.

Omdat EI = $2x$ is, zoo is IH = $a - 2x$ en dus IH + BD = $2(a - x)$: de inhoud van het trapezium is bijgevolg $(a - x) \times (a - x)$ of $(a - x)^2$. Deze inhoud moet nu het dubbel van het vierkant AEFG, dat is, gelijk $2x^2$ zijn, waardoor $(a - x)^2 = 2x^2$ of $a - x = x\sqrt{2}$,

waaruit $x = \dfrac{a}{1 + \sqrt{2}} = a(-1 + \sqrt{2})$.

Uit deze oplossing wordt de volgende constructie afgeleid:

1° Trek de diagonaal AD. Dezelve is gelijk $a\sqrt{2}$.

2°. Maak DK = DB, dan is AK = $a(-1 + \sqrt{2})$. Makende dus AF = AE = AK, dan is AFGE het gevraagde vierkant en dus FGHC de gevraagde regthoek.

3°. Maak EI = 2 EG en trek BI, dan zal BEI de gevraagde driehoek en BIHD het gevraagde trapezium zijn.

CCXXII. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Twee cirkels, die elkander snijden, gegeven zijnde, vraagt men door een der snijpunten eene regte lijn te trekken, zoodanig, dat de koorden, welke door de beide cirkels van deze lijn worden afgesneden, even groot zijn?

OPGELOST *door* L. J. ULMAN, W. TOP Wz., J. BASSAN, R. VAN WIJK Jz., M. B. JUNG en I. B. VOLMER VAN BORN.

OPLOSSING *van* L. J. ULMAN.

Het opgegeven vraagstuk wordt door de volgende constructie opgelost.

1°. Vereenig de middelpunten A en B, *Fig.* 133, der gegevene cirkels, en deel derzelver afstand midden door in D.

2°. Vereenig D met het snijpunt C der cirkels en trek door C de lijn EF loodregt op DC. Deze zal de gevraagde zijn.

De reden hiervan is gemakkelijk in te zien; want trekkende AG en BH loodregt op EF, dan loopen dezelve evenwijdig met DC, en dus volgt uit de gelijkheid van AD en DB, dat ook

 CG

$$y + x = 0 \quad \text{of} \quad y - x - 3 = 0,$$

dat is $\quad y = -x \quad$ of $\quad y = x + 3,$

en wij moeten dus onderzoeken, wat elke dezer waarden voor die der overige onbekenden geeft.

Nemen wij vooreerst $y = x + 3$, dan geeft (2) $v = y - (y - x)^2 = x + 3 - 9 = x - 6$, en brengende deze waarden van y en v over in (4), dan komt er

$$(x - 6)^2 = 2x + 3,$$

of
$$x^2 - 14x + 33 = 0,$$

waaruit
$$x = 11 \text{ of } x = 3.$$

De eerste waarde van y geeft dus reeds twee antwoorden op het vraagstuk, namelijk:

I°. $x = 11, y = x + 3 = 14, v = x - 6 = 5, z = \frac{7x + 2y}{v} = 21,$

II°. $x = 3, y = x + 3 = 6, v = x - 6 = -3, z = \frac{7x + 2y}{v} = -11.$

Nemen wij daarentegen de tweede gevondene waarde van y, namelijk $y = -x$, dan geeft (2) $v = y - (y - x)^2 = -x - 4x^2$, en brengende deze waarde van y en v in (4) over, dan komt er

$$(x + 4x^2)^2 = 0,$$

of
$$x + 4x^2 = 0,$$

dat is
$$x(1 + 4x) = 0,$$

waaruit
$$x = 0, \text{ of } x = -\tfrac{1}{4},$$

en hierdoor verkrijgen wij nog twee andere antwoorden op het vraagstuk, namelijk:

III°. $x = 0, y = -x = 0, v = -x - 4x^2 = 0, z = \frac{7x + 2y}{v} = \frac{0}{0},$

zoo alsdan de drie eerste getallen 0 zijn en het vierde onbepaald is, of naar welgevallen genomen kan worden, en

IV°. $x = -\frac{1}{4}, y = -x = \frac{1}{4}, v = -x - 4x^2 = 0, z = \frac{7x + 2y}{v} = \infty.$

CCXVII. VOORSTEL

Door C. F. JULIUS.

Men vraagt een getal te vinden, dat uit twee cijferletters bestaat. De som van viermaal het cijfer der eenheden en zesmaal

dat

dat der tientallen brengt een quadraat voort, welks wortel gelijk het cijfer der eenheden is; ook is het quadraat van de ſom der cijferletters twee meer, dan het omgekeerde van het getal?

OPGELOST *door* C. F. JULIUS, A. VOLKERSE, B. BEKKING, W. TOP WZ., A. B. DE BOCK JR., A. VAN DER SWAN, L. J. ULMAN, M. B. JUNG, R. VAN WIJK JZ., J. BASSAN, G. BRANDSTEDER, J. B. VOLMER VAN BORN en J. KÖHLER.

1°. OPLOSSING. *Door* C. F. JULIUS.

Stelt men de eenheden voor door x en de tientallen door y, dan is het getal $10y + x$, en dus het omgekeerde van het getal $10x + y$, en dan hebben wij door het vraagſtuk

$$4x + 6y = x^2 \quad \text{en} \quad (x + y)^2 = 10x + y + 2.$$

Uit de eerſte vergelijking vinden wij terſtond

$$y = \frac{x^2 - 4x}{6},$$

en brengende dit in de tweede vergelijking over, dan wordt dezelve

$$\left(x + \frac{x^2 - 4x}{6}\right)^2 = 10x + \frac{x^2 - 4x}{6} + 2.$$

of $$(x^2 + 2x)^2 = 6(x^2 + 56x + 12),$$

dat is, na ontwikkeling en herleiding,

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 336x - 72 = 0.$$

Hieruit vindt men gemakkelijk $x = 6$, en het eerſte lid door $x - 6$ deelende, komt er, ter bepaling van de overige wortels,

$$x^3 + 10x^2 + 58x + 12 = 0,$$

welke geene poſitieve wortels kan bevatten, omdat al de termen poſitief zijn. Daar nu x, om aan den zin van het vraagſtuk te voldoen, een geheel poſitief getal moet wezen, zoo kan x niet anders zijn dan 6, en dus is $y = \frac{x^2 - 4x}{6} = 2$, zoodat 26 het gevraagde getal is.

TWEEDE OPLOSSING. *Door* A. VOLKERSE.

Men kan, door de eerſte voorwaarde alleen, zonder veel moeite tot de kennis van het gevraagde getal geraken. Stellen

wij

delpunt van den anderen cirkel, dan is $DB \times BG = FB \times BE = FB^2$ en dus $BG = \frac{FB^2}{DB}$, zoodat BG de derde evenredige moet zijn tot de bekende lijnen DB en FB. Hierdoor BG en dus het punt G gevonden hebbende, heeft men drie punten D, C en G van den gevraagden cirkel, waardoor dezelve gemakkelijk kan worden geconstrueerd, en de geheele constructie komt dus hierop neder.

Trek DB en stel BI loodregt op DB. Trek DI en stel IG loodregt op DI. Deel DC en DG midden door in A en H en trek AK en HK loodregt op DC en DG; alsdan zal K het middelpunt van den gevraagden cirkel en KC deszelfs straal zijn.

CCXXV. Voorstel.

Door R. van Wijk Jz.

Men vraagt een punt te construeren, zoodanig, dat de afstanden, op welke hetzelve van de hoekpunten eens gegeven driehoeks gelegen is, tot elkander in gegevene reden staan?

Opgelost *door* M. B. Jung, J. B. Volmer van Born, L. J. Ulman, R. van Wijk Jz., en W. Top Wz.

Oplossing *van* M. B. Jung.

Laat ABC, *Fig.* 135. de gegevene driehoek zijn, en zij P het gevraagde punt, zoodanig, dat PA, PB en PC tot elkander in reden zijn, als p, q en r. Trekkende dan PM loodregt op AB en stellende $BM = x$ en $PM = y$, dan is, $AB = a$ stellende, $BP = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ en $AP = \sqrt{\{(a - x)^2 + y^2\}}$ en daar deze lijnen in reden moeten zijn als q tot p, zoo hebben wij

$$x^2 + y^2 : (a - x)^2 + y^2 = q^2 : p^2,$$

of $$p^2 (x^2 + y^2) = q^2 (a - 2ax + x^2 + y^2),$$

zoodat $$(p^2 - q^2) y^2 + (p^2 - q^2) x^2 + 2aq^2 x = q^2 a^2,$$

of $$y^2 + x^2 + \frac{2aq^2}{p^2 - q^2} x = \frac{q^2}{p^2 - q^2} a^2,$$

dat is $$y^2 + (x + \frac{q^2}{p^2 - q^2} . a)^2 = (\frac{qp}{p^2 - q^2} . a)^2,$$

en daar dit de vergelijking van den cirkel is, zoo volgt hieruit, dat al de punten P, die aan de voorwaarde $AP : BP = p : q$ vol-

voldoen, in den omtrek van een' cirkel gelegen zijn. Om nu de punten te bepalen, waarin deze cirkel BA doorſnijdt, ſtellen wij $y = o$, en dit geeft

$$x = -\frac{q^2}{p^2 - q^2}a \pm \frac{pq}{p^2 - q^2}a,$$

en hierin ſtelt dan nu $-\frac{q^2}{p^2 - q^2}a$ de waarde voor van BI, terwijl $\frac{pq}{p^2 - q^2}a$ den ſtraal ID aanduidt.

Wij behoeven echter, om dezen cirkel te beſchrijven, de waarden van BI en DI niet te conſtrueren, maar kunnen zulks op de volgende wijze verrigten. Daar al de punten in dezen cirkel de eigenſchap moeten hebben, dat AP : PB $= p : q$ is, zoo moeten ook de punten D en D′ deze eigenſchap bezitten, en dus zullen wij moeten hebben

AD : DB $= p : q$ en AD′ : D′B $= p : q$,

waaraan voldaan wordt door op eene willekeurige lijn BB′, door B gaande, BG $= q$ en GH $=$ GH′ $= p$ te nemen; vervolgens HA en H′A en eindelijk GD en GD′ evenwijdig met HA en H′A te trekken. De punten D en D′ alzoo gevonden hebbende, is er niets gemakkelijker, dan op DD′ als middellijn den cirkel DPD′ te beſchrijven.

Op dezelfde wijze beſchrijven wij dan nu ook een' cirkel PKP′, waarvan al de punten de eigenſchap hebben, dat PA : PC $= p : r$ is, en het is klaar, dat alsdan de punten P en P′, waarin deze twee cirkels elkander ſnijden, aan de vraag zullen beantwoorden.

Mogten deze cirkels elkander uit- of inwendig aanraken, dan is het vraagſtuk ſlechts voor een antwoord vatbaar, en hetzelve wordt onmogelijk, wanneer de twee geconſtrueerde cirkels elkander noch raken noch ſnijden.

CCXXVI. VOORSTEL.

Door R. VAN WIJK Jz.

Drie gelijke middelpuntige cirkels gegeven zijnde; vraagt men een' driehoek te conſtrueren, welke met deszelfs hoekpunten in de om-

omtrekken van deze cirkels gelegen is, en welke tevens gelijkvormig is met eenen gegevenen driehoek?

OPGELOST *door* R. VAN WIJK Jz., L. J. ULMAN, M. B. JUNG, W. TOP Wz., en I. B. VOLMER VAN BORN.

OPLOSSING *van* R. VAN WIJK Jz.

Zij DEF, Fig. 136. de driehoek, waaraan de gegevene driehoek gelijkvormig moet zijn en G het middelpunt van de gegevene cirkels, dan hebben wij de volgende constructie.

Men zoeke in den gegeven' driehoek eenig punt O, zoodanig, dat de afstanden van dit punt tot de drie hoekpunten tot elkander in reden *zijn als de* stralen van de gegevene cirkels. Hoe dit geschiedt is in het voorgaande vraagstuk geleerd.

Men trekke verder uit G de lijnen GA, GB en GC zoodanig, dat dezelve met elkander dezelfde hoeken maken als de lijnen OF, OD en OE. Indien dan de lijnen AB, BC en AC getrokken worden, zoo volgt uit de gelijkheid der hoeken en de evenredigheid der zijden, dat de driehoeken ABG, BGC en CGA achtervolgens gelijkvormig zijn met de driehoeken FOD, DOE en EOF, en daar deze driehoeken op dezelfde wijze aan elkander sluiten, zoo zijn ook de driehoeken ABC en FDE gelijkvormig: Daar verder A, B en C in de omtrekken van de gegevene cirkels gelegen zijn, zoo voldoet driehoek ABC aan al de voorwaarden van het vraagstuk.

Aanmerkingen. 1°. Daar wij in het voorgaande vraagstuk gezien hebben, dat er twee punten O zoodanig kunnen gevonden worden, dat OF, OD en OE evenredig zijn met GA, GB en GC, zoo volgt hieruit, dat hierdoor ook twee driehoeken ABC zullen gevonden worden, die aan de vraag voldoen.

2°. Wij hadden het punt O ook zoodanig kunnen bepalen, dat OD, OF en OE evenredig waren met GA, GB en GC, en hierdoor zouden wij wederom twee driehoeken gevonden hebben, welke aan de vraag voldoen. Het is duidelijk in te zien, dat hieromtrent 6 verschillende combinatiën kunnen plaats hebben, en dat wij alzoo, in de onderstelling, dat in elk geval de constructie-cirkels elkander snijden, 12 verschillende driehoeken zullen vinden, welke aan de vraag beantwoorden.

3°. Ein-

3°. Eindelijk kan elk dezer driehoeken op een oneindig aantal verschillende wijzen om het punt G geplaatst worden, omdat men eene der drie lijnen AG, BG of CG geheel naar welgevallen kan trekken; waaruit dan volgt, dat er in den striktsten zin een oneindig aantal driehoeken gevonden kan worden, die aan het vraagstuk beantwoorden.

CCXXVII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Iemand koopt twee stukken laken, van ieder even zoo veel stukken, en tot even zoo veel stuivers de el, als de stukken van die soort ellen lang zijn. Hij bevindt, dat hem de el, door een gerekend, $55\frac{55}{61}$ *stuivers kost, en dat, zoo hij van iedere soort even veel stukken genomen had, de el hem, door een gerekend,* $55\frac{5}{11}$ *stuivers gekost zou hebben. Vrage naar de menigte der stukken, en de prijzen van dezelve?* (44)

OPGELOST *door* J. BASSAN, L. J. ULMAN, W. TOP Wz., B. BEKKING; R. VAN WIJK Jz., A. VAN DER SWAN, M. B. JUNG, J. KÖHLER en C. F. JULIUS.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stel er waren x stukken van de eerste en y stukken van de tweede soort, dan houden deze stukken x en y ellen, en de prijzen der ellen zijn x en y stuivers. De prijs van het gestelde aantal stukken is bij gevolg $x^3 + y^3$ stuivers; doch daar dezelve $x^2 + y^2$ ellen bedragen, en de el door elkander gerekend $55\frac{55}{61}$ stuivers is, zoo wordt de geheele prijs ook uitgedrukt door $55\frac{55}{61}(x^2 + y^2)$ stuivers, en hierdoor hebben wij

$$x^3 + y^3 = 55\tfrac{55}{61}(x^2 + y^2) \quad \ldots \quad (1)$$

Had hij van iedere soort even veel, bij voorbeeld, n stukken genomen, dan zou de geheele prijs $n(x^2 + y^2)$ stuivers bedragen, en dan zou het aantal ellen zijn $n(x + y)$; doch daar de el alsdan, door een gerekend, op $55\frac{5}{11}$ stuivers zou komen, zoo zou

(44) PRINSEN, *Algebra voor de Scholen*, bl. 134. No. 44.

zou de geheele prijs zijn $n\,(x + y) \times 55\tfrac{5}{11}$, en dit geeft, na door n gedeeld te hebben, tot tweede vergelijking

$$x^2 + y^2 = 55\tfrac{5}{11}\,(x + y) \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Deze twee vergelijkingen te zamen vermenigvuldigende, komt er

$$(x^3+y^3)(x^2+y^2) = \frac{610}{11} \times \frac{55 \times 62}{61}(x^2+y^2)(x+y),$$

en de gelijke factoren tegen elkander weglatende,

$$x^2 - xy + y^2 = 3100 \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Vermenigvuldigende (2) met 3, en (3) met 2, dan geeft derzelver verschil

$$(x + y)^2 = \frac{1830}{11}(x + y) - 6200,$$

of $$(x + y)^2 - \frac{1830}{11}(x + y) + 6200 = 0,$$

waaruit $$(x + y) = \frac{915}{11} \pm \sqrt{\left\{\left(\frac{915}{11}\right)^2 - 6200\right\}},$$

dat is $$x + y = 110 \text{ of } x + y = \frac{620}{11}.$$

Nemen wij $x + y = 110$, dan is $x^2 + y^2 = 55\tfrac{5}{11} \times 110 = 6100$ dus $2(x^2+y^2) = 12200$ en dus $(x-y)^2 = 2(x^2+y^2) - (x+y)^2 = 100$, waaruit $x - y = 10$, zoodat $x = 60$ en $y = 50$.

Nemen wij daarentegen $x + y = \frac{620}{11}$, dan is $x^2 + y^2 = \frac{610}{11} \times \frac{620}{11}$, dus $2(x^2 + y^2) = \frac{2 \times 610 \times 620}{121}$, waardoor $(x-y)^2 = 2(x^2+y^2) - (x+y)^2 = \frac{372000}{121}$ en $x - y = \frac{20}{11}\sqrt{93}$, waardoor $x = \frac{10}{11}(31 + \sqrt{93})$ en $y = \frac{10}{11}(31 - \sqrt{93})$.

CCXXVIII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Twee reeksen, elk van vier termen, te vinden, de eene eene rekenkunstige en de andere eene meetkunstige, zoodanig, dat de termen der rekenkunstige van de overeenkomstige termen der meetkunstige afgetrokken zijnde, er de achtervolgende getallen 3, 5, 9 *en* 16 *overblijven?* (45)

Op-

(45) PRINSEN, *Algebra voor de Scholen*, *bl.* 141. N°. 65.

Opgelost *door* J. Bassan. W. Top Wz., L. I. Ulman, I. B. Volmer van Born, I. Köhler, R. van Wijk Jz., G. Brandsteder, C. F. Julius, M. B. Jung, B. Bekking en A. van der Swan.

Oplossing *van* J. Bassan.

Stel de meetkunstige reeks x, xy, xy^2 en xy^3, dan moeten de getallen $x-3$, $xy-5$, xy^2-9 en xy^3-16 eene rekenkunstige reeks uitmaken, en dit geeft ons de vergelijkingen

$(x-3)+(xy^2-9)=2(xy-5)$ en $(xy-5)+(xy^3-16)=2(xy^2-9)$,

of $\quad x+xy^2=2xy+2 \quad$ en $\quad xy+xy^3=2xy^2+3$,

dat is $\quad x(y-1)^2=2 \quad$ en $\quad xy(y-1)^2=3$.

De twee laatste vergelijkingen door elkander deelende, komt er $y=\frac{3}{2}$, en hierdoor is $x=\frac{2}{(y-1)^2}=8$, zoodat de meetkunstige reeks is 8, 12, 18, 27 en de rekenkunstige 5, 7, 9, 11.

CCXXIX. Voorstel.

Door J. Bassan.

Men begeert een' driehoek te bepalen, wanneer deszelfs hoeken gegeven zijn, benevens de lijn, welke uit een der hoekpunten tot het midden van de overstaande zijde getrokken is? (46)

Opgelost *door* L. J. Ulman, W. Top Wz., M. B. Jung, I. B. Volmer van Born, J. Bassan en R. van Wijk Jz.

Oplossing *van* L. J. Ulman.

Stellen wij de hoeken A, B en C, *Fig.* 137, gelijk α, β en γ, dan is $\alpha+\beta+\gamma=180°$, en daar de zijden evenredig zijn met de sinussen der overstaande hoeken, zullen wij dezelve kunnen voorstellen door $BC = x\ Sin.\ \alpha$, $AC = x\ Sin.\ \beta$ en $AB = x\ Sin.\ \gamma$. Is dan $AD = a$ gegeven, zoo hebben wij (de Gelder, *Meetk. Boek* 3. *St.* 20)

$$2\,AD^2 + 2\,BD^2 = AB^2 + AC^2,$$

of $$2a^2+\tfrac{1}{2}x^2\ Sin^2.\alpha = x^2\ Sin^2.\gamma + x^2\ Sin^2.\beta,$$

zoo-

(46) J. de Gelder, *Beg. der Stelkunst*, bl. 289. N°. 170.

zoodat $$x^2 = \frac{2a^2}{Sin^2.\beta + Sin^2.\gamma - \frac{1}{2} Sin^2 \alpha},$$

en $$x = 2a\sqrt{\frac{1}{2 Sin^2.\beta + 2 Sin^2.\gamma - Sin^2.\alpha}},$$

waardoor wij voor de zijden vinden

$$AB = x\, Sin.\gamma = \frac{2a\, Sin.\gamma}{\sqrt{(2\, Sin^2.\beta + 2\, Sin^2.\gamma - Sin^2.\alpha)}},$$

$$BC = x\, Sin.\alpha = \frac{2a\, Sin.\alpha}{\sqrt{(2\, Sin^2.\beta + 2\, Sin^2.\gamma - Sin^2.\alpha)}},$$

$$AC = x\, Sin.\beta = \frac{2a\, Sin.\beta}{\sqrt{(2\, Sin^2.\beta + 2\, Sin^2.\gamma - Sin^2\alpha)}},$$

door welke formule dan nu de zijden kunnen berekend worden.

Wil men het vraagstuk meetkunstig construeren, dan wordt de oplossing zeer eenvoudig, want men behoeft dan alleen een' driehoek AFG te construeren, die de gegevene hoeken heeft; vervolgens FG midden door te deelen en AE te trekken. Eindelijk AD gelijk de gegevene lijn a te nemen en BC evenwijdig met FG te trekken; want dan zal ABC klaarblijkelijk aan het gevraagde voldoen.

Men vindt eene andere oplossing van dit vraagstuk in de *Meetkundige analysis van* J. DE GELDER, 1e *Deel* 1e *Stukje*, *pag.* 85. *Vraagstuk* 37.

CCXXX. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Van eenen regthoekigen driehoek gegeven zijnde het verschil der regthoekszijden, en de middellijn van den ingeschrevenen cirkel, vraagt men de zijden van dien driehoek te vinden? (47)

OPGELOST *door* J. BASSAN, I. B. VOLMER VAN BORN, M. B. JUNG, W. TOP WZ., L. J. ULMAN, I. KÖHLER en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Noemen wij den straal van den ingeschreven' cirkel r, dan is, omdat de hoek C, *Fig.* 138, regt is, DC = DM = ME = CE

(47) J. DE GELDER, *Beg. der Stelkunst*, *bl.* 285. N°. 160.

CE $=$ MF $= b$. Noemen wij verder het verschil der regthoekszijden a, dan kunnen wij BC $= x + \frac{1}{2}a$ en AC $= x - \frac{1}{2}a$ stellen en dan is AD $=$ AF $= x - \frac{1}{2}a - r$ en BE $=$ BF $= x + \frac{1}{2}a - r$, zoodat AB $= 2x - 2r$.

Nu is de inhoud van den driehoek gelijk het halve product der regthoekszijden, doch deze inhoud is ook gelijk aan den omtrek vermenigvuldigd met den halven straal van den ingeschreven' cirkel, en hieruit volgt, dat wij hebben

$$AC \times BC = (AB + BC + AC) \times MF,$$

dat is $$x^2 - \tfrac{1}{4}a^2 = (4x - 2r)\,r,$$

of $$x^2 - 4rx = \tfrac{1}{4}a^2 - 2r^2,$$

waaruit $$x = 2r \pm \sqrt{(2r^2 + \tfrac{1}{4}a^2)},$$

zoodat de zijden zijn

$$BC = 2r + \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(2r^2 + \tfrac{1}{4}a^2)},$$
$$AC = 2r - \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{(2r^2 + \tfrac{1}{4}a^2)},$$
en $$AB = 2r \pm 2\sqrt{(2r^2 + \tfrac{1}{4}a^2)}.$$

CCXXXI. VOORSTEL.

Door A. B. DE BOCK JR.

Van eenen driehoek gegeven zijnde de bazis gelijk 20, *een der hoeken aan de bazis gelijk* $87^{b}\,42'$ *en de middellijn van den omgeschreven' cirkel gelijk* 44, *vraagt men de onbekende zijden en hoeken te vinden?*

OPGELOST *door* J. BASSAN, L. J. ULMAN, A. B. DE BOCK JR., M. B. JUNG, I. B. VOLMER VAN BORN, I. KÖHLER, W. TOP WZ., en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stellen wij algemeen den hoek A, *Fig.* 139, gelijk α, de zijde AB $= a$ en de middellijn van den omgeschreven' cirkel CE $= m$. Indien wij dan de loodlijn CD $= x$ stellen, zoo is AC $= \dfrac{x}{Sin.'\alpha}$; maar wij hebben boven dien (DE GELDER, *Meetk. Boek* 5. *Stel.* 28.)

$$AC \times BC = CE \times CD,$$

en

en bij gevolg $\frac{x}{Sin\ \alpha} \times BC = m \times x$,

waaruit $BC = m \times Sin.\ \alpha$ . . . . (1)

zoodat de zijde BC reeds in de gegevens is uitgedrukt, leerende wij hieruit, *dat in iederen driehoek elke der zijden gelijk is aan de sinus van den overstaanden hoek, vermenigvuldigd met de middellijn van den omgeschreven' cirkel.*

Verder is $BC : AB = Sin.\ A : Sin.\ C$ of $m\ Sin.\ \alpha : a = Sin.\ \alpha : Sin.\ C$, waaruit

$$Sin.\ C = \frac{a}{m} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

welke formule ook een onmiddellijk gevolg is van den zoo even voorgedragenen regel, en hierdoor is dan nu ook de hoek C gevonden.

De hoek B wordt nu klaarblijkelijk gevonden door de vergelijking

$$B = 180° - (\alpha + C) \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (3)$$

en dezen hoek gevonden hebbende, is, door onzen gevondenen regel, wederom

$$AC = m \times Sin.\ B \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

waardoor dan alles bepaald is.

Daar nu gegeven is $\alpha = 87°42'$, $m = 44$ en $a = 20$, zoo vinden wij

$$BC = m \times Sin.\alpha = 44 \times Sin.\ 87°42' = 43{,}96,$$

$$C = Boog\ Sin.\ \frac{a}{m} = Boog\ Sin.\ \tfrac{5}{11} = 27°\ 2',$$

$$B = 180° - (\alpha + C) = 65°\ 16',$$

$$AC = m \times Sin.\ B = 44 \times Sin.\ 65°16' = 39{,}96,$$

alles ten naaste bij.

CCXXXII. VOORSTEL

Door G. BRANDSTEDER.

De som van drie onbekende getallen is 144; *wanneer men het eerste met* 8 *vermindert, bij het tweede* 16 *telt en het derde met* $3\frac{3}{5}$ *vermenigvuldigt, zoo vormen de uitkomsten eene meetkunstige reeks, waarvan de som der beide eerste termen tot het verschil tusschen den derden en eersten term in reden is als* 1 *tot* 3. *Welke zijn deze getallen?*

OP-

Opgelost *door* C. F. Julius, G. Brandsteder, L. J. Ulman, I. Köhler, A. B. de Bock Jr., R. van Wijk Jz., B. Bekking, J. Bassan, I. B. Volmer van Born, W. Top Wz., M. B. Jung en A. van der Swan.

Oplossing *van* C. F. Julius.

Stel de meetkunſtige reeks, waarvan in de opgaaf geſproken wordt, x, xy, xy^2, dan zijn de drie gevraagde getallen $x + 8$, $xy - 16$ en $xy^2 \times \frac{9}{32}$.

Volgens de laatſte voorwaarde van het vraagſtuk moeten wij hebben

$$x + xy : xy^2 - x = 1 : 3,$$

of

$$1 + y : y^2 - 1 = 1 : 3,$$

dat is

$$1 : y - 1 = 1 : 3,$$

dus $y - 1 = 3$ of $y = 4$.

Hieruit volgt dan voor de getallen $x + 8$, $4x - 16$ en $\frac{9}{2}x$, en daar de ſom dezer getallen gelijk moet zijn aan 144, zoo verkrijgen wij de vergelijking

$$9\tfrac{1}{2}x - 8 = 144,$$

waaruit $x = 16$, zoodat de gevraagde getallen zijn $x + 8 = 24$, $4x - 16 = 48$ en $\frac{9}{2}x = 72$.

CCXXXIII. Voorstel.

Door G. Brandsteder.

Vijf getallen vormen eene rekenkunſtige reeks, waarvan het gemeene verſchil 13 *is. Indien nu* $\frac{25}{33}$ *van de ſom dezer getallen, de derde magt is van* $\frac{1}{33}$ *dezer ſom, vraagt men deze getallen te vinden?*

Opgelost *door* J. Bassan, L. J. Ulman, G. Brandsteder, C. F. Julius, R. van Wijk Jz., A. van der Swan, M. B. Jung, B. Bekking, I. B. Volmer van Born, I. Köhler en W. Top Wz.

Oplossing *van* J. Bassan.

Stellen wij de ſom der getallen s, dan is volgens het vraagſtuk $\frac{25}{33}s = \frac{1}{33^3}s^3$ of $s^2 = 33^2.25$, zoodat de ſom der gevraagde getallen is $s = 33.5 = 165$.

Daar

Daar verder de vijf gevraagde getallen eene rekenkunstige reeks moeten uitmaken, zoo is derzelver som het vijfvoud van den middelsten term, en deze middelste term is derhalve $\frac{165}{5}$ of 33.

Daar eindelijk het gemeen verschil der termen 13 en de middelste term 33 is, zoo zijn de termen klaarblijkelijk 7, 20, 33, 46 en 59.

Aanmerking. Er bestaan, buiten het gevondene antwoord, nog twee andere antwoorden op het vraagstuk; want aan de vergelijking $\frac{25}{33}s = \frac{1}{33^3}s^3$ wordt ook voldaan, door te nemen $s = 0$ en $s = -165$. Nemen wij $s = 0$, dan worden de gevraagde getallen -26, -13, 0, 13 en 26; maar nemen wij $s = -165$, dan worden dezelve -59, -46, -33, -20, en -7.

CCXXXIV. Voorstel.

Door B. Lubbers.

De bazis van eenen regthoekigen driehoek is de cubus van zeker getal; de opstaande zijde is het vierkant des trigonaals van dit getal, en de schuinsche zijde is de trigonaal des vierkants van dit zelfde getal. Men vraagt hierdoor de zijden van dezen driehoek te berekenen?

Opgelost *door* I. R. Schmidt, J. Bassan; I. B. Volmer van Born, L. J. Ulman, B. Lubbers, A. van der Swan, C. F. Julius, W. Top Wz., R. van Wijk Jz., M. B. Jung, G. Brandsteder en A. B. de Bock Jr.

Oplossing *van* I. R. Schmidt.

Stel het getal, dat de wortel der figuurlijke getallen is, die de zijden van den driehoek moeten uitdrukken, gelijk x; dan zijn de regthoekszijden x^3 en $\left(\frac{x^2+x}{2}\right)^2$, terwijl $\frac{x^4+x^2}{2}$ de hypothenuza is. Volgens de bekende eigenschap van den regthoekigen driehoek is dus

$$(x^3)^2 + \left(\frac{x^2+x}{2}\right)^4 = \left(\frac{x^4+x^2}{2}\right)^2,$$

of

of $$16x^6 + x^4(x+1)^4 - 4x^4(x^2+1)^2 = 0,$$
dat is $$x^4(16x^2 + (x+1)^4 - 4(x^2+1)^2) = 0,$$
of $$x^4\{(x+1)^4 - 4(x^2-1)^2\} = 0,$$
dus $$x^4(x+1)^2\{(x+1)^2 - 4(x-1)^2\} = 0,$$
dat is $$x^4(x+1)^2(3x^2 - 10x + 3) = 0,$$
of wel $$x^4(x+1)^2(x-3)(3x-1) = 0,$$
en aan deze vergelijking wordt voldaan door te stellen $x = 0$, $x = -1$, $x = 3$ of $x = \frac{1}{3}$.

Nemen wij $x = 0$, dan worden de zijden van den regthoekigen driehoek alle gelijk 0.

Stellen wij $x = -1$, dan worden de zijden $x^3 = -1$, $\frac{1}{4}(x^2+x)^2 = 0$ en $\frac{1}{2}(x^4+x^2) = 1$.

Wordt $x = 3$ genomen, dan vinden wij voor de zijden $x^3 = 27$, $\frac{1}{4}(x^2+x)^2 = 36$ en $\frac{1}{2}(x^4+x^2) = 45$.

Stelt men eindelijk $x = \frac{1}{3}$, dan verkrijgt men voor de zijden $x^3 = \frac{1}{27}$, $\frac{1}{4}(x^2+x)^2 = \frac{4}{81}$ en $\frac{1}{2}(x^4+x^2) = \frac{5}{81}$.

CCXXXV. VOORSTEL.

Door G. BRANDSTEDER.

De dag, waarop WILLEM I, *door* BALTHAZAR GERARDS, *eene doodelijke wonde ontving, kan op de volgende wijze bepaald worden. Drukt men het jaartal, waarin deze noodlottige gebeurtenis voorviel, uit door x, het getal, dat de hoeveelste maand van het jaar uitdrukt door y, en het getal, dat den dag van de maand voorstelt door z, dan is vooreerst $x + z - 34$ juist een pronikgetal, waarvan de wortel $5y + 4$ is; ten andere is $x + 63y + 180$ een zevenhoekig getal, waarvan de wortel $3z$ is, eindelijk is $x + y + z = 1601$. Men vraagt door middel van deze gegevens den bedoelden dag te ontdekken?*

OPGELOST *door* W. TOP WZ., C. F. JULIUS, I. B. VOLMER VAN BORN, R. VAN WIJK JZ., J. BASSAN, I. KÖHLER, L. J. ULMAN, B. BEKKING, M. B. JUNG, A. VAN DER SWAN en G. BRANDSTEDER.

OPLOSSING *van* W. TOP WZ.

Door de eerste voorwaarde van het vraagstuk is
$$x + z - 34 = (5y+4)^2 + (5y+4).$$

Door middel van de tweede voorwaarde is

$$x + 63y + 180 = \tfrac{1}{2} . 3z (15z - 3),$$

en daar de derde voorwaarde is

$$x + y + z = 1601,$$

zoo hebben wij, ter bepaling van x, y en z, deze drie vergelijkingen

$$x + z = 25y^2 + 45y + 54 \quad \ldots \quad (1)$$

$$2x + 126y = 45z^2 - 9z - 360 \quad \ldots \quad (2)$$

en

$$x + z = 1601 - y \quad \ldots \quad (3).$$

De waarden van $x + z$ uit (1) en (3) aan elkander gelijk stellende, komt er

$$25y^2 + 46y - 1547 = 0,$$

en losfende hieruit y op, dan vinden wij $y = 7$ of $y = -\frac{221}{25}$; doch daar uit den aard der zake x, y en z hier geheele getallen moeten zijn, zoo moeten wij $y = 7$ nemen.

Brengen wij $y = 7$ over in (3), dan komt er $x = 1594 - z$, en deze waarden van y en x overgebragt in (2), zullen wij verkrijgen

$$2(1594 - z) + 126 \times 7 = 45z^2 - 9z - 180,$$

of

$$45z^2 - 7z - 4430 = 0,$$

waaruit wij vinden $z = 10$, omdat de andere wortel negatief en bovendien geen geheel getal is.

Wij hebben dan gevonden $y = 7$ en $z = 10$ en hieruit volgt $x = 1584$, zoodat de voorschrevene gebeurtenis op 10 Julij 1584 is voorgevallen.

CCXXXVI. VOORSTEL.

Door C. F. Julius.

Iemand koopt een huis, te betalen in drie gelijke termijnen, den eersten contant, den tweeden over één, en den derden over twee jaar. Den eersten termijn betaalt hij met $\frac{2}{5}$ van zijn geld; het overschot zet hij op intrest, en betaalt den tweeden termijn met $\frac{5}{8}$ van die rest en de daarop verloopene intrest; de nieuwe rest zet hij wederom op intrest uit, tegen evenveel ten honderd als de eerste rest, maar komt dan eindelijk f $237\frac{3}{5}$ te kort om den laatsten termijn te voldoen. Hoe veel kost nu het huis, en tegen hoe veel ten honderd heeft hij zijn geld uitgezet?

Op.

Opgelost, *door* M. B. Jung, C. F. Julius, J. Bassan, A. van der Swan, W. Top Wz., J. Köhler, B. Bekking, J. B. Volmer van Born, L. J. Ulman en G. Brandsteder.

Oplossing *van* M. B. Jung.

Stel de koopsom van het huis $6x$, dan is iedere termijn $2x$, en daar dit $\frac{2}{5}$ is van de bezitting, zoo is deze bezitting $5x$; waaruit volgt, dat er, na de betaling van den eersten termijn, $3x$ overblijft.

Stel verder dat deze rest is uitgezet tegen y ten honderd in het jaar, dan heeft men

$$100 : 100 + y = 3x : \frac{3x(100+y)}{100},$$

voor deze rest met de verloopene interest na een jaar, en daar $\frac{5}{8}$ van deze som genoegzaam is om den tweeden termijn te betalen, zoo hebben wij, tot eerste vergelijking,

$$\frac{3x(100+y)}{160} = 2x,$$

of

$$100 + y = \frac{320}{3} = 106\tfrac{2}{3},$$

zoodat $y = 6\frac{2}{3}$, waardoor de interest bepaald is.

De rest der bezitting is nu $\frac{3}{8} \times \frac{3x(100+y)}{100}$, dat is, omdat wij $y = 6\frac{2}{3}$ gevonden hebben, $\frac{6}{5}x$, en om te vinden wat deze som over een jaar waardig is, zoo hebben wij:

$$100 : 106\tfrac{2}{3} = \tfrac{6}{5}x : \tfrac{32}{25}x,$$

en daar deze som $f\ 237\frac{3}{5}$ minder is dan de derde termijn, zoo verkrijgen wij de vergelijking

$$\tfrac{32}{25}x = 2x - 237\tfrac{3}{5},$$

of

$$\tfrac{18}{25}x = 237\tfrac{3}{5},$$

waaruit $x = 330$, en dus is de koopsom $6x = 1980$ gulden.

CCXXXVII. VOORSTEL,

Door C. F. Julius.

Vindt twee rationale quadraten, zoodanig, dat indien men bij elk quadraat den wortel van het andere optelt, de twee komende sommen wederom quadraten zijn?

Opgelost *door* C. F. Julius, L. J. Ulman, M. B. Jung, A. van der Swan, W. Top Wz., A. B. de Bock Jr., I. Köhler, J. Bassan en R. van Wijk Jz.

Oplossing *van* C. F. Julius.

Stellen wij de quadraten x^2 en y^2, dan moeten de formulen

$$x^2 + y \quad \text{en} \quad y^2 + x,$$

beide rationale quadraten zijn. Stellen wij den wortel van het eerste gelijk $x + a$, dan is

$$x^2 + y = x^2 + 2ax + a^2,$$

waaruit
$$x = \frac{y - a^2}{2a}.$$

Hierdoor gaat de tweede over in $y^2 + \frac{y - a^2}{2a}$, en stellen wij hiervan den wortel $y + b$, dan komt er

$$y^2 + \frac{y^2 - a^2}{2a} = y^2 + 2by + b^2,$$

of
$$y - a^2 = 4aby + 2ab^2,$$

waaruit
$$y = \frac{a^2 + 2ab^2}{1 - 4ab},$$

en brengende deze waarde in die van x over, dan komt er

$$x = \frac{b^2 + 2a^2 b}{1 - 4ab},$$

waarin nu a en b naar welgevallen kunnen genomen worden.

Neemt men a en b zoodanig, dat $4ab$ kleiner dan 1 is, dan worden x en y beide positief en dan zullen werkelijk $x^2 + y$ en $y^2 + x$ quadraten zijn.

Neemt men daarentegen $4ab$ grooter dan 1, zoo zullen x en y beide negatief worden, en dan zal men bij gevolg eigenlijk op twee quadraten nederkomen, van zoodanige eigenschap, dat wanneer men ieder met den wortel van het andere vermindert, beide de resten wederom quadraten zijn.

Neemt men, tot voorbeeld, $a = \frac{1}{2}$ en $b = \frac{1}{4}$, dan komt er $x = \frac{3}{8}$ en $y = \frac{5}{8}$, en men heeft alsdan

$$x^2 + y = \frac{9}{64} + \frac{5}{8} = \frac{49}{64} = \left(\frac{7}{8}\right)^2,$$
$$y^2 + x = \frac{25}{64} + \frac{3}{8} = \frac{49}{64} = \left(\frac{7}{8}\right)^2.$$

Neemt

Neemt men, tot ander voorbeeld, $a = 1$ en $b = 2$, dan komt er $x = -\frac{8}{7}$ en $y = -\frac{9}{7}$ en men heeft alsdan

$$x^2 + y = \tfrac{64}{49} - \tfrac{9}{7} = \tfrac{1}{49} = (\tfrac{1}{7})^2,$$

$$y^2 + x = \tfrac{81}{49} - \tfrac{8}{7} = \tfrac{25}{49} = (\tfrac{5}{7})^2.$$

CCXXXVIII. VOORSTEL.

Door W. TOP Wz.

Er zijn twee getallen, welker verschil een pentagonaal is, hebbende tot wortel een trigonaal, welks wortel de kleinste pronik in geheele getallen is. Wanneer men het product en de som dezer twee getallen met elkander vermenigvuldigt, zoo is dit product gelijk aan het gedurig product van twee trigonalen en een quadraat, waarvan de som der wortels een octagonaal is, hetwelk gelijk is aan het zevenvoud van deszelfs wortel. Indien nu de wortels der twee trigonalen tot elkander in reden zijn als 4 tot 13, en de wortel van het quadraat gelijk is aan dien van den kleinsten trigonaal, zoo vraagt men naar deze twee getallen?

OPGELOST *door* J. BASSAN, W. TOP Wz., L. J. ULMAN, B. BEKKING, A. VAN DER SWAN, M. B. JUNG, J. B. VOLMER VAN BORN en R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Men stelle den wortel van den octagonaal x, dan is $\frac{1}{2}x(6x-4) = 7x$ of $3x - 2 = 7$, dus $x = 3$, en de octagonaal is dus 21.

Deze octagonaal 21 is nu de som der wortels van twee trigonalen en een quadraat, en daar wij derzelver wortels, ingevolge het vraagstuk, kunnen uitdrukken door $4y$, $13y$ en $4y$, zoo is $4y + 13y + 4y = 21$, dat is $21y = 21$, zoodat $y = 1$. De twee trigonalen en het vierkant zijn dus 10; 91 en 16.

De kleinste pronik in geheele getallen is $1^2 + 1 = 2$; hiervan is de trigonaal $\frac{2^2+2}{2} = 3$, en hiervan is de pentagonaal $\frac{1}{2}\cdot 3\,(3\cdot 3 - 1) = 12$.

Daar dit nu het verschil tusschen de gevraagde getallen moet zijn, zoo kunnen wij voor dezelve stellen $z - 6$ en $z + 6$, en dan is volgens het vraagstuk

$$2z\,(z - 6)\,(z + 6) = 10 \times 91 \times 16;$$

 dee-

deelen wij door twee, dan komt er

$$(z-6)\,z\,(z+6) = 10 \times 91 \times 8;$$

daar nu de factoren van het eerste lid gedurig met 6 opklimmen, beproeven wij, of er onder de factoren van het tweede lid ook niet zulke bestaan, die deze eigenschap bezitten. Wij vinden spoedig

$$(z-6)\,z\,(z+6) = 14 \times 20 \times 26,$$

en nu is het klaar, dat $z = 20$ moet zijn, zoodat wij voor de gevraagde getallen vinden 14 en 26.

Ontwikkelt men de vergelijking en deelt men het eerste lid door $z - 20$, dan vindt men voor de vergelijking, die de overige wortels bevat, $z^2 + 20z + 364 = 0$, waarvan de beide wortels onbestaanbaar zijn.

CCXXXIX. Voorstel.

Door M. B. Jung.

Voor x, y en z zulke getallen te vinden, dat de formulen $xyz + x + y + z$ en $xyz - x - y - z$ rationale quadraten worden? (48)

Opgelost *door* M. B. Jung, W. Top Wz., I. Köhler, R. van Wijk Jz., G. Brandsteder en A. van der Swan.

Oplossing *van* M. B Jung.

Stel $xyz + x + y + z = p^2$ en $xyz - x - y - z = q^2$ en losſen wij uit beide de waarde van x op, dan komt er

$$x = \frac{p^2 - (y+z)}{yz+1} = \frac{q^2 + (y+z)}{yz-1},$$

en hieruit vinden wij

$$p^2 = \frac{yz+1}{yz-1}\,q^2 + \frac{2yz\,(y+z)}{yz-1},$$

zoodat het tweede lid van deze vergelijking nog een quadraat moet zijn.

Hiertoe kan men gemakkelijk geraken, wanneer $\frac{yz+1}{yz-1}$ een qua-

(48) O. S. Bangma, *Algebra*, *bl.* 243. N°. 38.

quadraat is, en wij stellen dus $\frac{yz+1}{yz-1} = a^2$, waaruit wij vinden $yz = \frac{a^2+1}{a^2-1}$, en hierdoor gaat p^2 over in

$$p^2 = a^2q^2 + (a^2+1)(y+z):$$

wij stellen alzoo $p = aq + b$ en dus

$$p^2 = a^2q^2 + (a^2+1)(y+z) = a^2q^2 + 2abq + b^2,$$

waaruit $$q = \frac{(a^2+1)(y+z) - b^2}{2ab}.$$

In deze formule kan men a, b en y naar welgevallen aannemen, terwijl z alsdan bekend wordt uit $yz = \frac{a^2+1}{a^2-1}$.

Voorbeeld. Stel $a = 2$, dan is $yz = 1\frac{2}{3}$, nemende dus $y = \frac{1}{3}$, dan is $z = 5$. Neem verder $b = 4$, dan is $q = \frac{2}{3}$ en $p = aq + b = 5\frac{1}{3}$, zoodat $x = 8\frac{2}{3}$. In deze onderstelling zijn dus de getallen $x = 8\frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$ en $z = 5$. Derzelver som is 4 en het product $14\frac{4}{9}$ en de twee quadraten zijn alzoo $\frac{256}{9}$ en $\frac{4}{9}$ dat $(\frac{16}{3})^2$ en $(\frac{2}{3})^2$.

CCXL. VOORSTEL.

Door B. LUBBERS.

Er wordt een getal gevraagd, dat te gelijkertijd een pentagonaal, hexagonaal en octagonaal is, van welke de wortels eene rekenkunstige reeks vormen?

OPGELOST *door* B. LUBBERS, J. BASSAN, L. J. ULMAN, R. VAN WIJK Jz., W. TOP Wz., I. B. VOLMER VAN BORN, M. B. JUNG, I. KÖHLER en A. VAN DER SWAN.

OPLOSSING *van* B. LUBBERS.

Stel de rekenkunstige reeks, waarvan de termen tot wortels der gevraagde veelhoekige getallen moeten verstrekken, x, $x+y$ en $x+2y$, dan worden deze getallen achtervolgens

$$\frac{3x^2-x}{2},\quad 2(x+y)^2-(x+y),\quad 3(x+2y)^2-2(x+2y)$$

welke ook aldus kunnen worden geschreven:

$$\tfrac{1}{2}(3x^2-x),\ 2x^2+4xy+2y^2-x-y,\ 3x^2+12xy+12y^2-2x-4y$$

 en

en deze drie uitdrukkingen moeten nu, ingevolge de opgaaf, aan elkander gelijk zijn.

Stellende de eerste gelijk de tweede, dan komt er, met twee vermenigvuldigende,

$$3x^2 - x = 4x^2 + 8xy + 4y^2 - 2x - 2y,$$

of $$x + 2y = x^2 + 8xy + 4y^2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

Stellende verder de tweede gelijk de derde, dan vindt men

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 - x - y = 3x^2 + 12xy + 12y^2 - 2x - 4y$$

of $$x + 3y = x^2 + 8xy + 10y^2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

en wanneer wij hiervan de vergelijking (2) aftrekken, blijft er

$$y = 6y^2,$$

uit welke vergelijking volgt $y = 0$ of $y = \frac{1}{6}$.

Neemt men $y = 0$, dan geeft elke der vergelijkingen (1) en (2) $x^2 = x$, waaruit $x = 0$ of $x = 1$. Hierdoor verkrijgen wij dus reeds twee antwoorden, te weten:

1°. $x = 0$ en $y = 0$; de wortels der getallen zijn dan alle 0 en het gevraagde getal is mede 0.

2°. $x = 1$ en $y = 0$; de wortels der veelhoekige getallen zijn alsdan alle 1, en het gevraagde getal is mede gelijk 1.

Neemt men daarentegen $y = \frac{1}{6}$; dan gaat elke der vergelijkingen (1) en (2) hierdoor over in

$$x^2 + \tfrac{1}{3}x = \tfrac{2}{9},$$

en deze vergelijking oplossende, verkrijgen wij $x = \frac{1}{3}$ of $x = -\frac{2}{3}$. Hieruit ontstaan dan wederom twee antwoorden, namelijk:

3°. $y = \frac{1}{6}$ en $x = \frac{1}{3}$; de wortels der veelhoekige getallen worden alsdan $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{3}$, terwijl het getal wordt 0.

4°. $y = \frac{1}{6}$ en $x = -\frac{2}{3}$. De veelhoeks-wortels zijn alsdan $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$ en $-\frac{1}{3}$, en het gevraagde getal is dus 1.

Aanmerking. Uit onze oplossing volgt, dat er eigenlijk niet meer dan twee getallen zijn, die aan het vraagstuk voldoen, namelijk 0 en 1, doch dat men elk dezer getallen moet beschouwen als op twee verschillende wijzen aan het vraagstuk te voldoen; want 0 is niet alleen een vijf-, zes- en achthoekig getal, waarvan de wortels zijn 0, 0 en 0, en die dus eene rekenkunstige reeks uitmaken; maar 0 is ook een vijf-, zes- en achthoekig getal, waarvan de wortels zijn $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{3}$, en deze wortels maken mede eene rekenkunstige reeks uit.

Op

Op dezelfde wijze is 1 niet alleen een vijf-, zes- en achthoekig getal, waarvan de wortels zijn 1, 1 en 1, die werkelijk eene rekenkunstige reeks uitmaken; maar 1 is ook een vijf-, zes- en achthoekig getal, waarvan de wortels zijn $-\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$ en $-\frac{1}{3}$, en deze wortels vormen mede eene rekenkunstige reeks.

CCXLI. VOORSTEL.

Door I. W. MARTINI.

In eene ellips een' regthoek te beschrijven, wiens inhoud een maximum is, en verder de inhouden te bepalen der vier segmenten, die hierdoor van de ellips worden afgesneden?

OPGELOST door I. W. MARTINI, W. TOP WZ., F. J. STAMKART en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING van I. W. MARTINI.

Stel de assen van de ellips $AB = 2a$ en $CD = 2b$, *Fig.* 140, en zij FGHI de gevraagde regthoek; indien wij dan $EK = z$ en $KF = y$ stellen, is $y = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 - z^2)}$ en de inhoud van den regthoek is dus $4\,EK \times KF = 4\frac{bz}{a} \sqrt{(a^2 - z^2)}$.

Zal nu deze inhoud een maximum zijn, dan behoeft alleen de functie $u = z^2 (a^2 - z^2)$ een maximum te wezen, en dus moet $\frac{\partial u}{\partial z} = 2a^2 z - 4z^3 = 0$ zijn, aan welke vergelijking voldaan wordt door $z = 0$, of door $z = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$. De eerste dezer waarden maakt $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2a^2 - 12z^2$ positief en toont dus een minimum aan, zijnde ook in dit geval de inhoud van den regthoek gelijk 0. De tweede waarde van z, namelijk $z = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$, maakt daarentegen $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ negatief en behoort dus tot het gevraagde maximum, waaruit dan volgt, dat de gevraagde grootste regthoek gevonden wordt door $EK = z = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ en dus $EL = y = \frac{b}{a} \sqrt{(a_2 - z^2)} = \frac{1}{2}b\sqrt{2}$ te nemen.

Door middel van deze uitdrukkingen wordt de gevraagde regthoek zeer gemakkelijk geconstrueerd. Beschrijven wij, namelijk, om de ellips den regthoek MNOP der assen en trekken wij in denzelven de diagonalen MO en NP, dan bepalen dezelve, door hunne doorsnijding met de ellips, de hoekpunten F, G, H en I van den grootsten regthoek; want door deze constructie is EK : KF $=$ a : b, en door de vergelijking van de ellips is $a^2 \times FK^2 + b^2 \times EK^2 = a^2 b^2$, uit welke twee vergelijkingen volgt EK $= \frac{1}{2} a \sqrt{2}$ en FK $= \frac{1}{2} b \sqrt{2}$.

De diagonalen FH en IG van den gevondenen regthoek zijn niet anders dan de gelijke toegevoegde middellijnen van de ellips; want trekkende AC, dan deelen de diagonalen AC en NE elkander midden door, en dus is AC eene ordinaat van de middellijn FH; omdat verder NO en NM in C en A midden door gedeeld zijn, loopt MO evenwijdig met AC, en dus is IG de toegevoegde middellijn van FH; en daar FH en IG bovendien even groot zijn, is het gezegde bewezen.

Daar EK $= \frac{1}{2} a \sqrt{2}$ en EL $= \frac{1}{2} b \sqrt{2}$ is, zoo is de inhoud van regthoek FGHI gelijk 4 EK $\times$ EL $= 2ab$, en deze regthoek is alzoo de helft van den omgeschreven regthoek MNOP der ellips.

Beschrijven wij op de groote as van de ellips als straal een cirkel en verlengen wij FI en GH ter wederzijde tot aan den omtrek van den cirkel, dan volgt uit EK $= \frac{1}{2} a \sqrt{2}$ en EF′ $=$ EI′ $= a$, dat KF′ $=$ KI′ $= \frac{1}{2} a \sqrt{2}$ is, en bijgevolg is KF′ $=$ KI′ $=$ EK. Hieruit volgt dan, dat de hoeken F′EK en I′EK elk gelijk 45° zijn, en dat de lijnen EF′ en EI′ loodregt op elkander staan, waaruit dan ten duidelijkste blijkt, dat F′G′H′I′ het quadraat is in den cirkel beschreven. Hieruit volgt dan eene andere constructie voor den grootsten regthoek; want het vierkant F′G′H′I′, in den cirkel beschreven hebbende, zullen de zijden F′I′ en G′K′, door derzelver doorsnijding met de ellips, de hoekpunten F, G, H en I van den grootsten regthoek doen kennen.

Door middel van deze laatste constructie kunnen wij gemakkelijk tot de formulen voor den inhoud der elliptische segmenten geraken, daar het genoegzaam bekend is, dat de inhoud van het elliptisch segment IAF tot dien van het cirkel segment I′A′F′ in

re-

reden is als de kleine as tot de groote as. Nu is de inhoud van het cirkel-segment I′A′F′ $= \frac{1}{4}(a^2\pi - 2a^2) = \frac{1}{4}a^2(\pi - 2)$, waaruit dan volgt, dat elk der elliptische segmenten IAF en HBG gelijk is aan $\frac{1}{4}ab(\pi - 2)$.

Daar de inhoud van de geheele ellips gelijk πab en de inhoud van regthoek FGHI $= 2ab$ is, zoo blijft er voor de som der inhouden van de vier elliptische segmenten $ab(\pi - 2)$; maar de som der inhouden van de twee segmenten IAF en HBG is $\frac{1}{2}ab(\pi - 2)$: zoodat de som der twee segmenten FCG en IDH mede gelijk $\frac{1}{2}ab(\pi - 2)$ is, en daar deze segmenten even groot zijn, zoo is de inhoud van elk derzelve $\frac{1}{4}ab(\pi - 2)$, waaruit dan volgt, dat de vier elliptische segmenten gelijken inhoud hebben.

Daar dan de inhoud van de ellips gelijk is aan $ab\pi$, die van den grootsten regthoek gelijk $2ab$, en die van elk segment $\frac{1}{4}ab(\pi - 2)$, zoo staan deze inhouden achtervolgens tot elkander in reden als de getallen 4π, 8 en $\pi - 2$.

CCXLII. VOORSTEL.

Door I. W. MARTINI.

In eene ellips een' regthoek te beschrijven, waarvan de omtrek een maximum is; en verder de inhouden der vier segmenten te bepalen, die hierdoor van de ellips worden afgesneden?

OPGELOST *door* I. W. MARTINI, W. TOP Wz. en F. J. STAMKART.

OPLOSSING *van* I. W. MARTINI.

Stellen wij de halve assen AE en EC, *Fig.* 141, wederom gelijk a en b, en de halve zijden van den gevraagden regthoek EK $= z$ en EL $= y$, dan is $y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - z^2)}$, en dan zal de omtrek van dezen regthoek worden uitgedrukt door $4(z + y)$, dat is, door $4\left(z + \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - z^2)}\right)$, of door $\frac{4}{a}\left(az + b\sqrt{(a^2 - z^2)}\right)$, en wij zullen alzoo moeten onder-

zoe-

zoeken, voor welke waarde van z de functie $u = az + b\sqrt{(a^2 - z^2)}$ een maximum is.

Stellen wij $\frac{\partial u}{\partial z} = a - \frac{bz}{\sqrt{(a^2 - z^2)}} = 0$, dan is $a\sqrt{(a^2 - z^2)} = bz$ of $a^2(a^2 - z^2) = b^2 z^2$, waaruit $z^2 = \frac{a^4}{a^2 + b^2}$ en $z = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, en daar deze waarde van z de waarde van $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{a^2}{(a^2 - z^2)^{\frac{3}{2}}}$ negatief maakt, toont dezelve een maximum voor u aan. Voor den gevraagden regthoek zullen wij dus hebben $EK = z = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$ en bijgevolg $EL = y = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - z^2)} = \frac{b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, en de omtrek van dezen regthoek is bijgevolg $4(y+z) = 4\sqrt{(a^2 + b^2)}$, dat is gelijk de omtrek van het parallelogram ACBD, of, dat hetzelfde is, gelijk de som der diagonalen van den regthoek om de ellips beschreven.

De inhoud van den gevonden' regthoek is $4yz$ en bijgevolg $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$.

Trekkende LM evenwijdig met AC, dan is $CE : LE = CA : LM$ of $b : \frac{b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2)}} = \sqrt{(a^2 + b^2)} : LM$, dus $LM = b$ en bijgevolg ook $AO = b$. Op dezelfde wijze vinden wij ook, KN evenwijdig met AC trekkende, $CP = KN = a$, en hierdoor wordt het dan zeer gemakkelijk den gevraagden regthoek te construeren; want wij zullen alleen op AC het stuk OA gelijk de halve kleine, of het stuk CP gelijk de halve groote as moeten nemen, en hierdoor zal dan de geheele regthoek bepaald zijn.

Beschrijven wij op AB een' cirkel en verlengen wij FI ter wederzijde tot aan den omtrek, dan is vooreerst $KF' = \sqrt{(EF'^2 - EK^2)} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + b^2)}}$, en verder is het cirkelsegment F'AI' gelijk den sector EF'AI' verminderd met den driehoek EF'I'. Stellen

wij

wij nu den hoek $F'EI' = \phi$, dan is *sector* $EF'AI' = \frac{1}{2} a^2 \phi$ en *drieh.* $EF'I' = \frac{1}{2} a^2$ *Sin.* ϕ, zoodat

$$\text{cirk. segm. } F'AI' = \tfrac{1}{2} a^2 (\phi - \text{Sin. } \phi)$$

Daar nu $EK = EF'$ *Cos.* $\frac{1}{2}\phi$ en $KF' = EF'$ *Sin.* $\frac{1}{2}\phi$ is, zoo is

$$\text{Sin.} \tfrac{1}{2}\phi = \frac{KF'}{EF'} = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \text{ en Cos. } \tfrac{1}{2}\phi = \frac{EK}{EF'} = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

waardoor *Sin.* $\phi = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$ en ϕ = *Boog Sin.* $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ = *Boog Tang.* $\frac{2ab}{a^2-b^2}$. Wij hebben alzoo

$$\text{cirk. segm. } F'AI' = \tfrac{1}{2} a^2 \left\{ \text{Boog Tang.} \frac{2ab}{a^2-b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2} \right\}$$

en daar het elliptisch segment FAI tot het cirkelsegment F'AI' in reden is als b tot a, zoo volgt hieruit

$$\text{el. segm. } FAI = \text{el. segm. } GBH = \tfrac{1}{2} ab \left\{ \text{Boog Tang.} \frac{2ab}{a^2-b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2} \right\}.$$

Tellen wij bij de som van deze twee segmenten den inhoud $\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$ van den regthoek FH, dan komt er

$$ab \left\{ \text{Boog Tang.} \frac{2ab}{a^2-b^2} + \frac{2ab}{a^2+b^2} \right\},$$

en trekken wij deze uitdrukking af van den inhoud der ellips, dat is van $ab\,\pi$, dan blijft er voor de som der twee segmenten FCG en IDH

$$ab \left\{ \pi - \text{Boog Tang.} \frac{2ab}{a^2-b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2} \right\},$$

dat is, omdat in het algemeen π — *Boog Tang.* z = *Boog Tang.* $(-z)$ is

$$ab \left\{ \text{Boog Tang.} \frac{2ab}{b^2-a^2} - \frac{2ab}{b^2+a^2} \right\},$$

en elk der segmenten FCG en IDH is dus gelijk de helft van deze uitdrukking, zoodat wij voor den inhoud der segmenten hebben:

$$\text{segm. } FAI = \text{segm. } GBH = \tfrac{1}{2} ab \left\{ \text{Boog Tang.} \frac{2ab}{a^2-b^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2} \right\}$$

$$\text{segm. } FCG = \text{segm. } IDH = \tfrac{1}{2} ab \left\{ \text{Boog Tang.} \frac{2ab}{b^2-a^2} - \frac{2ab}{a^2+b^2} \right\}.$$

Is de ellips een cirkel, dan is $b = a$. In dit geval wordt de regthoek FH het ingeschreven vierkant van den cirkel, en de vier segmenten hebben alsdan gelijken inhoud.

CCXLIII.

CCXLIII. Voorstel

Door P. de Perez.

In eene parabool een cirkel te beschrijven, welke den omtrek der parabool in twee punten aanraakt, en tevens door een bepaald punt van de as gaat?

Opgelost *door* P. de Perez. F. J. Stamkart, L. J. Ulman, W. Top Wz. en R. van Wijk Jz.

Oplossing *van* P. de Perez.

Zij B, *Fig.* 142, het gegeven punt van de as en C het middelpunt van den gevraagden cirkel. Indien dan D en D′ de raakpunten zijn, is CD normaal van de parabool, en bijgevolg is CE de subnormaal van het punt D, zoodat $CE = \frac{1}{2}p$. Stellen wij dan $AB = a$ en $CB = CD = x$, dan is $AE = a - \frac{1}{2}p - x$ en dus $DE^2 = p \times AE = p\,(a - \frac{1}{2}p - x)$, maar $CD^2 = CE^2 + DE^2$, dus $x^2 = \frac{1}{4}p^2 + p\,(a - \frac{1}{2}p - x)$ of $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 - ap = 0$, waaruit $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{ap}$, dat is, omdat $BF^2 = ap$ is, $x = -\frac{1}{2}p \pm BF$; waaruit dan volgt, dat er in het algemeen twee antwoorden zijn op het vraagstuk, namelijk $x = BC = BF - \frac{1}{2}p$ en $x' = BC' = -(BF + \frac{1}{2}p)$.

Deze waarden van x worden gemakkelijk geconstrueerd; want G het brandpunt der parabool zijnde, is $GH = \frac{1}{2}p$; trekkende dus HI evenwijdig met de as, dan wordt $FI = BF - \frac{1}{2}p = x$ en $IF' = BF + \frac{1}{2}p = -x'$, nemende dus BC en BC′ gelijk aan FI en F′I, dan zullen C en C′ de middelpunten van de begeerde cirkels wezen.

Hoe het punt B gegeven mag zijn, zal de cirkel, die ter regterhand van FF′ ligt, en deszelfs middelpunt in C′ heeft, altijd blijven bestaan; want brengende $x = -(\frac{1}{2}p + \sqrt{ap})$ over in de waarde van DE, dan is in $DE = \sqrt{p\,(a - \frac{1}{2}p - x)}$, dan komt er $DE = \sqrt{p\,(a + \sqrt{ap})}$, welke waarde altijd bestaanbaar is en dus aantoont, dat de raakpunten d en d' altijd plaats kunnen hebben.

Met den cirkel, die ter linkerhand van FF′ ligt en deszelfs middelpunt in C heeft, is het geheel anders gelegen; want brengende $x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{ap}$ over in de waarde van DE,

dat

dan komt er $DE = \sqrt{p(a - \sqrt{ap})}$, welke waarde onbestaanbaar wordt, zoodra $a < \sqrt{ap}$, dat is, zoodra $\sqrt{a} < \sqrt{p}$, of wel wanneer $a < p$ is. Zoodra dus AB kleiner dan de parameter is, zal de cirkel ter linkerzijde van FF′ niet meer bestaan, en er zal dus in dit geval slechts een antwoord op de vraag plaats hebben.

Is eindelijk AB gelijk de parameter, dan bestaan beide cirkels nog; doch dan raakt die, welke ter linkerzijde van FF′ ligt, de parabool in den top.

CCXLIV. VOORSTEL.

Door I. Köhler.

De middellijn van den cirkel, in eenen driehoek beschreven, maakt met deszelfs zijden eene rekenkunstige reeks, welke met de eenheid opklimt; men vraagt den driehoek te bepalen?

Opgelost door A. B de Bock Jr., J. Bassan, L. J. Ulman, F. J. Stamkart, W. Top Wz. en R. van Wijk Jz.

Oplossing van A. B. de Bock Jr.

Wij nemen als bekend aan, dat de zijden van eenen driehoek a, b en c zijnde, en de halve omtrek door s uitdrukkende, de middellijn van den ingeschreven' cirkel zal worden uitgedrukt door de formule $m = 2\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$. Stellen wij nu de middellijn van den ingeschreven' cirkel $m = 2x - 2$, dan zijn, ingevolge het vraagstuk, de zijden $a = 2x - 1$, $b = 2x$ en $c = 2x + 1$. Hieruit volgt dan $s = 3x$, $s - a = x + 1$ $s - b = x$ en $s - c = x - 1$, en substituerende dit in de formule voor r, dan verkrijgen wij de vergelijking

$$2x - 2 = 2\sqrt{\frac{(x+1)(x-1)x}{3x}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{3}},$$

of $\qquad (x-1)^2 = \frac{1}{3}(x^2-1),$

of $\qquad 3(x-1)^2 - (x^2-1) = 0,$

dat is $\qquad (x-1)(x-2) = 0,$

waaruit $\qquad x = 1$ of $x = 2$.

Nemende $x = 1$, dan worden de zijden van den driehoek

1, 2 en 3, terwijl de middellijn van den ingeschreven' cirkel nul wordt. De driehoek is dus in dit geval oneigenlijk, daar de som van twee der zijden gelijk de derde is, en dezelve dus in eene regte lijn overgaat.

Nemende daarentegen $x = 2$, dan worden de zijden 3, 4 en 5, en de middellijn van den ingeschreven' cirkel is dus 2. In dit geval is dus de driehoek regthoekig.

CCXLV. VOORSTEL.

Door I. KÖHLER.

Twee ladders, waarvan de lengten in reden zijn als p tot q, staan onder eenen hoek α met hare uiteinden tegen elkander. Indien men deze ladders zoodanig verplaatst, dat de afstand der steunpunten a voeten grooter wordt, dan vermeerdert hierdoor de tophoek met eenen hoek β. Men vraagt hoe lang elke dezer ladders is?

OPGELOST door W. TOP Wz., J. BASSAN, R. VAN WIJK Jz., F. J. STAMKART en I. KÖHLER.

OPLOSSING van W. TOP Wz.

Daar de lengte der ladders tot elkander in reden zijn als p tot q, stellen wij voor dezelve px en qx; indien zij dan aan den top een' hoek α maken, zoo is de afstand der voetpunten $x\sqrt{(p^2 + q^2 - 2pq \operatorname{Cos} \alpha)}$.

Worden nu de ladders zoodanig verplaatst, dat de hoek aan den top met β vermeerdert, dan behouden hierdoor de ladders de lengten px en qx, doch sluiten eenen hoek $\alpha + \beta$ in; zoodat de afstand der steunpunten nu gelijk zal zijn aan $x\sqrt{(p^2 + q^2 - 2pq \operatorname{Cos.} (\beta + \alpha))}$.

Daar nu door deze verplaatsing de afstand der voetpunten met a voeten vermeerderd is, zoo hebben wij

$$x\sqrt{(p^2 + q^2 - 2pq \operatorname{Cos.} (\alpha+\beta))} - x\sqrt{(p^2 + q^2 - 2pq \operatorname{Cos} \alpha)} = a$$

en hieruit vinden wij

$$x = \frac{a}{\sqrt{(p^2+q^2-2pq \operatorname{Cos.} (\alpha+\beta))} - \sqrt{(p^2+q^2-2pq \operatorname{Cos} \alpha)}}$$

zoo-

zoodat de lengte der ladders zal zijn

$$px = \frac{ap}{\sqrt{(p^2+q^2-2pq\,Cos.(\alpha+\beta))}-\sqrt{(p^2+q^2-2pq\,Cos.\alpha)}}$$

en $$qx = \frac{aq}{\sqrt{(p^2+q^2-2pq\,Cos.(\alpha+\beta))}-\sqrt{(p^2+q^2-2pq\,Cos.\alpha)}}.$$

CCXLVI. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men vraagt de waarde van x en y te vinden uit de vergelijkingen $\frac{x}{y^8}+\frac{y}{x^8}=3\frac{1}{6561}$ *en* $3(x^3+y^3)+3(x^2+y^2)=(7x+7y+10)xy$?

OPGELOST door J. BASSAN, W. TOP WZ., L. I. ULMAN, F. J. STAMKART, A. B. DE BOCK JR. en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

De twee gegevene vergelijkingen zijn

$$3(x^3+y^3)+3(x^2+y^2)=(7x+7y+10)xy \quad \ldots\ldots (I)$$

en $$\frac{x}{y^8}+\frac{y}{x^8}=3\frac{1}{6561} \quad \ldots\ldots\ldots (II)$$

Trekkende van beide leden der eerste vergelijking $3xy$ af, dan blijft er

$$3(x^3+y^3)+3(x^2-xy+y^2)=7xy(x+y+1);$$

of $$3(x+y)(x^2-xy+y^2)+3(x^2-xy+y^2)=7xy(x+y+1),$$

dat is $$3(x+y+1)(x^2-xy+y^2)=7xy(x+y+1)$$

of $$3(x+y+1)(x^2-xy+y^2)-7(xy)(x+y+1)=0,$$

dus $$(x+y+1)(3x^2-10xy+3y^2)=0;$$

of wanneer wij den laatsten factor in deszelfs factoren ontbinden,

$$(x+y+1)(3x-y)(x-3y)=0;$$

waaruit dan volgt, dat aan de eerste der opgegevene vergelijkingen op drie verschillende wijzen kan worden voldaan, namelijk door te nemen

1°. $x=-(y+1)$; 2°. $x=\frac{1}{3}y$; 3°. $x=3y$;

en wij zullen alzoo elke dezer vergelijkingen met de tweede der opgegevene vergelijkingen moeten combineren.

Substitueert men vooreerst $x=-(y+1)$ in de verge-

lijking (II), dan verkrijgt men eene vergelijking in y, die tot den zestienden graad opklimt, en offchoon men, door $x + y = -1$ met de vergelijking (II) te combineren, deze vergelijking ontwijken kan, en uit deze twee vergelijkingen eene derde in xy kan afleiden, die niet hooger dan tot den achtsten graad opklimt, zullen wij ons echter, uit hoofde van de omflagtigheid, niet verder met het onderzoek der wortels inlaten, die uit deze vergelijking zouden voortspruiten.

Neemt men verder $x = \frac{1}{3}y$ of $y = 3x$ en brengt dezelve in (II) over, dan komt er $\frac{1}{6561\,x^7} + \frac{3}{x^7} = \frac{19684}{6561}$ of $19684 = 19684\,x^7$, dus $x^7 = 1$ en $x = 1$, waardoor $y = 3x = 3$.

Neemt men eindelijk $x = 3y$, dan vindt men op dezelfde wijze $y = 1$, waaruit $x = 3$.

CCXLVII. VOORSTEL.

Door J. BASSAN.

Men begeert eenen driehoek te bepalen, wanneer gegeven is het product der zijden, de inhoud en één der hoeken?

OPGELOST *door* J. BASSAN, L. J. ULMAN, W. TOP WZ., F. J. STAMKART, R. VAN WIJK JZ., en A. B. DE BOCK JR.

OPLOSSING *van* J. BASSAN.

Stellen wij, *Fig.* 143, de zijden x, y en z, het product der zijden p, den inhoud van den driehoek i en den hoek, begrepen tusschen de zijden x en z gelijk a, dan hebben wij, door het vraagstuk en de bekende eigenschappen der driehoeken, $xyz = p$ en $\frac{1}{2}\,xz\ Sin.\,a = i$, waaruit terstond gevonden wordt $xz = \frac{2i}{Sin.\,a}$ en $y = \frac{p}{xz} = \frac{p\ Sin.\,a}{2i}$, zoodat de zijde y reeds geheel bekend is.

Verder is $y^2 = x^2 + z^2 - 2xz\ Cos.\,a$, of, wanneer wij hierin de waarde van y en xz overbrengen,

$$x^2 + z^2 = \frac{p^2\ Sin^2.\,a}{4i^2} + 4i\,.\,\frac{Cos.\,a}{Sin.\,a},$$

en

en daar boyendien

$$2xz = \frac{4i}{Sin.\,a}$$

is, zoo hebben wij, optellende en aftrekkende,

$$(x+z)^2 = \frac{p^2 Sin^2.\,a}{4i^2} + 4i\,\frac{1+Cos.\,a}{Sin\,a},$$

en $$(x-z)^2 = \frac{p^2 Sin^2.\,a}{4i^2} - 4i\,\frac{1-Cos.\,a}{Sin.\,a},$$

zoodat $$x+z = \sqrt{\left\{\frac{p^2 Sin^2.\,a}{4i^2} + 4i\,\frac{1+Cos.\,a}{Sin.\,a}\right\}},$$

en $$x-z = \sqrt{\left\{\frac{p^2 Sin^2.\,a}{4i^2} - 4i\,\frac{1-Cos.\,a}{Sin.\,a}\right\}},$$

zoodat wij voor de twee overige zijden vinden:

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{p^2 Sin^2\,a}{4i^2} + 4i\,Cot.\,\tfrac{1}{2}a\right\}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{p^2 Sin^2.\,a}{4i^2} - 4i\,Tang.\,\tfrac{1}{2}a\right\}}$$

en $$z = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{p^2 Sin^2.\,a}{4i^2} + 4i\,Cot.\,\tfrac{1}{2}a\right\}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{\frac{p^2 Sin^2.\,a}{4i^2} - 4i\,Tang.\,\tfrac{1}{2}a\right\}}.$$

De drie zijden nu bekend zijnde, is er niets gemakkelijker, dan de twee onbekende hoeken door de bekende regels uit dezelve af te leiden.

In plaats van door middel der vergelijkingen $x^2 + z^2 - 2xz \times Cos.\,a = y^2$, $xz = \frac{2i}{Sin.\,a}$ en $y = \frac{p\,Sin.\,a}{2i}$ de waarde van x en z te zoeken, kan men op de volgende wijze tot de kennis van de twee onbekende hoeken geraken. Stellen wij het halve verschil der hoeken C en B gelijk ϕ, dan is, omdat derzelver som gelijk $180° - a$ is, $B = 90 - (\tfrac{1}{2}a + \phi)$ en $C = 90° - (\tfrac{1}{2}a - \phi)$, en dus $Sin.\,B = Cos.\,(\tfrac{1}{2}a + \phi)$ en $Sin.\,C = Cos.\,(\tfrac{1}{2}a - \phi)$. Nu is uit de bekende formule voor den inhoud van eenen driehoek

$$xy\,Cos.\,(\tfrac{1}{2}a + \phi) = 2i \quad\text{en}\quad yz\,Cos.\,(\tfrac{1}{2}a - \phi) = 2i,$$

en nemende hiervan het product, dan komt er uit hoofde van

$$xz = \frac{2i}{Sin.\,a} \text{ en } y^2 = \frac{p^2 Sin^2.\,a}{4i^2},$$

$$\frac{2i}{Sin\,a} \times \frac{p^2 Sin^2\,a}{4i^2}\,.\,Cos.\,(\tfrac{1}{2}a + \phi)\,Cos.\,(\tfrac{1}{2}a - \phi) = 4i^2,$$

of $$p^2\,Sin.\,a\,.\,Cos.\,(\tfrac{1}{2}a + \phi)\,Cos.\,(\tfrac{1}{2}a - \phi) = 8i^3,$$

 dat

dat is, omdat in het algemeen $Cos.m.Cos\ n = \frac{1}{2} Cos.(m+n) + \frac{1}{2} Cos.(m-n)$ is,

$$p^2 Sin.\,a \left\{\tfrac{1}{2} Cos.\,a + \tfrac{1}{2} Cos.\,2\phi\right\} = 8 i^2,$$

of
$$Cos.\,a + Cos.\,2\phi = \frac{16 i^2}{p^2 Sin.\,a},$$

waaruit
$$Cos.\,2\phi = \frac{16 i^2}{p^2 Sin.\,a} - Cos.\,a.$$

Door deze vergelijking ϕ bepaald hebbende, zijn de hoeken B en C bekend, en daar bovendien de ingeslotene zijde y bekend is, kunnen dan de twee overige zijden door den bekende regel der Sinussen gevonden worden.

CCXLVIII. Voorstel.

Door A. B. de Bock Jr.

Van eenen driehoek gegeven zijnde het vermenigvuldigde van twee der zijden gelijk a, de hoek tusschen deze twee zijden gelijk a en de derde zijde gelijk c, dan vraagt men de onbekende zijden en hoeken te vinden?

Opgelost door J. Bassan, A. B. de Bock Jr., L. J. Ulman, F. J. Stamkart, W. Top Wz. en R. van Wijk Jz.

Oplossing van J. Bassan.

Daar het product der zijden om den gegeven hoek gelijk a, en de derde zijde c is, zoo is het product der zijden $p = ac$, en daar verder uit deze gegevens onmiddellijk voor den inhoud volgt $i = \frac{1}{2} a\ Sin.\,a$, zoo hebben wij volmaakt dezelfde gegevens van het voorgaande vraagstuk, en hieruit volgt, dat wij in de formulen van het voorgaande vraagstuk alleen p en i zullen moeten vervangen door ac en $\frac{1}{2} a\ Sin.\,a$, waardoor wij voor de twee onbekende zijden zullen verkrijgen;

$$x = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{c^2 + 4a\ Cos^2.\tfrac{1}{2}a\right\}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{c^2 - 4a\ Sin^2\tfrac{1}{2}a\right\}},$$

en
$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{c^2 + 4a\ Cos^2.\tfrac{1}{2}a\right\}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\left\{c^2 - 4a\ Sin^2\tfrac{1}{2}a\right\}},$$

terwijl wij voor het halve verschil der onbekende hoeken vinden

$$Cos.\,2\phi = \frac{2a\ Sin^2.\,a}{c^2} - Cos.\,a,$$

waardoor dan alles bekend is.

CCXLIX.

CCXLIX. VOORSTEL.

Door A. VOLKERSE.

Uit een vat tapt men bier in eene kuip, twee uren daarna opent men ook de kraan der kuip, en tapt daaruit in een ander vat; vier uren later sluit men beide kranen en er bevinden zich nog 120 kannen bier in de kuip.

Op eenen anderen dag, de kuip geledigd zijnde, wordt de kraan van het vat weder geopend, en vier uren daarna die van de kuip; drie uren later worden beide kranen gesloten, en in de kuip nog over bevonden 190 kannen bier.

Onderstellende nu dat het bier door elke kraan altijd met gelijke snelheid geloopen heeft, dan vraagt men, hoe veel elke kraan in een uur heeft geloosd? (49)

OPGELOST *door* A. VOLKERSE, W. TOP WZ., J. BASSAN, L. I. ULMAN, A. B. DE BOCK JR. en R. VAN WIJK JZ.

OPLOSSING *van* A. VOLKERSE.

Stel de kraan van het vat heeft geloosd in een uur x en de kraan van de kuip in een uur y kannen, dan heeft men

$$6x - 4y = 120 \text{ en } 7x - 13y = 190.$$

Uit de eerste vindt men $x = \frac{1}{3}(60 + 2y)$ en uit de tweede $x = \frac{1}{7}(190 + 3y)$, en deze waarden van x aan elkander gelijk stellende, komt er

$$3(190 + 3y) = 7(60 + 2y),$$

of

$$570 + 9y = 420 + 14y,$$

zoodat $5y = 150$ of $y = 30$, waaruit $x = \frac{1}{3}(60 + 2y) = 40$. De kraan van het vat heeft dus 40 en de kraan van de kuip 30 kannen in een uur geloosd.

CCL.

(49) MORGENSTERN, *Werk. Meetk.* I Deel, bladz. 225.

CCL. VOORSTEL.

Door A. E. TROMP.

Den inhoud te vinden van het ligchaam, geboren door de omwenteling der kromme lijn, onder den naam van de cissoide van DIOCLES *bekend, om derzelver as?*

OPGELOST *door* A. E. TROMP, W. TOR WE, F. J. STAMKAART EN R. VAN WIJK Jz.

OPLOSSING *van* A. E. TROMP.

Zij O, *Fig.* 144, de oorsprong der coördinaten en OD de as der abscissen, om welke wij stellen dat de figuur wentelt, dan wordt de wet van opvolging der punten van deze lijn, OB $= x$ en BC $= y$ stellende, uitgedrukt door de vergelijking

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x},$$

waarin a de middellijn OE van den cirkel is, die in de constructie van de kromme voorkomt.

Daar nu de inhoud van eenig omwentelingsligchaam in het algemeen wordt uitgedrukt door $\pi \int y^2 \partial x$, zoo hebben wij in ons bijzonder geval

$$I = \pi \int \frac{x^3 \partial x}{a - x},$$

of, wanneer wij EB, dat is $a - x = z$, stellen,

$$I = -\pi \int \frac{(a-z)^3 \partial z}{z} = -\pi \int \frac{(a^3 - 3a^2 z + 3az^2 - z^3)\partial z}{z},$$

$$= -\pi \left\{ a^3 \int \frac{\partial z}{z} - 3a^2 \int \partial z + 3a \int z \partial z - \int z^2 \partial z \right\},$$

en deze termen afzonderlijk integrerende, komt er

$$I = \pi \left\{ C - a^3 \,Log.\, z + 3a^2 z - \tfrac{3}{2} a z^2 + \tfrac{1}{3} z^3 \right\}$$

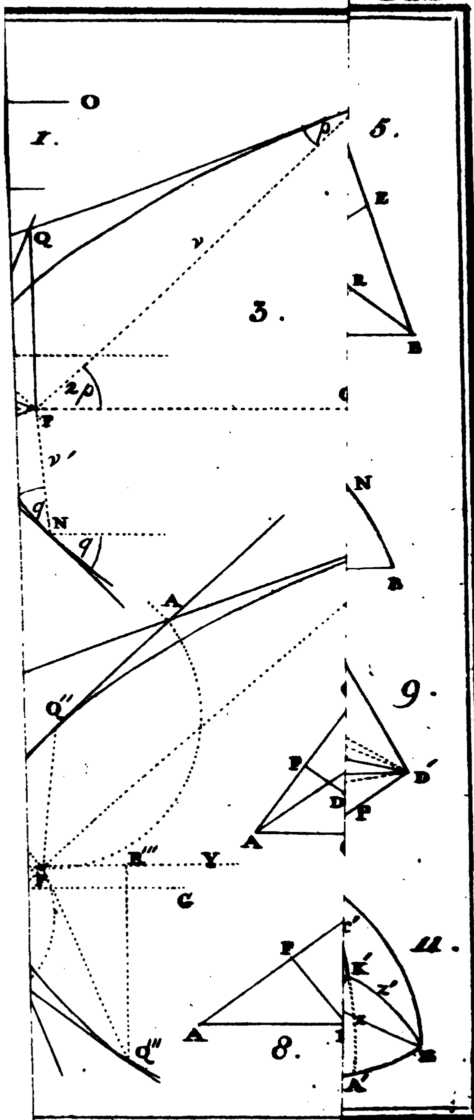
Om den inhoud van het ligchaam te verkrijgen, door het vlak OBC doorloopen, moet de integraal zoodanig genomen worden, dat dezelve voor $z = a$ verdwijnt. Dit geeft C $= a^3 \,Log.\, a - \frac{11}{6} a^3$ en bij gevolg

$$I = \pi \left\{ a^3 \,Log.\, \frac{a}{z} + \tfrac{1}{3} z^3 - \tfrac{3}{2} a z^2 + 3a^2 z - \tfrac{11}{6} a^3 \right\}.$$

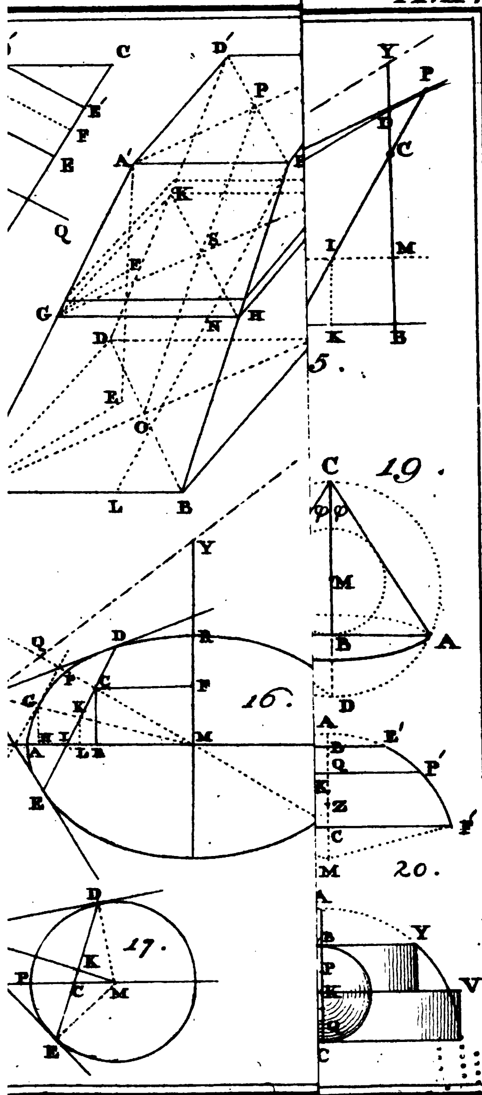
Neemt

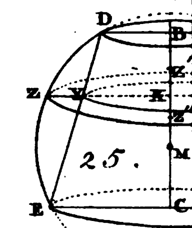
Neemt nu $z = 0$, dan wordt, uit hoofde van den term $Log. \frac{a}{z}$, de inhoud gelijk oneindig en het ligchaam, voortgebragt door de omwenteling van de ruimte, begrepen tusschen den oneindigen tak, OZ; en de asymptoot EG, om de as OD, is bij gevolg oneindig groot.

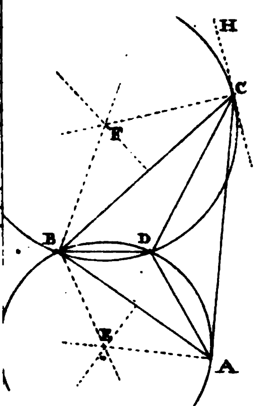
WISKUNDIG Pl. I

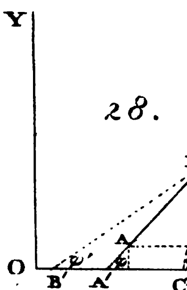


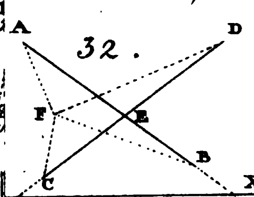
WISKU *pl. II.*

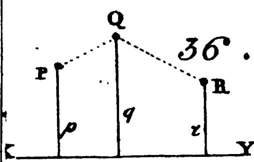

5.
19.
16.
20.
17.
C D' P Y P E F E A' D C K S I M E G H N D K B E O L B
C φ φ M B A D
Y Q D R P C F G K M H I A L B E
A D E' Q P' K Z C F' M
D K P C M E
A B Y P V K G C


D
B
Z
Z
Y
K
Z
M
25.
E
C

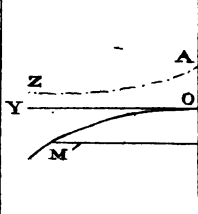

H
C
F
B
D
E
A

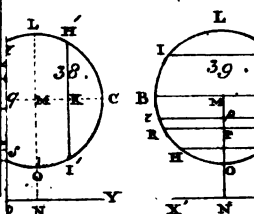

Y
28.
O
B
A
C


A
32.
D
F
E
B
C
X
T


Q
36.
P
R
p
q
r
Y
P

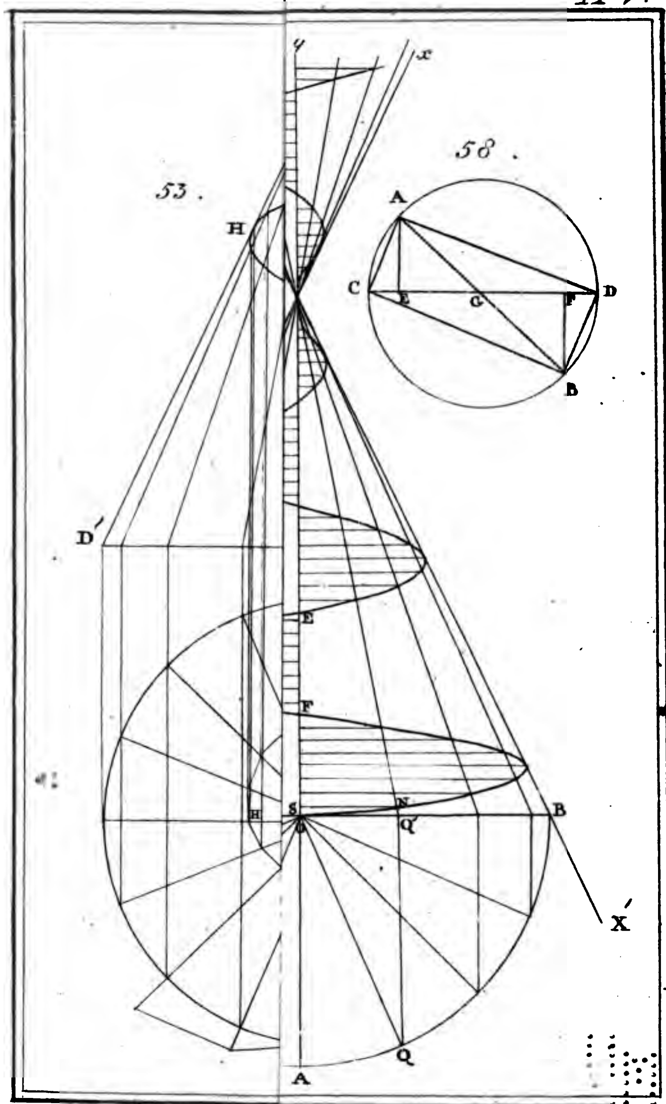
33.


A
Z
Y
O
M

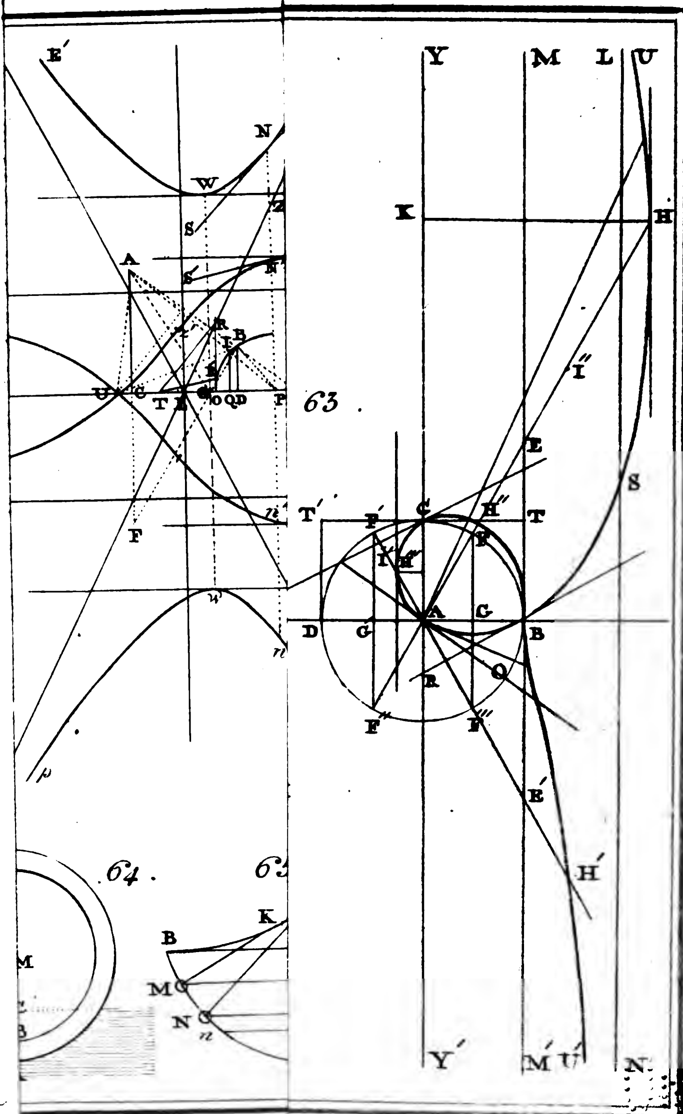

L
H
38.
M
K
C
I
O
Y
N
L
I
I
39.
B
C
M
r
q
R
F
Q
H
H
O
X
N
Y

40. 44. 45. 49. 50. 56. 57. 51.

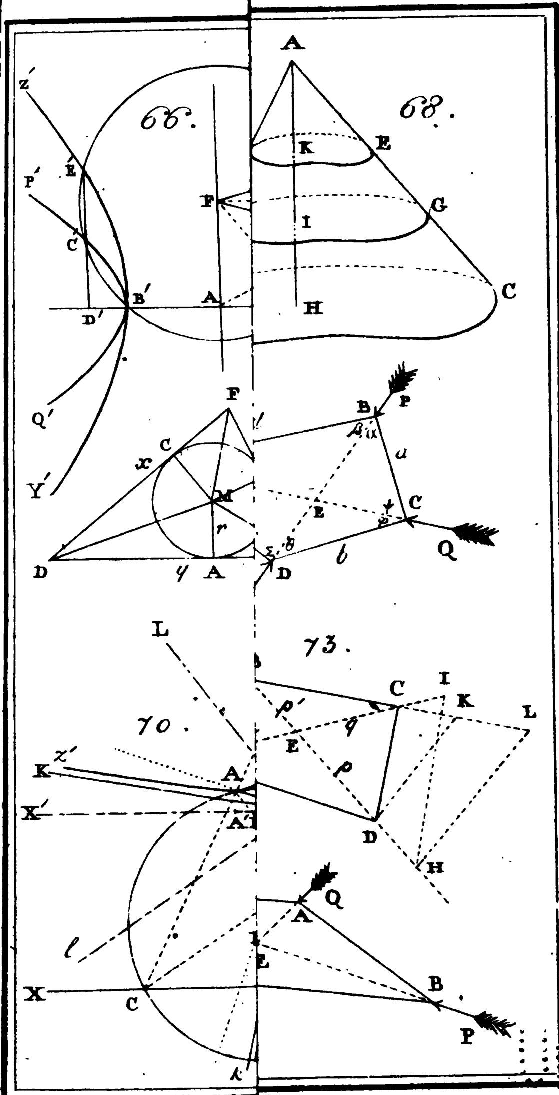



53.
58.
y
x
H
A
C
E
G
F
D
B
D′
E
F
S
N
H
B
Q′
X′
Q
A

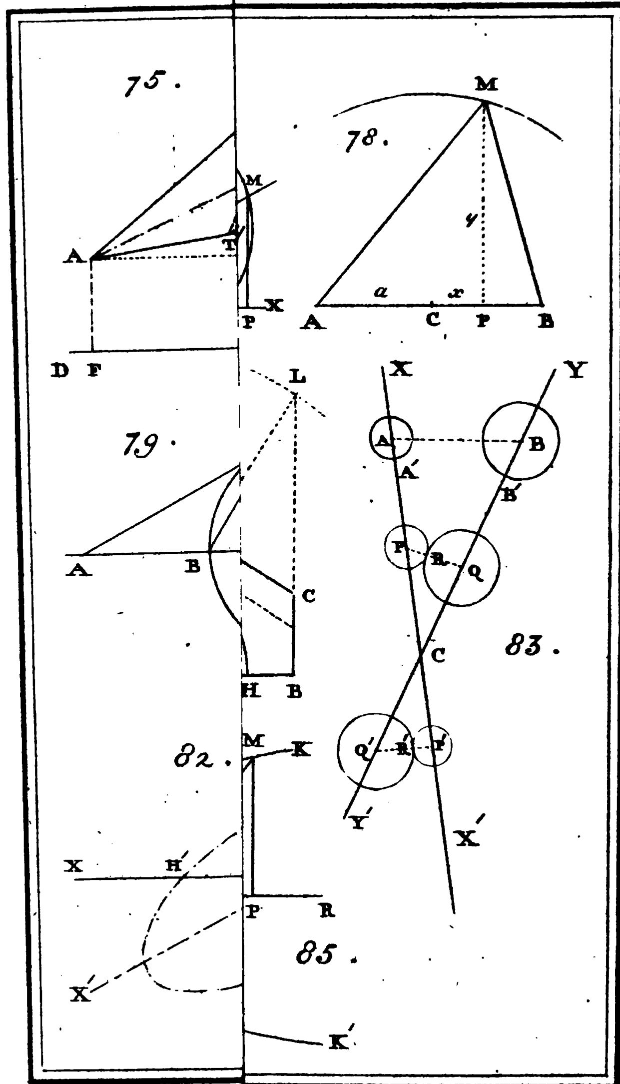
WN Pl VI

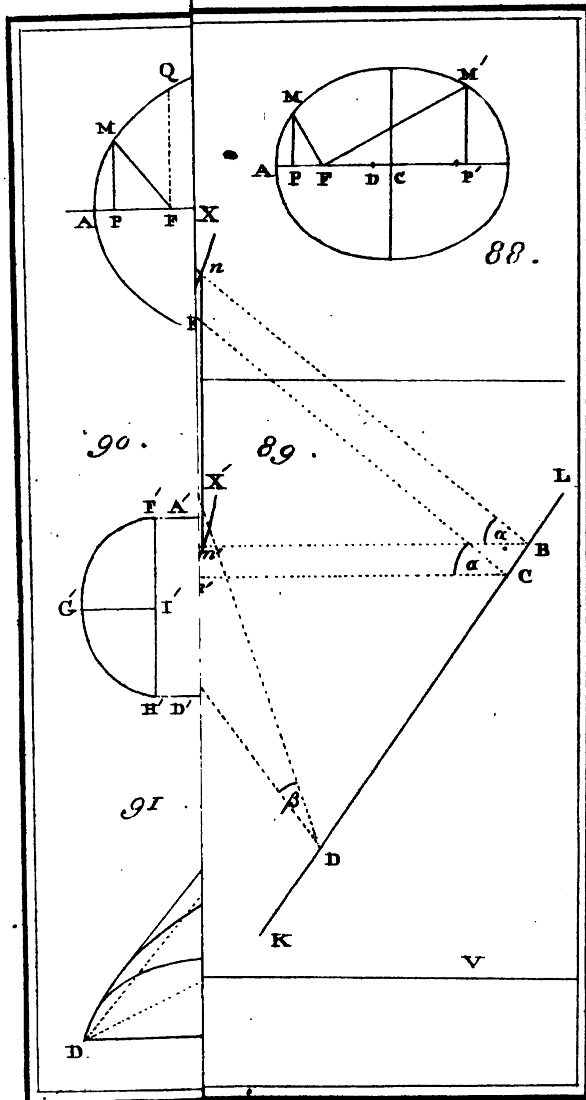


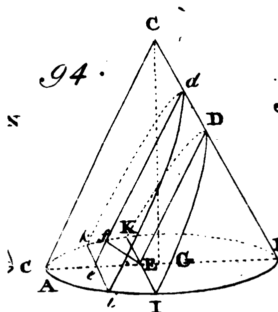
63
64
65
E′ N W S Z S′ N′ A R B I E U C T G O Q D P n′ F u′ n p
Y M L U K H I″ E S T′ F′ C H″ T F I H‴ D G A G B R Q F″ F‴ E′ H′ Y′ M′ U′ N
B K M N n

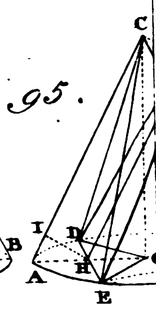


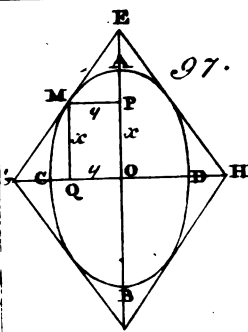
66.
68.
70.
73.
A
K
E
G
I
F
H
C
Z′
E′
P′
C′
B′
D′
Q′
Y′
B
P
a
C
x
M
E
r
D
y
b
Q
L
p′
q
p
I
K
Z′
X′
A′
H
Q
l
X
P
λ

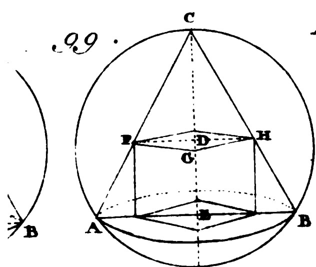

75.
M
T
A
X
P
D F
78.
M
y
a
x
A
C
P
B
79.
L
A
B
C
H B
82.
M
K
X
H′
P
R
X′
K′
85.
X
Y
A
B
A′
B′
P
R
Q
C
83.
Q′
R′
P′
Y′
X′

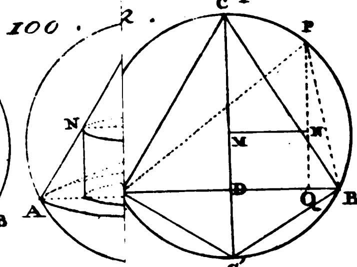

88.
89.
90.
91
Q
M
A
P
F
X
n
M′
D
C
P′
L
B
C
K
V
X′
F′
A′
m′
G′
I′
H′
D′
β
α

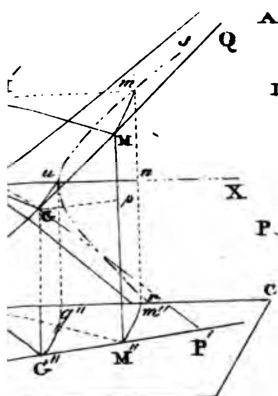

94.
C
d
D
K
c
A
E
G
B
I

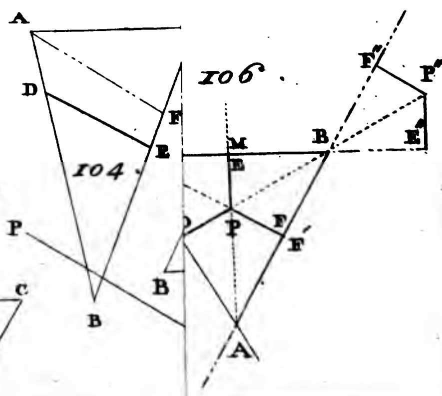

95.
C
I
D
A
H
E

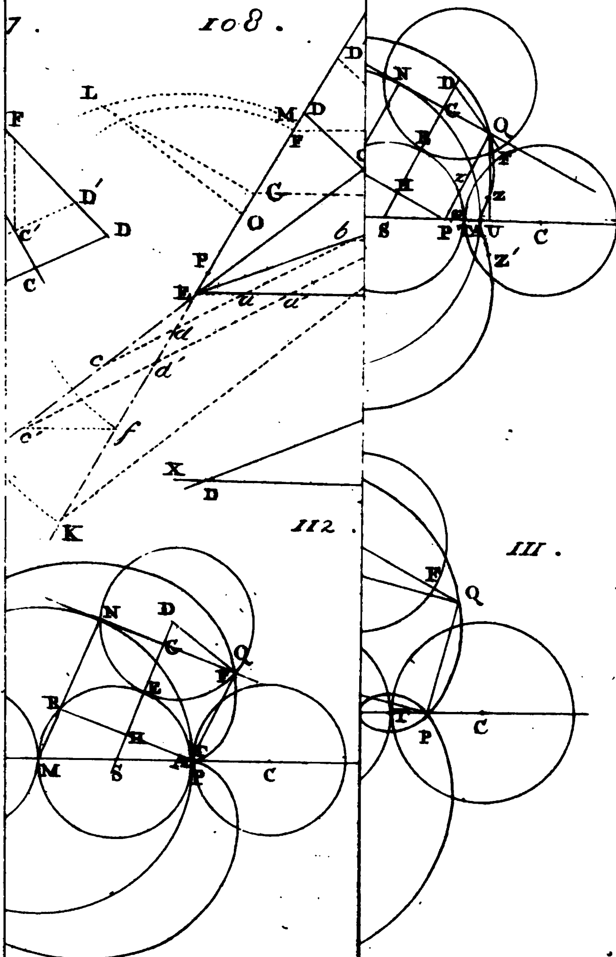

97.
E
A
M
P
y
x
C
O
D
H
Q
B
F


99.
C
D
G
H
A
B

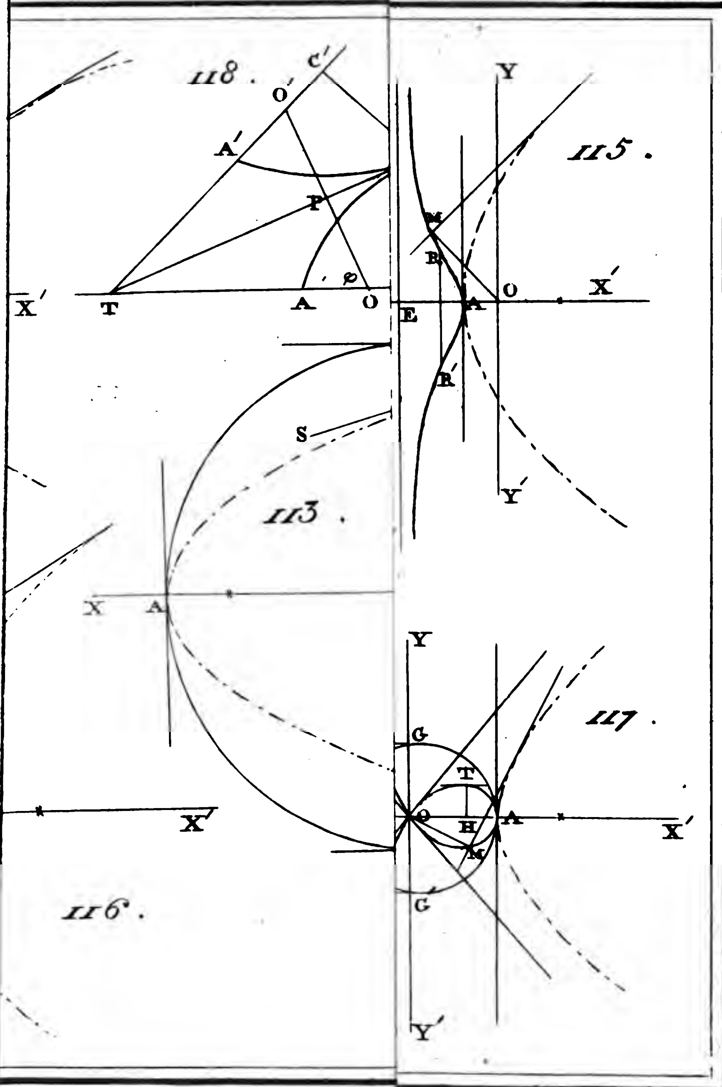

100.
N
A
C
P
M
D
Q
B
C'


Q
m
M
n
u
X
G
p
g''
m''
C
G''
M''
P'


A
D
F
E
104.
P
B
106.
M
B
E
P
F
F'
A

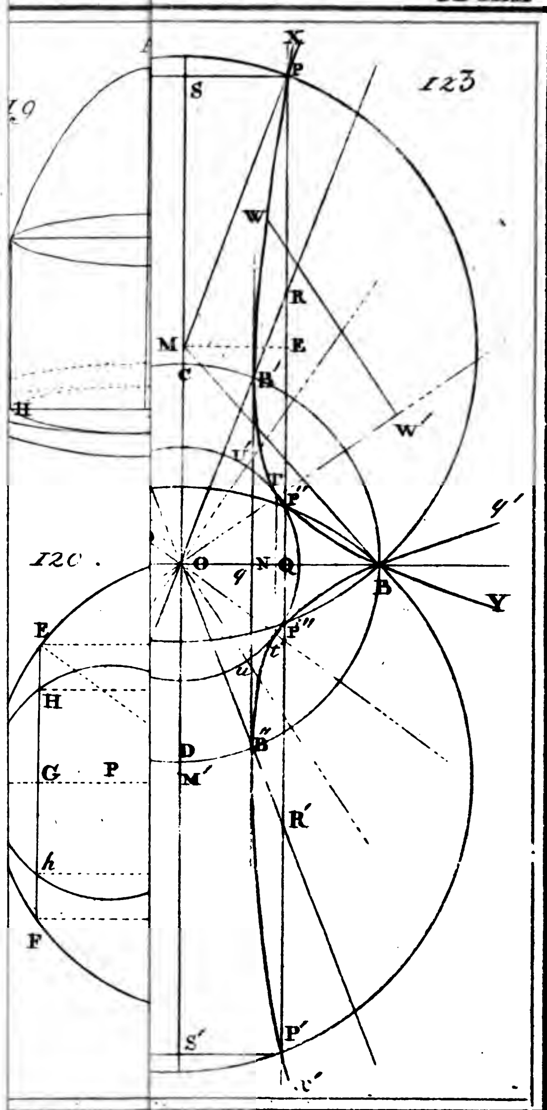


7.
108.
112.
111.
L
F
D
C
M
O
G
P
E
K
X
N
Q
S
H
Z
U

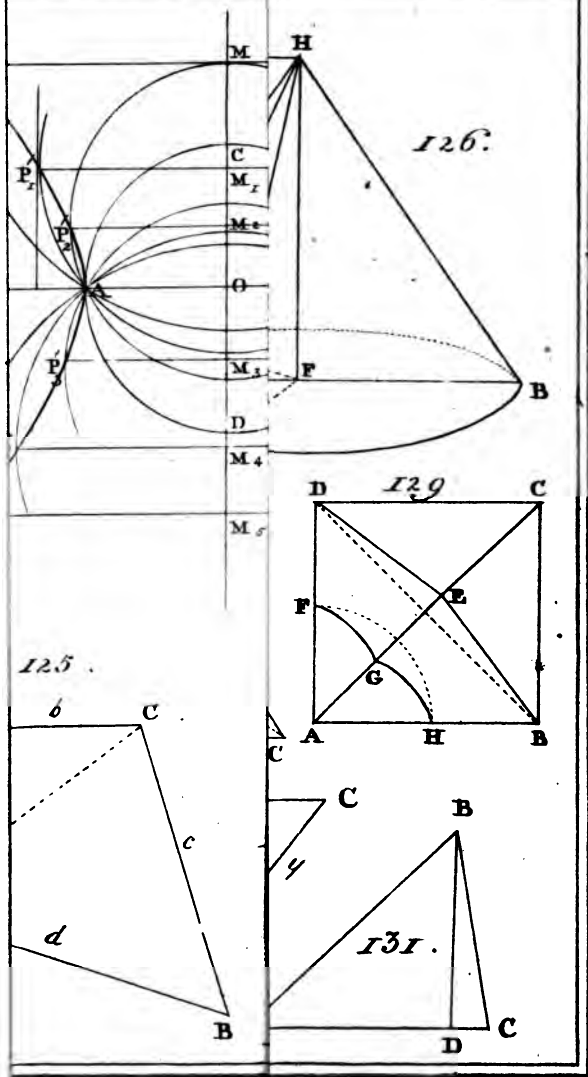

118.
C′
O′
A′
P
φ
X′
T
A
O
115.
Y
M
B
O
X′
E
A
B′
Y′
113.
S
X
A
X′
117.
Y
G
T
O
H
A
X′
M
G
Y′
116.

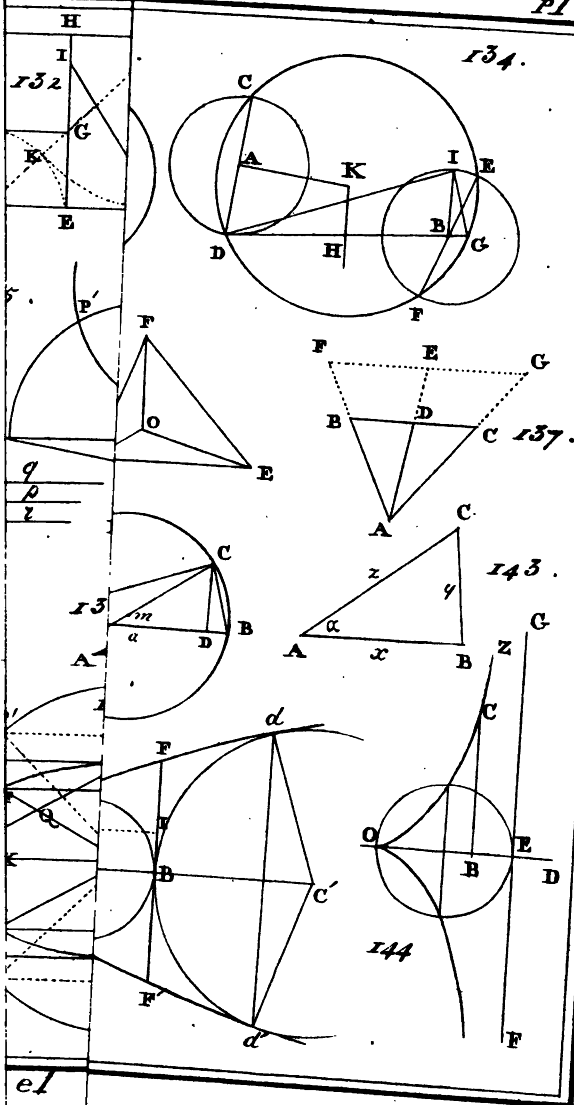
TELLEN

Pl XIII



1


M
H
126.
C
P_1
M_1
P_2
M_2
A
O
P_3
M_3
F
B
D
M_4
M_5
D
129
C
E
F
G
A
H
B
125.
b
C
c
d
B
C
C
4
B
131.
C
D


STELLEN
pl XV
132
134.
137.
143.
144
el
H
I
G
K
E
C
A
K
I
E
B
G
D
H
F
P′
F
O
E
F
E
G
B
D
C
A
q
p
l
C
B
D
a
m
A
C
z
y
α
A
x
B
Z
G
C
d
F
Q
K
B
C′
F′
d′
O
E
B
D
F



